

HIT

数学·统计学系列

Shuxue Aolinpike Budengshi Yanjiu

数学奥林匹克不等式研究

杨学枝 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Shuxue Aolinpike Budengshi Yanjiu



刘培杰
数学工作室

哈尔滨工业大学出版社 刘培杰数学工作室
联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-2926-0

9 787560 329260 >

定价68.00元

上架建议：数学奥利匹克／不等式



数学·统计学系列

数学奥林匹克不等式研究

Shuxue Aolinpike Budengshi Yanjiu

● 杨学枝 著

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

本书介绍了初等不等式的证明通法和各种技巧。书中收集了大量国内外初等不等式的典型问题,还有大量作者自创的题目,内容新颖,富有启发性。本书对难度较大的不等式的证明过程叙述比较详细,证法初等。因此,本书完全适合高中以上文化程度的学生、教师、不等式爱好者以及不等式研究方面的有关专家参考使用。同时本书也是一本数学奥林匹克的有价值的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克不等式研究/杨学枝著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.7

ISBN 978-7-5603-2926-0

Ⅰ.数… Ⅱ.杨… Ⅲ.初等代数-不等式-研究 Ⅳ.0122.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 131771 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 30.75 字数 600 千字
版　　次 2009 年 8 月第 1 版 2009 年 8 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-2926-0
印　　数 1~3 000 册
定　　价 68.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

作者简介

杨学枝先生,男,1947年11月生,1974年7月加入中国共产党。福建省闽侯县人,毕业于武汉大学数学系,数学特级教师,任中学副校长25年。任福州市校际教研员,福州市数学学科中级职称评审委员会主任、高级职称评审委员会主任,福州市中学数学骨干教师培训班授课教师、导师,福州市新课改数学科指导老师。中国初等数学研究会第二届理事会理事长(原全国初等数学研究工作协调组成员),《中国初等数学研究》杂志主编,原中国不等式研究小组组长,现中国不等式研究会顾问,原《不等式研究通讯》主编,《中国初等数学研究》主编。湖北省《中学数学》等多家杂志编委。福建省数学学会初等数学分会理事长,福建省数学学会理事,福建省教育学会数学教育委员会理事,福州市数学学会副理事长。数学奥林匹克高级教练员,最早参与培训福建省进入国家冬令营的数学尖子生。2004、2005、2006、2007年暑期曾应邀到广东省深圳中学、华南师大附中、中山纪念中学、全国高中数学奥林匹克协作体学校第七届夏令营以及福州市、厦门市、漳州市等学校和地区为数学奥赛尖子生培训讲座,深受师生欢迎,深圳中学王烜同学于2006年第48届IMO中荣获金牌,杨学枝先生是培训讲师之一。

杨学枝先生长期从事初等数学教育、教学和学术研究工作,最早发起并参加筹备首届全国初等数学研究学术交流会。1996年8月曾在福州市组织召开了第三届全国初等数学研究学术交流会。1991年筹建了福建省数学学会初等数学分会,并连续主持召开了七届年会,组织并主持召开了三届全国不等式研究学术会议。多次参加在国内召开的国际、国内数学学术会议,并在大会上作学术报告及论文交流。在全国各级CN刊物、国外数学刊物及大学学报发表了300余篇有价值的教育、教学及初数研究论文,主编出版了《福建省初等数学研究文集》(17万字,由福建省教育出版社1993年7月出版)、《不等式研究》(50万字,由西藏人民出版社2005年5月出版)、《数学奥林匹克不等式研究》(60万字,由哈尔滨工业大学出版社2009年8月出版),参加多部数学专著及数学教学参考书籍的编写工作。“关于四面体的一个三角不等式及其应用”、“关于角平分线的一组不等式”等多篇论文获全国一等奖。杨学枝先生曾被作为封面人物刊登在《中学数学》(湖北)2003年第2期上。杨学枝先生在初等不等式研究方面取得了许多新成果,他自创的一个不等式在《不等式 理论 方法》书中列为“杨学枝不等式”条目,他用非常简捷的方法解决了曾困惑过国内外数学

家的一个几何不等式问题（见《数学奥林匹克不等式研究》一书中第六章例1）。

杨学枝先生从事高中数学教学近40年，其中在高三教学20余年，在38年的中学数学教学生涯中，教书育人，积极开展教科研活动。1997年提出并主持了“数学问题创新教学法”课题研究，被立项为省级重点课题。2005年12月通过了省级专家评估验收。在杨学枝先生的带领下，他所在的福州第二十四中学数学组曾被《中国数学教育》（中国教育学会中学数学教学专业委员会会刊）于2007年第6期在封面、封底作过介绍，刊出了名校风采——福州第二十四中学数学组。2003年10月受福州市人民政府指派，杨学枝先生赴宁夏讲学。在福建省、福州市为中学数学作数学教育教学培训二百多场。杨学枝先生在福建省福州市（含八县市）和厦门市等地市为教师岗位培训讲座达百余场次。杨学枝先生为教育事业作出了应有的贡献。

序

杨学校先生这本书,堪称初等不等式研究领域的一部巨著。这主要不是指它洋洋洒洒60万言的篇幅,而是指其内容和意义。不同于我们熟知的匡继昌先生的大百科全书式的工具性专著《常用不等式》,杨学校先生这本是通过大量典型和非典型问题的例解来系统阐述初等不等式证明的多种方法和技巧的专著。过去国内学者出版过一些讨论初等不等式的小册子,但其力度和覆盖面都不能和本书相比。尤其是,我感觉本书有一个鲜明的特色,对各章节问题的解力求简洁精妙往往另辟蹊径,全书凝结着作者的经验、智慧、灵感和巧思。本书不仅可作为奥数参考书籍,更可以作为初等不等式研究的重要文献。

譬如第十一章包括的十多篇精彩的文章,由于篇幅限制在期刊中只发表过部分内容,在本书中才得以一窥全貌。其中包含了不少富于启发性的确有参考价值的材料。

我原本不知道杨学校先生。1983 年我和张景中先生在北京马甸参加第四届双微会议期间,在某次分组会上,来自美国的知名数学家 M. Shub 提到一个几何不等式:“在三角形 ABC 三边上各取一点 P, Q, R 使得它们恰好三等分三角形 ABC 的周界。求证三角形 PQR 的周界不小于三角形 ABC 的周界之半”。他说这是一个许多人知道但不会证明的难题。若干年之后可能是单墫教授告诉了我杨学校先生对该不等式的独具匠心的精巧

证明,留下了极其深刻的印象。虽然后来我在加拿大一个级别较高的期刊上看到了一个相当冗繁的证明,相比之下,轩轻立见。俗话说:行家一出手,就知有没有。不到炉火纯青,不可能有这样的身手。那以后我开始关注杨学枝先生的工作。特别是通过“不等式研究小组”,“不等式研究网站”和两次不等式学术会议同他有了较多的接触和联系。20世纪90年代中期以后我的研究兴趣集中于“计算实代数几何”,即不等式的机器与自动发现。如何将不等式的证明和发现的传统的和现代的思想、方法和技巧纳入机械化和自动化的框架并在计算机上有效地实现,这是我十几年来一直关注的课题。这期间我对学校先生在不等式研究领域的精深造诣和丰厚积累有了更多的了解,更由衷钦佩先生数十年如一日锲而不舍地献身于一个毫无功利可图的科学目标。我相信,这部凝结了学校先生数十年心血的宝贵专著,不仅有益于奥数研究,且必将对整个初等不等式研究领域产生重要影响。

杨　路

2009年6月10日于丽娃河畔

前言

不等式证明是国内外数学竞赛的一个重要课题，也是中学数学教学的重要内容之一．不等式证明，其内容较为广泛，综合性较强，证法灵活性较大，难度较高，因此，它更是数学奥赛的热门课题，常受命题者青睐．另外，在不等式证明过程中，往往要综合应用数学各方面知识和多种数学思维方法，无固定证明模式，因此，不等式的证明过程是对数学思维的很好训练．正因为如此，长期以来，不等式证明在高中数学教学和数学竞赛中都备受人们的高度重视．

不等式的证明没有绝对的套路和统一的证法模式，常因题而异．有时，同一道不等式证明题，会有许多种证法，有的证明还需多种方法并用，方可奏效．对于同一道不等式，由于证法不同，其效果与作用也往往不同．有的证法繁杂，有的证法简捷，有的可用通法证明，有的需用到某些技巧证明．一般来说，简捷的初等的证法是比较好的证法，但也不乏有的较繁些的证法，它可有效地用到其推广后的不等式的证明，或由之牵出或拓广相关不等式．在不等式证明中，有的证法带有共性，有的证法具有个性，还有的证法妙趣横生，它可以揭示某些不等式的本质，拓展其内涵，可挖掘出许多新颖且有价值的内容．因此，在不等式证明中，探究其证法显得尤其重要．

证明不等式虽然没有定规定法,即没有“灵丹妙药”,但这并不等于说不等式的证明就无规可循,无法可依.掌握不等式的基本规律和一些基本证法(通法)是不等式证明的基本功.有了基本功,再进一步了解和掌握一些技巧证法,那么,对不等式的证明就更有把握了.

从不等式的证明思想来看,不等式证明总的说可以划分为两大类,一是用等价变换法证明不等式,二是用非等价变换法证明不等式.通常情况下,在不等式证明中,如用恒等变换法(含配方法)、求差比较法、变量代换法、数形结合法等,属于等价变换的证法范畴;用放缩法、应用基本(重要)不等式法、微积分法、调整法、数学归纳法、设参法、利用函数单调性等,属于非等价变换的证法范畴.在本书中,我们将着重举例介绍不等式证明中几种行之有效(尤其在证明难度较大的不等式时)的常用的证法及其灵活应用.本书在所收集的例题与练习中,注意到尽可能囊括不等式的各种证法(通法与技巧).书中多数例题与练习的解答是笔者独立给出的,但也许有的解答人家早已给出,而笔者还不知道.当然,笔者不能保证所有证法都是最佳的,也可能是最笨的证法,但求能起到抛砖引玉之用.

本书初稿写于2004年2月,后经多次修改,完稿时间为2009年5月.本书中整理了笔者多年来的数学竞赛讲座稿和几十年来不等式研究的部分成果.其中问题一部分来源于国内外数学竞赛题或训练题,一部分来源于有关网站上提出的问题,凡明确来源的均作了说明.还有相当一部分是笔者的自创题(有的也许别人就已发现,而笔者却不知晓)或改造题,这些题,均注明了在刊物上发表的时间或创作时间.在选题时,注意到了代表性、新颖性、深刻性及挑战性,因此,本书中的不等式及其证明较有参考价值,但由于笔者水平有限,难免有许多疏漏或不尽如人意之处,望读者提出批评意见.

本书得以出版,笔者要感谢我的导师杨路教授在百忙中抽出时间为本书写序,特别要感谢导师杨路教授以及我的好友周春荔教授、杨世明老师、吴康副教授等长期以来对我的初等数学研究,尤其在不等式研究方面所给予的极大的鼓励、关心、支持和帮助,才使笔者在初等数学研究和不等式研究中有所收获.刘培杰老师为本书的出版付出了很多心血,哈尔滨工业大学出版社的编辑们为之付出了辛勤的劳动,还有我的儿子杨文花费了大量时间打印了本书的初稿,在此一并表示深切地感谢!

杨学枝

二〇〇九年五月一日

本书中常用的符号

(1) $\sum$——循环和. 如对于 x,y,z, $\sum x = x + y + z$, $\sum yz = yz + zx + xy$, $\sum x^2y = x^2y + y^2z + z^2x$ 等.

(2) $\prod$——循环积. 如对于 x,y,z, $\prod(y + z) = (y + z)(z + x)(x + y)$, $\prod(x^2 + y) = (x^2 + y)(y^2 + z)(z^2 + x)$ 等.

(3) $\Leftrightarrow$——等价于. 如 $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow (a - b)^2 \geqslant 0$.

(4) $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$——在 $x_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 中,每两个乘积之和. 如对于 x_1,x_2,x_3,x_4,有

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} x_ix_j = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

(5) 在无特殊说明情况下,$\triangle ABC$ 的三边长为 $BC = a, CA = b, AB = c$,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,半周长为 s,与 BC, CA, AB 边相切的旁切圆半径分别为 r_a, r_b, r_c.

目录

第一章　等价变换法证明不等式　//1

第二章　增量比较法证明不等式　//27

第三章　放缩法证明不等式　//54

第四章　应用基本不等式证明不等式　//70

第五章　参数法证明不等式　//103

第六章　三角几何不等式　//108

第七章　其他不等式证明例子　//139

第八章　练习　//199

附：第八章练习提示与参考答案　//221

第九章 《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录 //322

Chapter 1 Warm-up problem set //323

Chapter 8 Final problem set //328

附:第九章《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录参考答案 //335

Chapter 1 Warm-up problem set //335

Chapter 8 Final problem set //367

第十章 猜想 // 413

第十一章 初等不等式研究文章 //417

1 论匹多不等式 //417

2 对一个三角不等式的再探讨 //420

3 一个向量不等式及其应用 //429

4 外森比克不等式的加权推广 //437

5 平面凸四边形的一个不等式 //442

6 对"每期一题"的别证与推广 //445

7 关于椭圆内接三角形的最大面积与椭球内接四面体的最大体积的问题 //448

8 椭圆内接 n 边形的最大面积问题 //453

9 关于四面体的一个不等式 //457

10 由一个代数不等式所引出的几个关于三角形的不等式 //459

11 关于三角形中线的几个不等式 //465

12 关于三角形三线的一个不等式 //473

等价变换法证明不等式

第一章

等价变换法证明不等式是指我们在证明不等式时，对其条件或者结论作等价变换，或对整个命题作等价变换，或对其中某些元素或式子作换元代换等，将原命题经过多次等价变换，化归为我们所熟知的，易于证明的命题，这就达到了我们的证明目的. 等价变换是化归思想的具体体现.

例1 设 $x_i, y_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$，$\sum_{i=1}^{n} y_i \geqslant 0$，$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \geqslant 0$，$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_i y_j \geqslant 0$，$x = \sum_{i=1}^{n} x_i$，则

$$\sum_{i=1}^{n} (x - x_i) y_i \geqslant 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j} \cdot \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_i y_j} \qquad (1)$$

当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$ 时，式(1) 取等号.

证

原式 $\Leftrightarrow x\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j} \cdot \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_i y_j} \Leftrightarrow$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 \cdot (\sum_{i=1}^{n} y_i)^2 \geqslant$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j} \cdot \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_i y_j})^2 \Leftrightarrow$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} x_i y_j)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_i y_j) \geqslant$$

$$(\sum x_i y_i + 2\sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j} \cdot \sqrt{\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} y_i y_j})^2$$

最后一式易由柯西不等式得到.

注　本例经等价变换,转化为易由柯西不等式证明的命题,思路源于

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

在式(1)中,当 $n = 3$ 时,被人们称之为"母不等式",即以下命题.

命题 1　设 $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 \in \mathbf{R}$,且 $\sum x_1 \geqslant 0$, $\sum y_1 \geqslant 0$, $\sum x_1 x_2 \geqslant 0$, $\sum y_1 y_1 \geqslant 0$,则

$$\sum (x_2 + x_3) y_1 \geqslant 2\sqrt{\sum x_1 x_2} \cdot \sqrt{\sum y_1 y_2} \tag{2}$$

当且仅当 $\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \frac{x_3}{y_3}$ 时,式(2)取等号.

命题 1 应用如下:

1.(匹多不等式)$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 边长分别为 a, b, c 和 a', b', c',面积分别为 Δ 与 Δ',则

$$\sum (-a^2 + b^2 + c^2) a'^2 \geqslant 16\Delta\Delta' \tag{3}$$

当且仅当 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 时,式(3)取等号.

提示:取 $x = -a^2 + b^2 + c^2$, $x' = -a'^2 + b'^2 + c'^2$,等,并应用三角形面积公式.

2.(程灵提出)若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 边长分别为 a, b, c 和 a', b', c',面积分别为 Δ 与 Δ',则

$$\sum (-a + b + c) a' \geqslant 4\sqrt{3\Delta\Delta'} \tag{4}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 均为正三角形时,式(4)取等号.

提示:在式(2)中取 $x_1 = -a' + b' + c'$, $y_1 = -a + b + c$,等,并应用到

$$2\sum bc - \sum a^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta$$

3.(安振平提出)若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 边长分别为 a, b, c 和 a', b', c',面积分别为 Δ 与 Δ',则

$$\sum (a-b+c)(a+b-c)a'^2 \geqslant 16\Delta\Delta' \tag{5}$$

当且仅当$\dfrac{a'^2}{a(-a+b+c)} = \dfrac{b'^2}{b(a-b+c)} = \dfrac{c'^2}{c(a+b-c)}$时,式(5) 取等号.

提示:在式(2) 中取$x_1 = -a'^2 + b'^2 + c'^2, y_1 = (a-b+c)(a+b-c)$等.

4.(自创题,1983.05.07)若$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$边长分别为a,b,c和a',b',c',面积分别为Δ与Δ',则

$$\sum a(-a+b+c)(a'-b'+c')(a'+b'-c') \geqslant 16\Delta\Delta' \tag{6}$$

当且仅当$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$时,式(6) 取等号.

提示:在式(2) 中取$x_1 = (a-b+c)(a+b-c), y_1 = (a'-b'+c')(a'+b'-c')$等. 以上式(3) 与式(6) 有相同的取等号条件,试讨论他们左边式子的大小.

我们还可以由式(2) 得到或证明更多关于三角形的一些不等式(如后面练习2,3).

例2 (自创题,1990,12,23)设$x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbf{R}^+$,则

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_4}{x_1+x_2} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right) \tag{7}$$

当且仅当$x_1 = x_3, x_2 = x_4$时,式(7) 取等号.

证一 记原式左边式子为u,右边式子为v,则

$$\begin{aligned}
2u+4 &= \frac{2x_1+x_2+x_3}{x_2+x_3}+\frac{2x_2+x_3+x_4}{x_3+x_4}+\frac{2x_3+x_4+x_1}{x_4+x_1}+\frac{2x_4+x_1+x_2}{x_1+x_2} = \\
&\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)+\left(\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_3+x_1}{x_4+x_1}\right)+ \\
&\left(\frac{x_2+x_4}{x_3+x_4}+\frac{x_4+x_2}{x_1+x_2}\right) = \\
&v+(x_1+x_2+x_3+x_4)\left[\frac{x_1+x_3}{(x_2+x_3)(x_4+x_1)}+\frac{x_2+x_4}{(x_3+x_1)(x_1+x_2)}\right] \geqslant \\
&v+\left(\sum x_1\right)\left[\frac{4(x_1+x_3)}{(\sum x_1)^2}+\frac{4(x_2+x_4)}{(\sum x_1)^2}\right] = \\
&v+4
\end{aligned}$$

所以$u \geqslant \dfrac{1}{2}v$,即为式(7).

证二 式(7) $\Leftrightarrow \dfrac{x_1}{x_2+x_3}+\dfrac{x_2}{x_3+x_4}+\dfrac{x_3}{x_4+x_1}+\dfrac{x_4}{x_1+x_2} \geqslant$

$$\frac{x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_1}{x_1+x_2}=$$

$$4-\frac{x_3}{x_2+x_3}-\frac{x_4}{x_2+x_4}-\frac{x_1}{x_4+x_1}-\frac{x_2}{x_1+x_2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_4}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_1}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_2}{x_1+x_2}\geqslant 4$$

此式在证法一中已证过.

注 1. 此例证明中进行了整体等价变换,切不可盲目用去分母方法证明.

2. 本例解答可参见《福建中学教学》,1991年第2期,杨学枝文:"循环不等式的证明及推广".

例3 (自创题,1988,04,20) 设$x,y,z,w,\lambda\in\mathbf{R}$,且$xy>0,zw>0,|\lambda|\leqslant 2$,则

$$\sqrt{x^2+y^2+\lambda xy}+\sqrt{z^2+w^2-\lambda zw}\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}\tag{8}$$

当且仅当$\frac{\sqrt{x^2+y^2+\lambda xy}}{xy}=\frac{\sqrt{z^2+w^2-\lambda zw}}{zw}$时,式(8)取等号.

证 设$u=\sqrt{x^2+y^2+\lambda xy},v=\sqrt{z^2+w^2-\lambda zw}$,则

$$\frac{u^2-x^2-y^2}{xy}+\frac{v^2-z^2-w^2}{zw}=0$$

即
$$\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}=\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}=\frac{(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}$$

再应用柯西不等式,有

$$(xy+zw)\left(\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\right)\geqslant(u+v)^2$$

即得式(8).

注 式(8)可参阅由吴康主编的《奥赛金牌之路》(高中数学)"第一章 §6 三角不等式"(P81 ~ 90),本节系杨学枝所写.

利用同上证法可得以下命题(自创题):

设$x,y,z,w\in\mathbf{R}^+,\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,则

$$|x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+w\sin\theta|\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}\tag{9}$$

当且仅当$x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=w\cos\theta$时取等号.

式(9)为笔者首创,可参见同上吴康主编的《奥赛金牌之路》(高中数学)P82.

本命题在《中等数学》杂志社组织的数学竞赛命题评奖中,获一等奖. 本命题也可参见《中等数学》,1989 年第 2 期,杨学校文:"对一个三角不等式的再探讨".

例 4 (2000 年 IMO 41 届题 2)a,b,c 是正实数,且满足 $abc = 1$,求证

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leqslant 1 \tag{10}$$

证 由 $abc = 1$,可设 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}(x,y,z \in \mathbf{R}^{+})$,此时式(10)便化为我们所熟知的不等式

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \leqslant xyz$$

其中,$x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^{-}}$.

例 5 (2001 年 IMO 42 届题 2)对所有正实数 a,b,c,证明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1 \tag{11}$$

证一 由已知可设 $x=\frac{bc}{a^2}, y=\frac{ca}{b^2}, z=\frac{ab}{c^2}$,则 $x,y,z \in \mathbf{R}^{+}$,且 $xyz = 1$,原式可化为

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}}+\frac{1}{\sqrt{1+8y}}+\frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geqslant 1$$

将上式两边平方,并注意到 $\sum \sqrt{1+8x} \geqslant 9, \prod \sqrt{1+8x} \geqslant 27$, $\sum x \geqslant 3$,即可得证.

证二 化为局部不等式.

因为
$$8bc \leqslant 4a^{\frac{2}{3}}(bc)^{\frac{2}{3}}+\frac{4(bc)^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$$

所以
$$a^2+8bc \leqslant \left[a+\frac{2(bc)^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}}\right]^2$$

所以
$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+2(bc)^{\frac{2}{3}}} \geqslant \frac{a^{\frac{4}{3}}}{\sum a^{\frac{4}{3}}}$$

类似还有二式,将所得三式左右两边分别相加,即得式(11).

注 这两例告诉我们,对于 $abc = 1$,有时可设 $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$;或 $x=\frac{bc}{a^2}, y=\frac{ca}{b^2}, z=\frac{ab}{c^2}$;或 $x=\frac{a^2}{bc}, y=\frac{b^2}{ca}, z=\frac{c^2}{ab}$ 等,化为齐次式证明.

例6 (自创题,1988,10,13)设同一平面上两个凸四边形的边长分别为 a, b,c,d 和 a',b',c',d',面积分别为 Δ 和 Δ',那么

$$aa' + bb' + cc' + dd' \geqslant 4\sqrt{\Delta\Delta'} \tag{12}$$

当且仅当这两个凸四边形都内接于圆(不一定要同一个圆),且

$$(s-a)(s'-a') = (s-b)\cdot(s'-b') = (s-c)(s'-c') = (s-d)(s'-d')$$

时,式(12)取等号. 这里 $s = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$,$s' = \frac{1}{2}(a'+b'+c'+d')$.

证 我们知道,在边长给定的凸四边形中,以其内接于圆时的面积为最大(说明附后),因此,只需证这两个凸四边形都为圆内接四边形的情况. 圆内接凸四边形以 a,b,c,d 为边时的面积为 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$,于是有

$$\begin{aligned} aa' + bb' + cc' + dd' &= \sum (s-a)(s'-a') \geqslant \\ & 4\left[\prod (s-a)\cdot\prod (s-a')\right]^{\frac{1}{2}} = \\ & 4\sqrt{\Delta\Delta'} \end{aligned}$$

注 本例可参见杨学校:"关于平面四边形的一个不等式",《福建中学数学》,1989 年第 2 期.

附:凸四边形 $ABCD$ 四边长分别为 $AB = a$,$BC = b$,$CD = c$,$DA = d$,当且仅当此四边形 $ABCD$ 内接于圆时,其面积最大,最大值为

$$(S_{ABCD})_{\max} = \frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)} \tag{13}$$

证一 如图 1 所示,四边形 $ABCD$,连对角线 AC,设 $AC = x$,则

$$\begin{aligned} 16S_{ABCD}^2 &= 4(ab\sin\angle ABC + cd\sin\angle CDA)^2 \leqslant \\ & 4(ab+cd)(ab\sin^2\angle ABC + cd\sin^2\angle CDA) = \\ & 4(ab+cd)\left[ab+cd-\frac{(a^2+b^2-x^2)^2}{4ab}-\frac{(c^2+d^2-x^2)^2}{4cd}\right] = \\ & (ab+cd)\left[4(ab+cd)-\frac{ab+cd}{abcd}x^4+\frac{2(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}x^2-\right. \\ & \left.\frac{cd(a^2+b^2)^2+ab(c^2+d^2)^2}{abcd}\right] = \\ & (ab+cd)\left\{-\frac{ab+cd}{abcd}\left[x^2-\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right]^2+\right. \\ & \frac{(ac+bd)^2(ad+bc)^2}{abcd(ab+cd)}-\frac{cd(a^2+b^2)^2+ab(c^2+d^2)^2}{abcd}+ \\ & \left.4(ab+cd)\right\} \leqslant 4(ab+cd)^2+\frac{(ac+bd)^2(ad+bc)^2}{abcd}- \\ & \frac{[cd(a^2+b^2)^2+ab(c^2+d^2)](ab+cd)}{abcd} = 4(ab+cd)^2+ \end{aligned}$$

$$\frac{[ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)]^2}{abcd}-(a^2+b^2)^2-(c^2+d^2)^2-$$

$$\frac{ab}{cd}(c^2+d^2)^2-\frac{cd}{ab}(a^2+b^2)^2=$$

$$4(ab+cd)^2+2(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(a^2+b^2)^2-(c^2+d^2)^2=$$

$$4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=$$

$$(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

当且仅当 $\begin{cases}\sin^2 B=\sin^2 C\\ x^2=\dfrac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 B=\sin^2 C\\ \dfrac{a^2+b^2-x^2}{2ab}+\dfrac{c^2+d^2-x^2}{2cd}=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}\sin B=\sin C\\ \cos B+\cos C=0\end{cases}\Leftrightarrow$ 四边形 $ABCD$ 内接于圆时,式(13)取等号.

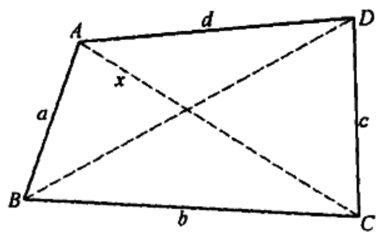


图 1

证二　$2S_{ABCD}=bc\sin C+da\sin A$,又

$$BD^2=b^2+c^2-2bc\cos C=d^2+a^2-2da\cos A$$

所以

$$bc\cos C-da\cos A=\frac{1}{2}(b^2+c^2-d^2-a^2)$$

所以

$$4(S_{ABCD})^2=(bc\sin C+da\sin A)^2=$$

$$(bc\sin C+da\sin A)^2+(bc\cos C-da\cos A)^2-$$

$$\frac{1}{4}(b^2+c^2-d^2-a^2)^2=$$

$$b^2c^2+d^2a^2-2abcd\cos(A+C)-\frac{1}{4}(b^2+c^2-d^2-a^2)^2\leqslant$$

$$(bc+da)^2-\frac{1}{4}(b^2+c^2-d^2-a^2)^2=$$

$$\frac{1}{4}(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-$$

$$c+d)(a+b+c-d)$$

即得式(13).

证三 （应用柯西不等式）如图2所示，若凸四边形 $ABCD$ 边长 $AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$，面积为 s，连 AC，设 $AC=x$，则

$$s=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=\sqrt{(a+b+x)(-a+b+x)(a-b+x)(a+b-x)}+$$
$$\sqrt{(c+d+x)(-c+d+x)(c-d+x)(c+d-x)}=$$
$$\sqrt{[(a+b)^2-x^2][x^2-(a-b)^2]}+$$
$$\sqrt{[(c+d)^2-x^2][x^2-(c-d)^2]}\leqslant$$
$$\sqrt{[(a+b)^2-x^2+x^2-(c-d)^2][(c+d)^2-x^2+x^2-(a-b)^2]}$$

由柯西不等式得

$$\text{上式}=\sqrt{-(a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

当且仅当

$$\frac{(a+b)^2-x^2}{x^2-(a-b)^2}=\frac{x^2-(c-d)^2}{(c+d)^2-x^2}$$

即

$$x=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

时取等号.

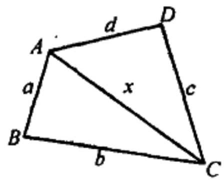


图2

例7 设 $x,y,z\in\mathbf{R}$，u 为某已知正数，求证

ⅰ)

$$\prod(x^2+u)\geqslant\frac{3}{4}u^2(\sum x)^2 \tag{14}$$

当且仅当 $x=y=z=\sqrt{\frac{u}{2}}$ 时，式(14)取等号.

ⅱ)

$$\prod(x^2+u)\geqslant 72\cdot(\frac{u}{5})^{\frac{5}{2}}\cdot\sum x \tag{15}$$

当且仅当 $x=y=z=\sqrt{\frac{u}{5}}$ 时，式(15)取等号.

ⅰ) 证一 $\prod(x^2+u)-\frac{3}{4}u^2(\sum x)^2=\frac{4}{9}u(s_2-\frac{3}{2}u)^2+\frac{u^2}{36}(s_1-$

$\frac{6}{u}s_3)^2+\frac{2}{9}u^2(s_1^2-3s_2)+\frac{5}{9}u(s_2^2-3s_1s_3)\geqslant 0.$

证二 在$x^2-\frac{u}{2},y^2-\frac{u}{2},z^2-\frac{u}{2}$中必有两个同号，不妨设$x^2-\frac{u}{2},y^2-\frac{u}{2}$同号，则$(x^2-\frac{u}{2})(y^2-\frac{u}{2})\geqslant 0$，即

$$(x^2+u)(y^2+u)\geqslant\frac{3}{2}ux^2+\frac{3}{2}uy^2+\frac{3}{4}u^2$$

所以

$$(x^2+u)(y^2+u)(z^2+u)\geqslant(\frac{3}{2}ux^2+\frac{3}{2}uy^2+\frac{3}{4}u^2)(\frac{u}{2}+\frac{u}{2}+z^2)\geqslant$$
$$\frac{3}{4}u^2(x+y+z)^2$$

ⅱ）**证一** $\prod(x^2+u)-72\cdot(\frac{u}{2})^{\frac{5}{2}}\cdot\sum x=\frac{17}{45}u(s_2-\frac{3}{5}u)^2+\frac{u^2}{225}(s_1-\frac{15}{u}s_3)^2+\frac{116}{225}u^2(s_1^2-3s_2)+\frac{28}{45}u(s_2^2-3s_1s_3)+\frac{12}{25}u^2(s_1-3\sqrt{\frac{u}{5}})^2\geqslant 0.$

注 以上配方法各项系数均可由待定系数法求得.

证二 在$x^2-\frac{u}{5},y^2-\frac{u}{5},z^2-\frac{u}{5}$中，必有两个同号，不妨设$x^2-\frac{u}{5},y^2-\frac{u}{5}$同号，则

$$(x^2-\frac{u}{5})(y^2-\frac{u}{5})\geqslant 0$$

即

$$x^2y^2\geqslant\frac{u}{5}(x^2+y^2)-\frac{u^2}{25}$$

于是

$$(x^2+u)(y^2+u)=x^2y^2+u(x^2+y^2)+u^2\geqslant$$
$$\frac{u}{5}(x^2+y^2)-\frac{u^2}{25}+u(x^2+y^2)+u^2=$$
$$\frac{6}{5}u(x^2+y^2)+\frac{24}{25}u^2$$

因此

$$(x^2+u)(y^2+u)(z^2+u)\geqslant[\frac{6}{5}u(x^2+y^2)+\frac{24}{25}u^2](z^2+u)=$$
$$(\frac{6}{5}ux^2+\frac{6}{5}uy^2+\frac{6}{25}u^2+\frac{18}{25}u^2)(\frac{1}{5}u+\frac{1}{5}u+z^2+\frac{3}{5}u)\geqslant$$
$$[\frac{\sqrt{6}}{5}u(x+y+z)+\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{125}}u^{\frac{3}{2}}]^2$$

又

$$[\frac{\sqrt{6}}{5}u(x+y+z)+\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{125}}u^{\frac{3}{2}}]^2-72(\frac{u}{5})^{\frac{5}{2}}(x+y+z)=$$

$$[\frac{\sqrt{6}}{5}u\cdot(x+y+z)-\frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{125}}u^{\frac{3}{2}}]^2\geqslant 0$$

故式(15)成立.

以上 $s_1=x+y+z, s_2=yz+zx+xy, s_3=xyz$.

证三 若 $u=1$,则式(15)变为

$$\prod(x^2+1)\geqslant 72\cdot(\frac{1}{5})^{\frac{5}{2}}\cdot\sum x \quad (※)$$

设 $x=\tan\alpha, y=\tan\beta, z=\tan\gamma, \alpha,\beta,\gamma\in[0,\frac{\pi}{2})$,则去证

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)(1+\tan^2\gamma)}\leqslant\frac{25\sqrt{5}}{72}$$

今证此式,即

$$\begin{aligned}f(x,y,z)=&\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma}{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)(1+\tan^2\gamma)}=\\&(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma=\\&(\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\cos\alpha\cos\beta)\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=\\&[\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma]\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leqslant\\&[\sin(\alpha+\beta+\gamma)+\sin^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}]\cdot\cos^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\\&(3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}-3\sin^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3})\cdot\cos^3\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\\&3\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\cos^5\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=\\&3[\sin^2\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\cdot\cos^{10}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}]^{\frac{1}{2}}\leqslant\\&3[5^5\cdot(\frac{1}{6})^6]^{\frac{1}{2}}=\frac{25\sqrt{5}}{72}\end{aligned}$$

由此可知,当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时 $f_{\max}=\frac{25\sqrt{5}}{72}$,式(※)获证.

再由式(※)作置换:$x\to\frac{x}{\sqrt{u}}, y\to\frac{y}{\sqrt{u}}, z\to\frac{z}{\sqrt{u}}$,即得式(15).

注 1. 用类似方法可得

$$\frac{|x+y+z+w|}{(1+x^2)(1+y^2)(1+w^2)(1+z^2)}\leqslant\frac{343\sqrt{7}}{1\ 024} \quad (16)$$

当且仅当 $x = y = z = w = \frac{1}{\sqrt{7}}$ 时,式(16) 取等号.

进一步,笔者曾在《中学教研(数学)》(浙江),1992 年第 11 期的"难题征解"栏中提出以下猜想:

设 $\alpha_i \in [0, \frac{\pi}{2})(i = 1,2,\cdots,n)$,$\alpha = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i}{n}$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \tan \alpha_i\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{n} \cos^2 \alpha_i\right) \leqslant n\tan \alpha \cdot \cos^{2n} \alpha \tag{17}$$

当且仅当 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ 时,式(17) 取等号.

2. (14)、(15) 两式的更一般情况见第七章"其他不等式证明例子"中例 33 的(47)、(48) 两式.

例 8 设 $x,y,z,w \in \mathbf{R}$,记 $s_1 = x + y + z + w$,$s_2 = xy + xz + xw + yz + yw + zw$,$s_3 = yzw + xzw + xyw + xyz$,$s_4 = xyzw$,求证

i)

$$s_1^4 - 5s_1^2 s_2 + 6s_2^2 + 9s_4 \geqslant 0 \tag{18}$$

当且仅当 x,y,z,w 中有一个为零,其余 3 个都相等时,式(18) 取等号.

ii)

$$4s_1^4 - 20s_1^2 s_2 + 21s_2^2 + 9s_1 s_3 \geqslant 0 \tag{19}$$

当且仅当 x,y,z,w 中有一个为零,其余 3 个都相等时,式(19) 取等号.

证 i)

$$\begin{aligned} s_1^4 - 5s_1^2 s_2 + 6s_2^2 + 9s_4 = {} & \frac{3}{56}(-4y^2 + xz + 3xy + zw + 3yw - 2xw)^2 + \\ & \frac{1}{88}(-11xz + 7xy + 4x^2 + 9zw + 9yw - 2xw)^2 + \\ & \frac{9}{44}(-2xy + 2x^2 - zw + yw - xw)^2 + \\ & \frac{1}{4}w^2(-2w + z + y + x)^2 + \\ & \frac{1}{4}z^2(-2z + y + w + x)^2 + \\ & \frac{1}{28}(-7yz + 2y^2 + 3xz + 2xy + 3zw + 2yw - 6xw)^2 \geqslant \\ & 0 \end{aligned}$$

ii)

$$4s_1^4 - 20s_1^2 s_2 + 21s_2^2 + 9s_1 s_3 = z^2(-2z + y + w + x)^2 +$$

$\frac{1}{16}(-8yz+4y^2+3xz+xy+3zw+yw-6xw)^2+$

$\frac{3}{16}(-4y^2+xz+3xy+zw+3yw-2xw)^2+$

$\frac{1}{52}(-13xz+5xy+8x^2+9zw-9yw-4xw)^2+$

$\frac{9}{13}(-2xy+2x^2-zw+yw-xw)^2+$

$w^2(-2w+y+z+x)^2\geqslant 0$

注 1. 以上ⅰ)、ⅱ)配方式由姚勇老师借助电脑而得到，是否还有不借助电脑的其他证法？

2. 以上式(19)较式(18)强，由式(19)及 $s_2^2-3s_1s_3+12s_4\geqslant 0$，即可得到式(18).

例9 （自创题，2003.07.24）设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，$0<\lambda\leqslant 3$，则

$$\prod(3\lambda x^2+\sum yz)\geqslant(1+\lambda)^3(\sum yz)^3 \tag{20}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时，式(20)取等号.

证 记 $s_1=\sum x$，$s_2=\sum yz$，$s_3=xyz$，则

$$\prod(3\lambda x^2+\sum yz)-(1+\lambda)^3(\sum yz)^3=$$

$$(\sum yz)^3+3\lambda(\sum yz)^2\sum x^2+9\lambda^2\sum yz\cdot\sum y^2z^2+$$

$$27\lambda^3x^2y^2z^2-(1+\lambda)^3(\sum yz)^3=$$

$$s_2^3+3\lambda s_2^2(s_1^2-2s_2)+$$

$$9\lambda^2s_2(s_2^2-2s_1s_3)+27\lambda^3s_3^2-(1+\lambda)^3s_2^3=$$

$$\lambda[3(s_1s_2-3\lambda s_3)^2-(3-\lambda)^2s_2^3]\geqslant$$

$$\frac{\lambda}{3}[(3s_1s_2-9\lambda s_3)^2-(3-\lambda)^2s_1^2s_2^2]$$

因为
$$0<\lambda\leqslant 3$$
所以
$$3s_1s_2-9\lambda s_3\geqslant 0$$
所以只要证 $3s_1s_2-9\lambda s_3\geqslant(3-\lambda)s_1s_2$，即 $\lambda(s_1s_2-9s_3)\geqslant 0$，此式显然成立.

例10 （2006年中国数学冬令营试题1.福建.福州）实数 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_k=0$，求证

$$\max(a_i^2)\leqslant\frac{k}{3}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{k-1}-a_k)^2]\quad(1\leqslant i\leqslant k) \tag{21}$$

证 记 $\sum a=a_1+a_2+\cdots+a_k$，则

$$ka_1=(k-1)(a_1-a_2)+(k-2)(a_2-a_3)+(k-3)(a_3-a_4)+\cdots+$$
$$3(a_{k-3}-a_{k-2})+2(a_{k-2}-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_k)+\sum a$$
$$ka_2=a_2-a_1+(k-2)(a_2-a_3)+(k-3)(a_3-a_4)+\cdots+$$
$$3(a_{k-3}-a_{k-2})+2(a_{k-2}-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_k)+\sum a$$
$$ka_3=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+(k-3)(a_3-a_4)+(k-4)(a_4-a_5)+\cdots+$$
$$3(a_{k-3}-a_{k-2})+2(a_{k-2}-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_k)+\sum a$$
$$ka_4=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+3(a_4-a_3)+(k-4)(a_4-a_5)+\cdots+$$
$$3(a_{k-3}-a_{k-2})+2(a_{k-2}-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_k)+\sum a$$
$$\vdots$$
$$ka_k=(a_2-a_1)+2(a_3-a_2)+3(a_4-a_3)+\cdots+$$
$$(k-1)(a_k-a_{k-1})+(k-2)(a_{k-1}-a_{k-2})+(a_{k-1}-a_k)+\sum a$$

再应用柯西不等式,得

$$(ka_i)^2\leqslant[1^2+2^2+\cdots+(k-1)^2][(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{k-1}-a_k)^2]=$$
$$\frac{(k-1)k(2k-1)}{6}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{k-1}-a_k)^2]\leqslant$$
$$\frac{k^3}{3}[(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{k-1}-a_k)^2]$$

即知式(21)成立.

注 以下变换式有用处,应予以关注. 当 $i=1$ 时

$$(ka_1)^2\leqslant[(k-1)^2+(k-2)^2+\cdots+2^2+1^2]A=(\sum_{j=1}^{k-1}j^2)A$$

$i=2$ 时

$$(ka_2)^2\leqslant[1^2+2^2+\cdots+(k-2)^2+1^2]A\leqslant(\sum_{j=1}^{k-1}j^2)A$$

$i=3$ 时

$$(ka_3)^2\leqslant[1^2+2^2+\cdots+(k-3)^2+2^2+1^2]A\leqslant(\sum_{j=1}^{k-1}j^2)A$$
$$\vdots$$

这里 $A=(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\cdots+(a_{k-1}-a_k)^2$.

例 11 (自创题,1999,05,14)在 $\triangle ABC$ 中,三边长 $BC=a,CA=b,AB=c,S=\frac{1}{2}(a+b+c)$,$R$ 与 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径,则

$$\sum\cos\frac{B-C}{2}\geqslant1+\sqrt{\frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2}} \tag{22}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,式(22) 取等号.

证 由于

$$\frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2}=\frac{1}{2}(\frac{R+r}{R})^2+\frac{1}{2}(\frac{S}{R})^2-\frac{1}{2}=$$
$$\frac{1}{2}(\sum\cos A)^2+\frac{1}{2}(\sum\sin A)^2-\frac{1}{2}=$$
$$\frac{3}{2}+\sum\cos(B-C)-\frac{1}{2}=$$
$$1+\sum\cos(B-C)=$$
$$2\sum\cos^2\frac{B-C}{C}-2$$

因此

$$(\sum\cos\frac{B-C}{2}-1)^2-\frac{s^2+2Rr+r^2}{2R^2}=$$
$$(\sum\cos\frac{B-C}{2}-1)^2-(2\sum\cos^2\frac{B-C}{2}-2)=$$
$$(\sum\cos\frac{B-C}{2})^2-2\sum\cos\frac{B-C}{2}+1-2(3-\sum\sin^2\frac{B-C}{2})+2=$$
$$2\sum\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}-2\sum\cos\frac{B-C}{2}+\sum\sin^2\frac{B-C}{2}=$$
$$2\sum\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}-2\sum\cos(\frac{B-C}{2}+\frac{C-A}{2})+\sum\sin^2\frac{B-C}{2}=$$
$$2\sum\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}+\sum\sin^2\frac{B-C}{2}=$$
$$(\sum\sin\frac{B-C}{2})^2\geqslant 0$$

注 本例可参见杨学枝主编《不等式研究》(西藏人民出版社,2006 年 6 月出版) 中杨学枝、尹华焱文:"我国研究三角形半角三角函数不等式情况综述".

式(22) 是一个很强的几何不等式,由它可以推出

$$\sum\frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}\geqslant 1+\sqrt{\frac{32R^2}{s^2+2Rr+r^2}} \tag{23}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,式(23) 取等号.

利用式(22),杨学枝于 1999 年 5 月证明了由浙江张小明老师提出的猜想

$$\sum\frac{1}{\cos\frac{B-C}{2}}\geqslant\frac{37R-14r}{10R} \tag{24}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(24) 取等号.

例 12 （江西刘健提出）P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上的任何一点，点 P 到三顶点的距离分别为 R_1, R_2, R_3，到三边的距离分别为 r_1, r_2, r_3，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则

$$\sum R_1^2 \geqslant 2R\sum r_1 \tag{25}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形，且点 P 为其中心时，式(25) 取等号.

褚小光先生证明了式(25)，但文中证明较繁（可参见：《湖南理工学院学报（自然科学版）》. 2003 年 12 月（第 4 期），褚小光、肖振纲文："若干几何不等式猜想的证明"），笔者于 2004 年 3 月 16 日再给出了以下两种证法.

证一

$$4\Delta^2(\sum R_1^2 - 2R\sum r_1) = \sum[b^2c^2r_2^2 + b^2c^2r_3^2 + bcr_2r_3(-a^2+b^2+c^2)] -$$
$$abc(\sum ar_1)(\sum r_1) = \sum b^2c^2(r_2^2+r_3^2) +$$
$$\sum bcr_2r_3(b^2+c^2) - \sum a^2bc(r_3+r_1)(r_1+r_2) =$$
$$\sum b^2c^2(r_2^2+r_3^2) + 2\sum b^2c^2r_2r_3 + \sum bcr_2r_3(b-c)^2 -$$
$$\sum a^2bc(r_3+r_1)(r_1+r_2) =$$
$$\sum b^2c^2(r_2^2+r_3^2) - \sum a^2bc(r_3+r_1)(r_1+r_2) + \sum bcr_2r_3(b-c)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\sum[ca(r_3+r_1) - ab(r_1+r_2)]^2 + \sum bcr_2r_3(b-c)^2 \geqslant 0$$

证二 利用等式

$$R_1^2 = \frac{b^2c^2r_2^2 + b^2c^2r_3^2 + bcr_2r_3(-a^2+b^2+c^2)}{4\Delta^2}$$

等，则

$$\begin{aligned}4\Delta^2(\sum R_1^2 - 2R\sum r_1) = &[a(b-c)r_1 + a(br_2 - cr_3)]^2 + \\ &[b(c-a)r_2 + b(cr_3 - ar_1)]^2 + \\ &[c(a-b)r_3 + c(ar_1 - br_2)]^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

例 13 设 $a, b, c \in \overline{\mathbf{R}^-}$，$abc = 1$，求证

$$\sum \frac{1}{2+a} \geqslant \sum \frac{1}{1+b+c} \tag{26}$$

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时，式(26) 取等号.

证 记 $s_1 = \sum a, s_2 = \sum bc, s_3 = abc = 1$. 那么，式(26) 等价于

$$\frac{12 + 4\sum a + \sum bc}{9 + 4\sum a + 2\sum bc} \geqslant \frac{3 + 4\sum a + (\sum a)^2 + \sum bc}{2\sum a + (\sum a)^2 + \sum bc + \sum a\sum bc}$$

今证上式成立. 这是由于

$$(12+4\sum a+\sum bc)[2\sum a+(\sum a)^2+\sum bc+\sum a\sum bc]-$$
$$(9+4\sum a+2\sum bc)[3+4\sum a+(\sum a)^2+\sum bc]=$$
$$3s_1^2s_2+6s_1s_2+s_1s_2^2-24s_1-5s_1^2-3s_2-s_2^2-27=$$
$$\frac{1}{3}(s_1^2-3s_2)s_2+\frac{1}{3}s_2(s_2^2-9)+6s_1(s_2-3)+\frac{5}{3}s_1^2(s_2-3)+$$
$$\frac{2}{3}s_1(s_1s_2-9)+(s_1s_2^2-27)\geqslant 0$$

注　在同例 13 条件下,有$\sum \frac{1}{2+a}\leqslant 1$,此式易证.

例 14　(自创题,1988,08,22) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个非负实数,我们把从 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数中,每次不重复地取出 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个数的乘积之和记为 s_k,则称 $s_1,s_2,\cdots,s_k$ 为这 n 个数的初等对称式. 对此,有

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2s_1^{n-k}s_k=s_1^n-2^2s_1^{n-2}s_2+3^2s_1^{n-3}s_3-4^2s_1^{n-4}s_4+\cdots+(-1)^{n-1}n^2s_n\geqslant 0 \tag{27}$$

当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中所有非零的数都相等时,式(27) 取等号.

证　首先证明:若 $x_k>0(k=1,2,\cdots,n)$,且$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}=1$,则

$$\sum_{k=1}^{n}x_k\geqslant 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j \tag{※}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n-1}(n\geqslant 2)$ 时,上式取等号.

由柯西不等式,有

$$(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k})[\sum_{k=1}^{n}x_k(1+x_k)]\geqslant(\sum_{k=1}^{n}x_k)^2$$

因此,$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k(1+x_k)\geqslant(\sum\limits_{k=1}^{n}x_k)^2$,整理即得式(※).

今证式(27). 在式(※) 中,令$\frac{x_k}{1+x_k}=\frac{a_k}{s_1}$,则$x_k=\frac{a_k}{s_1-a_k}(k=1,2,\cdots,n)$,

由于$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_k}{1+x_k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_1}=1$,故由式(※) 知

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{s_1-a_k}\geqslant 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=k+1}^{n}(\frac{a_k}{s_1-a_k}\cdot\frac{a_i}{s_1-a_i})$$

即

$$a_1(s_1-a_2)(s_1-a_3)\cdots(s_1-a_n)+a_2(s_1-a_1)(s_1-a_3)\cdots(s_1-a_n)+\cdots+$$
$$a_n(s_1-a_1)(s_1-a_2)\cdots(s_1-a_{n-1})\geqslant$$

$2[a_1a_2(s_1-a_3)(s_1-a_4)\cdots(s_1-a_n)+a_1a_3(s_1-a_2)(s_1-a_4)\cdots(s_1-a_n)+\cdots+$
$a_{n-1}a_n(s_1-a_1)(s_1-a_2)\cdots(s_1-a_{n-2})]$
将上式两边展开,并整理,即得式(27).

注 1. 式(27)可参见《不等式. 理论. 方法》一书(王向东、苏化明、王方汉编著,河南教育出版社,1994年5月出版),P520 ~ 522:"十四、杨学枝不等式".或见《中学数学》(湖北),1989年第2期,杨学枝文:"一个初等对称式不等式".

2. 特别当 $n=3$ 时,有

$$s_1^3-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$$

即为 Schur 不等式: $\sum a(a-b)(a-c)\geqslant 0$.

3. 由以上证明,笔者提出以下猜想:

设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,又记 $x_i=\dfrac{a_i}{A-a_i}$,$i=1,2,\cdots,n$. $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称式,猜想有

$$\frac{(n-1)s_1}{C_n^1}\geqslant\frac{(n-1)^2s_2}{C_n^2}\geqslant\frac{(n-1)^3s_3}{C_n^3}\geqslant\cdots\geqslant\frac{(n-1)^nS_n}{C_n^n}$$

例 15 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $bc+ca+ab=\dfrac{1}{3}$,求证

$$\frac{1}{a^2-bc+1}+\frac{1}{b^2-ca+1}+\frac{1}{c^2-ab+1}\leqslant 3 \tag{28}$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时,式(28)取等号.

证一

$$\frac{1}{a^2-bc+1}=\frac{3\sum bc}{a^2-bc+3\sum bc}=\frac{3\sum bc}{a\sum a+2\sum bc}=$$
$$\frac{3}{2}-\frac{3a\sum a}{2(a\sum a+2\sum bc)}$$

类似还有二式,因此

$$3-\sum\frac{1}{a^2-bc+1}=\frac{3}{2}\sum\frac{a\sum a}{a\sum a+2\sum bc}-\frac{3}{2}=$$
$$\frac{3}{2}\sum\frac{a^2\sum a}{a^2\sum a+2a\sum bc}-\frac{3}{2}\geqslant$$
$$\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sum a)^3}{\sum a\cdot\sum a^2+2\sum a\cdot\sum bc}-\frac{3}{2}$$

应用柯西不等式,上式得

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{(\sum a)^3}{(\sum a)^3}-\frac{3}{2}=0$$

证二 用齐次化方法证之.

易知式(28)左边各项分母均大于零,经去分母后并整理,可得到与式(28)等价的以下式子

$$\sum a^2-\sum bc+2\sum b^2c^2+2\sum a^4-2\sum a\cdot\sum a^3+$$
$$2abc\sum a+3abc\sum a^3-3\sum b^3c^3\geqslant 0$$

用 $\sum a^3=s_1^3-3s_1s_2+3s_3$, $\sum b^3c^3=s_2^3-3s_1s_2s_3+3s_3^2$, $\sum a^4=s_1^4+2s_2^2-4s_1^2s_2+4s_1s_3$ 代入上式,并注意到 $3\sum bc=1$,将之齐次化,得到

$$s_1^2s_2^2+s_1^3s_3-4s_2^3\geqslant 0 \tag{※}$$

因此,要证式(28),只要证式(※)成立.但

$$s_1^2s_2^2+s_1^3s_3-4s_2^3\geqslant s_1^2s_2^2+3s_1s_2s_3-4s_2^3=$$
$$s_2(s_1^2s_2+3s_1s_3-4s_2^2)=$$
$$s_2\sum yz(y-z)^2\geqslant 0$$

故式(※)成立.

例 16 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{x}{1+x+xy}+\frac{y}{1+y+yz}+\frac{z}{1+z+zx}\leqslant 1 \tag{29}$$

当且仅当 $xyz=1$ 时,式(29)取等号.

证 式(29)$\Leftrightarrow\frac{x}{1+x+xy}+\frac{y}{1+y+yz}\leqslant\frac{1+zx}{1+z+zx}\Leftrightarrow$

$$x(1+y+yz)(1+z+zx)+y(1+x+xy)(1+z+zx)\leqslant$$
$$(1+zx)(1+x+xy)(1+y+yz)\Leftrightarrow$$
$$(xyz-1)^2\geqslant 0$$

注 式(29)见《中等数学》,1995年第6期,训练题17.

例 17 (改编题,1999.02.18)设 $x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$,且 $xyzw\geqslant 1$,则

$$\frac{x}{1+x+xy+xyz}+\frac{y}{1+y+yz+yzw}+\frac{z}{1+z+zx+zwx}+$$
$$\frac{w}{1+w+wx+wxy}\leqslant 1 \tag{30}$$

当且仅当 $xyzw=1$ 时,式(30)取等号.

证

$$1-\frac{x}{1+x+xy+xyz}-\frac{y}{1+y+yz+yzw}-\frac{z}{1+z+zw+zwx}-\frac{w}{1+w+wx+wxy}=$$

$$1-\frac{x}{1+x+xy+xyz}-\frac{xy}{1+x+xy+xyz}-\frac{xyz}{1+x+xy+xyz}-\frac{1}{1+x+xy+xyz}+$$

$$\left(\frac{xy}{1+x+xy+xyz}-\frac{y}{1+y+yz+yzw}\right)+\left(\frac{xyz}{1+x+xy+xyz}-\frac{z}{1+z+zw+zwx}\right)+$$

$$\left(\frac{1}{1+x+xy+xyz}-\frac{w}{1+w+wx+wxy}\right)=$$

$$\frac{y(xyzw-1)}{(1-x+xy+xyz)(1+y+yz+yzw)}+\frac{z(1+x)(xyzw-1)}{(1+x+xy+xyz)(1+z+zw+zwx)}-$$

$$\frac{xyzw-1}{(1+x+xy+xyz)(1+w+wx+wxy)}=$$

$$\frac{xyzw-1}{1+x+xy+xyz}\left[\frac{y}{1+y+yz+yzw}+\frac{z(1+x)}{1+z+zw+zwx}-\frac{1}{1+w+wx+wxy}\right]=$$

$$\frac{xyzw-1}{1+x+xy+xyz}\left[\frac{y}{1+y+yz+yzw}+\frac{zx}{1+z+zw+zwx}+\right.$$

$$\left.\frac{xyzw-1}{(1+z+zw+zwx)(1+w+wx+wxy)}\right]\geqslant 0$$

例 18 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在区间 $[0,1]$ 上其值的绝对值不超过 1，求 $|a|+|b|+|c|$ 的最大值.

解 由

$$\begin{cases} f(0)=c \\ f(1)=a+b+c \\ f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a=2f(0)-4f(\frac{1}{2})+2f(1) \\ b=-3f(0)+4f(\frac{1}{2})-f(1) \\ c=f(0) \end{cases}$$

所以

$$|a|+|b|+|c|=|2f(0)-4f(\tfrac{1}{2})+2f(1)|+|-3f(0)+$$

$$4f(\tfrac{1}{2})-f(1)|+|f(0)|\leqslant 2|f(0)|+4|-f(\tfrac{1}{2})|+$$

$$2|f(1)|+3|f(0)|+4|-f(\tfrac{1}{2})|+|f(1)|+|f(0)|=$$

$$6|f(0)|+8|-f(\frac{1}{2})|+3|f(1)|\leqslant$$

17

当且仅当$\begin{cases}f(0)=1\\f(\frac{1}{2})=-1\\f(1)=1\end{cases}$，即$\begin{cases}a=8\\b=-8\\c=1\end{cases}$或$\begin{cases}f(0)=-1\\f(\frac{1}{2})=1\\f(1)=-1\end{cases}$，即$\begin{cases}a=-8\\b=8\\c=-1\end{cases}$时取等号. 这时二次函数为$f(x)=8x^2-8x+1$或$f(x)=-8x^2+8x-1$. 若令$x=\cos^2x$，则此时有$|5(x)|=|\cos 4\alpha|\leqslant 1$.

注 例18可推广：设三次函数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$在区间$[0,1]$上，其值的绝对值均不大于1，求$|a|+|b|+|c|+|d|$的最大值.

解：可得最大值99. $a=\frac{1}{3}[-16f(0)+32f(\frac{1}{4})-32f(\frac{3}{4})+16f(1)]$，$b=\frac{1}{3}[32f(0)-56f(\frac{1}{4})+40f(\frac{3}{4})-16f(1)]$，$c=\frac{1}{3}[-19f(0)+24f(\frac{1}{4})-8f(\frac{3}{4})+3f(1)]$，$d=f(0)$；$f(0)=-1$，$f(\frac{1}{4})=1$，$f(\frac{3}{4})=-1$，$f(1)=1$；或$f(0)=1$，$f(\frac{1}{4})=-1$，$f(\frac{3}{4})=1$，$f(1)=-1$，三次函数为$f(x)=32x^3-48x^2+18x-1$或$f(x)=-32x^3+48x^2-18x+1$.

更一般地，设n次函数$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，在区间$[0,1]$上均有$|f(x)|\leqslant 1$，则当

$$f(\cos^2\frac{n\pi}{2n})=-1, f(\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n})=1$$

$$f(\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n})=-1,\cdots,f(\cos^2 0)=(-1)^{n+1}$$

或当

$$f(\cos^2\frac{n\pi}{2n})=1, f(\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n})=-1$$

$$f(\cos^2\frac{(n-2)\pi}{2n})=1,\cdots f(\cos^2 0)=(-1)^{n}$$

时，$\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|$有最大值.

例 19 （自创题，2007.01.21）设$a,b,c,k\in\mathbf{R}$，则

$$(k^2+a^2)(k^2+b^2)(k^2+c^2)\geqslant 2k^3(a^2b+b^2c+c^2a+abc)\qquad(31)$$

当且仅当$k=a=b=c$或$k=0,abc=0$时，式(31)取等号.

证 原式左边－右边$=(k^3-abc)^2+k^2a^2(k-b)^2+k^2b^2(k-c)^2+k^2c^2(k-a)^2\geqslant 0$.

例 20 （自创题,2007.09.13）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=2$,n 为不小于 2 的正整数,则

$$\sum\frac{1}{1+a^n}\geqslant 2 \tag{32}$$

当且仅当 a,b,c 中有一个为零,其余两个均等于 1 时,式(32) 取等号.

证 原式经去分母整理后,即为

$$\sum b^nc^n+2(abc)^n\leqslant 1 \quad ①$$

由 $a+b+c=2$,易知有 $bc\leqslant 1,ca\leqslant 1,ab\leqslant 1$,因此得到

$$\sum b^nc^n+2(abc)^n\leqslant\sum b^{n-1}c^{n-1}+2a^{n-1}b^{n-1}c^{n-1}$$

于是只需证

$$\sum b^2c^2+2(abc)^2\leqslant 1 \quad ②$$

不妨设 $c=\min\{a,b,c\}$,则 $c\leqslant\frac{2}{3}$,于是由式②右边 - 左边,有

$$1-\sum b^2c^2-2(abc)^2=1-(ab)^2-c^2(a^2+b^2)-2(abc)^2=$$
$$1-(ab)^2-c^2(a+b)^2+2abc^2(1-ab)\geqslant$$
$$1-(ab)^2-c^2(a+b)^2\geqslant$$
$$\left(\text{注意到 }1-ab\geqslant 1-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant 1-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2=0\right)$$
$$1-\frac{1}{16}(a+b)^4-c^2(a+b)^2=$$
$$\frac{1}{16}[16-(2-c)^4-16c^2(2-c)^2]=$$
$$\frac{c}{16}(32-88c+72c^2-17c^3)=$$
$$\frac{c}{8}(2-3c)(4-3c)(2-c)+\frac{1}{16}c^4\geqslant 0$$

（注意到 $2\geqslant 3c$）由此可知式②成立,因此式①成立,故式(32) 获证,并由证明过程易得式(32) 取等号条件.

例 21 （来自"数学驿站论坛 —— 南方学科网论坛"中"不等式"专版,2006 年 12 月 23 日,hangjingjun 提出）设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum yz=1$,则

$$\sum\left(x^2+\frac{4}{1+x^2}\right)\geqslant 10 \tag{33}$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,或 x,y,z 中有一个为零,其余两个都等于 1 时,式(33) 取等号.

证　将式(33)齐次化得与之等价式

$$\sum x^2+\frac{8\sum x\cdot(\sum yz)^2}{\prod(y+z)}-10\sum yz\geqslant 0$$

记 $s_1=\sum x,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,则上式经去分母化简可得

$$s_1^3s_2-4s_1s_2^2-s_1^2s_3+12s_2s_3\geqslant 0 \tag{①}$$

式①左边 $=s_2(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)-s_3(s_1^2-3s_2)=$

$$s_2\cdot\frac{1}{2}\sum(-x+y+z)(y-z)^2-\frac{1}{2}xyz\sum(y-z)^2=$$

$$\frac{1}{2}\sum[(-x+y+z)\cdot\sum yz-xyz](y-z)^2$$

因此,要证式(33),只需证

$$\sum[(-x+y+z)\cdot\sum yz-xyz](y-z)^2\geqslant 0 \tag{※}$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则式(※)左边二三项均不小于零,因此

$\sum[(-x+y+z)\cdot\sum yz-xyz](y-z)^2\geqslant$

$[(-x+y+z)\cdot\sum yz-xyz](y-z)^2+[(x-y+z)\cdot\sum yz-xyz](x-z)^2\geqslant$

$[(-x+y+z)\cdot\sum yz-xyz+(x-y+z)\cdot\sum yz-xyz](y-z)^2=$

$(2z\cdot\sum yz-2xyz)(y-z)^2=$

$2z^2(x+y)(y-z)^2\geqslant 0$

故式(33)成立,当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,式(33)取等号.

例22　设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $x=a+\frac{1}{b}-1,y=b+\frac{1}{c}-1,z=c+\frac{1}{a}-1$,则

$$xy+yz+zx\geqslant 3 \tag{34}$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(34)取等号.

证　由于

$$xy+yz+zx-3=(a+\frac{1}{b}-1)(b+\frac{1}{c}-1)+(b+\frac{1}{c}-1)(c+\frac{1}{a}-1)+$$

$$(c+\frac{1}{a}-1)(a+\frac{1}{b}-1)-3=$$

$$\frac{1}{abc}[a(ab-b+1)(bc-c+1)+$$

$$b(bc-c+1)(ca-a+1)+$$

$$c(ca-a+1)(ab-b+1)-3abc]$$

因此,只要证

$$\sum a(ab-b+1)(bc-c+1)-3abc\geqslant 0 \quad ①$$

今证式①成立.由于在 $1-bc,1-ca,1-ab$ 三式中,必有两式同时不大于零,或同时不小于零,不妨设这两式为 $1-ca,1-ab$,则 $(1-ca)(1-ab)\geqslant 0$,于是

$$\begin{aligned}式①左边 = &(1-2c+c^2+bc)ba^2+[1-2c+c^2-2b+3bc-\\&2bc(b+c)+(bc)^2]a+b+c(1-b)^2=\\&ba^2(1-c)^2+c(1-b)^2+a(1-b)^2(1-c)^2+\\&b(1-ca)(1-ab)\geqslant 0\end{aligned}$$

即式①成立,原式获证.

注 1.本题见第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter8 题13.

2.设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+,k\leqslant 1$,则

$$\sum\left(a+\frac{1}{b}-k\right)\left(b+\frac{1}{c}-k\right)\geqslant 3(2-k)^2 \quad (35)$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(35)取等号.

式(35)经变换整理即为

$$a^2b+b^2c+c^2a+\sum bc+\sum\frac{1}{bc}\geqslant 2k\left(\sum a+\frac{1}{\sum a}-6\right)+9$$

由此可知,要证式(35),只要证 $k=1$ 时的情况,这时便是式(34).

3.更一般地有以下命题.

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+,m\in\mathbf{R}^+,n\in\mathbf{R}$,且 $m\geqslant n$,则

$$\sum\left(a+\frac{m^2}{b}-n\right)\left(b+\frac{m^2}{c}-n\right)\geqslant 3(2m-n)^2 \quad (36)$$

当且仅当 $a=b=c=m$ 时,式(36)取等号.

只要在式(35)中作置换:$a\to\frac{a}{m},b\to\frac{b}{m},c\to\frac{c}{m}$,取 $mk=n$,即得式(36).

例23 a,b,c 和 x,y,z 为非负实数,且 $x+y+z=a+b+c$,则

$$ax^2+by^2+cz^2+xyz\geqslant 4abc \quad (37)$$

当且仅当 $x=-a+b+c,y=a-b+c,z=a+b-c$ 时,式(37)取等号.

证 由 $a+b+c=x+y+z$ 知,$b+c\geqslant x,a+c\geqslant y,a+b\geqslant z$ 中总有一式成立.不妨设 $a+c\geqslant y$,若 $y=a+c$,则 $b=x+z$,于是

$$\begin{aligned}&ax^2+by^2+cz^2+xyz-4abc=\\&ax^2+(a+c)^2(x+z)+cz^2+\\&(a+c)xz-4ac(x+z)=\\&ax^2+(a+c)xz+x(a-c)^2+\end{aligned}$$

$$z(a-c)^2 \geqslant 0$$

若 $$a+c>y$$

因为 $$a+b+c=x+y+z$$

所以

$$ax^2+by^2+cz^2+xyz-4abc=$$
$$ax^2+by^2+c(a+b+c-x-y)^2+$$
$$xy(a+b+c-x-y)-4abc=$$
$$(a+c-y)x^2-$$
$$[2c(a+b+c-y)-y(a+b+c-y)]x+$$
$$by^2+c(a+b+c-y)^2-4abc$$

记

$$f(x)=(a+c-y)x^2-[2c(a+b+c-y)-y(a+b+c-y)]x+$$
$$by^2+c(a+b+c-y)^2-4abc$$

则

$$\Delta=[2c(a+b+c-y)-y(a+b+c-y)]^2-4(a+c-y)$$
$$[by^2+c(a+b+c-y)^2-4abc]=$$
$$y^4-2(a-b+c)y^3+$$
$$(a^2+b^2+c^2-2bc-2ca-2ab)y^2+$$
$$8ac(a-b+c)y-4ac(a+b-c)^2=$$
$$y^4-2(a-b+c)y^3+(a-b+c)^2y^2-4acy^2+$$
$$8ac(a-b+c)y-4ac(a-b+c)^2=$$
$$y^2[y-(a-b+c)]^2-4ac[y-(a-b+c)]^2=$$
$$(y^2-4ac)(y-a+b-c)^2$$

若 $y^2-4ac\leqslant 0$，因为 $a+c>y$，则 $\Delta\leqslant 0$，故 $f(x)\geqslant 0$，式(37)成立.

若 $y^2-4ac>0$，则

$$ax^2+by^2+cz^2+xyz-4abc=ax^2+cz^2+xyz+b(y^2-4ac)>0$$

即式(37)也成立.

综上，式(37)获证. 由上证明可得到，当且仅当 $x=-a+b+c, y=a-b+c, z=a+b-c$ 时原式取等号.

注 本题见第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter8 题16.

例 24 (自创题，2006.12.17) 设 $a,b,c,d\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且 $ac=1$，则

$$\frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{c}{c+cd+1}+\frac{d}{d+da+1}\leqslant\frac{4}{3} \qquad (38)$$

当且仅当 $a=b=c=d=1$ 时,式(38) 取等号.

证 先证以下恒等式

$$\frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{c}{c+ca+1}=$$
$$1-\frac{(1-abc)^2}{(a+ab+1)(b+bc+1)(c+ca+1)}$$

这是由于

$$\text{上式左边}=\frac{a}{a+ab+1}+\frac{ab}{a+ab+1}+\frac{1}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}-$$
$$\frac{ab}{a+ab+1}+\frac{c}{c+ca+1}-\frac{1}{a+ab+1}=$$
$$1+\frac{b(1-abc)}{(b+bc+1)(a+ab+1)}-\frac{1-abc}{(c+ca+1)(a+ab+1)}=$$
$$1-\frac{1-abc}{a+ab+1}\left(\frac{1}{c+ca+1}-\frac{b}{b+bc+1}\right)=$$
$$1-\frac{(1-abc)^2}{(a+ab+1)(b+bc+1)(c+ca+1)}$$

于是

$$\text{式(38) 左边}=\left(\frac{a}{a+ab+1}+\frac{b}{b+bc+1}+\frac{c}{c+ca+1}\right)+$$
$$\left(\frac{c}{c+cd+1}+\frac{d}{d+da+1}+\frac{a}{a+ac+1}\right)-$$
$$\left(\frac{c}{c+ac+1}+\frac{a}{a+ac+1}\right)=$$
$$2-\frac{(1-abc)^2}{(a+ab+1)(b+bc+1)(c+ca+1)}-$$
$$\frac{(1-cda)^2}{(c+cd+1)(d+da+1)(a+ac+1)}-$$
$$\left[1-\frac{1+ac+(ac)^2}{(a+ac+1)(c+ac+1)}\right]=$$
$$1-\frac{(1-b)^2}{(a+ab+1)(b+bc+1)(2+c)}-$$
$$\frac{(1-d)^2}{(c+cd+1)(d+da+1)(2+a)}+$$
$$\frac{3}{(2+a)(2+c)}\leqslant 1+\frac{3}{(2+a)(2+c)}\leqslant$$
$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

故式(38) 成立,当且仅当 $a=b=c=d=1$ 时,式(38) 取等号.

例 25 设 $a,b,c,d \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$(\sum a)^3 \geqslant 4[a(c+d)^2 + b(d+a)^2 + c(a+b)^2 + d(b+c)^2] \quad (39)$$

当且仅当 $a = c, b = d$ 时,式(39) 取等号.

证

$$\begin{aligned} \text{式(39) 右边} &= 4(a+c)(a+d)(b+c) + 4(b+d)(a+b)(c+d) \leqslant \\ &(a+c) \cdot (\sum a)^2 + (b+d) \cdot (\sum a)^2 = \\ &(\sum a)^3 \end{aligned}$$

即得式(39). 从证明过程易知其取等号条件.

例 26 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$,则

$$\frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} + \frac{b\sqrt{b^2+3ca}}{c+a} + \frac{c\sqrt{c^2+3ab}}{a+b} \geqslant a+b+c \quad (40)$$

证 因为

$$\begin{aligned} \frac{a\sqrt{a^2+3bc}}{b+c} - a &= \frac{a(a^2+3bc)}{\sqrt{(b+c)^2(a^2+3bc)}} - a \geqslant \\ &\frac{2a(a^2+3bc)}{(b+c)^2+(a^2+3bc)} - a = \\ &\frac{a^3+abc-a(b^2+c^2)}{(a^2+b^2+c^2)+5bc} \end{aligned}$$

另外还有两式. 记 $s = a^2+b^2+c^2$,于是,只要证

$$AX + BY + CZ \geqslant 0 \quad ①$$

其中

$$A = \frac{1}{s+5bc},\ B = \frac{1}{s+5ca},\ C = \frac{1}{s+5ab}$$

$$X = a^3 + abc - a(b^2+c^2)$$

$$Y = b^3 + abc - b(c^2+a^2)$$

$$Z = c^3 + abc - c(a^2+b^2)$$

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则易知这时有 $A \geqslant B \geqslant C$,且

$$X = a(a^2-b^2) + a(b-c) \geqslant 0$$

$$Z = c(c^2-b^2) + ac(b-a) \leqslant 0$$

$$X+Y+Z = \sum a^3 + 3abc - \sum a(b^2+c^2) \geqslant 0$$

于是

$$AX+BY+CZ \geqslant BX+BY+BZ = B(X+Y+Z) \geqslant 0$$

即式 ① 成立,从而式(40) 成立.

增量比较法证明不等式

第二章

对于齐次不等式，如$f(x,y,z,w)\geqslant 0$，是关于x,y,z,w的齐次对称式不等式，则可设$x\geqslant y\geqslant z\geqslant w$，令$z=\omega+\alpha$，$y=\omega+\alpha+\beta$，$x=\omega+\alpha+\beta+\gamma$，其中$\alpha,\beta,\gamma\in\overline{\mathbf{R}^{-}}$，于是只须证

$$f(\omega+\alpha+\beta+\gamma,\omega+\alpha+\beta,\omega+\alpha,\omega)\geqslant 0$$

从理论上讲，对于大量的此类不等式，用上述增量比较法均可证明. 只是元素增多或次数增大时，计算量较大，但可借助计算机解决，其中还涉及非负量不等式的证明问题.

对于三元的齐次不等式$f(x,y,z)\geqslant 0$，也可转化为

$$f(x,y,z)=f_1(x,y,z)\cdot\frac{(y-z)^2}{g_1(x,y,z)}+f_2(x,y,z)\cdot\frac{(x-z)^2}{g_2(x,y,z)}+f_3(x,y,z)\cdot\frac{(x-y)^2}{g_3(x,y,z)}$$

并设$x\geqslant y\geqslant z$，使$\frac{(y-z)^2}{g_1(x,y,z)}$，$\frac{(x-y)^2}{g_3(x,y,z)}$中至少一个非负，且$\frac{f_2(x,y,z)}{g_2(x,y,z)}\geqslant 0$，则进一步去证$\frac{f_1(x,y,z)}{g_1(x,y,z)}+\frac{f_2(x,y,z)}{g_2(x,y,z)}\geqslant 0$，

$\frac{f_3(x,y,z)}{g_3(x,y,z)}+\frac{f_2(x,y,z)}{g_2(x,y,z)}\geqslant 0$；或者 $\frac{f_1(x,y,z)}{g_1(x,y,z)}\geqslant 0$，且 $f_2(x,y,z)\geqslant 0$，$\frac{(x-z)^2}{g_2(x,y,z)}\geqslant\frac{(x-y)^2}{g_3(x,y,z)}$，$f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z)\geqslant 0$；或者 $\frac{f_3(x,y,z)}{g_3(x,y,z)}\geqslant 0$，且 $f_2(x,y,z)\geqslant 0$，$\frac{(x-z)^2}{g_2(x,y,z)}\geqslant\frac{(y-z)^2}{g_1(x,y,z)}$，$f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\geqslant 0$，等.

若 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边长，设 $a\geqslant b\geqslant c$，$b=c+\alpha$，$a=c+\alpha+\beta$，$\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$ 则由 $b+c\geqslant a$ 得 $c\geqslant\beta$，即设

$$\begin{cases}b=c+\alpha\\a=c+\alpha+\beta\\c\geqslant\beta\end{cases}$$

代人齐次不等式证之.

若 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形，由 $b^2+c^2\geqslant a^2$ 得 $c\geqslant\sqrt{2(\alpha\beta+\beta^2)}+\beta$. 可设

$$\begin{cases}b=c+\alpha\\a=c\alpha+\beta\\c\geqslant\sqrt{2(\alpha\beta+\beta^2)}+\beta\end{cases}$$

代人齐次式证之.

对于非齐次式不等式，可经过某些式子的大小比较，然后再仿上证之（可见后面例子）.

还有一种变换方法，可参阅杨学枝文："证明不等式的一种的方法"（刊于《数学通报》1998 年第 3 期）.

例 1 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且 $\sum a^2=1$，求证

$$\sum\frac{1}{1-bc}\leqslant\frac{9}{2}\tag{1}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，式(1) 取等号.

证一

$$\frac{9}{2}-\sum\frac{1}{1-bc}=\frac{3-5\sum bc+7abc\sum a-9(abc)^2}{2[1-\sum bc+abc\sum a-(abc)^2]}=$$

$$\frac{3-5\sum bc+6abc\sum a+(abc\sum a\cdot\sum a^2-9a^2b^2c^2)}{2[1-\sum bc+abc\sum a-(abc)^2]}\geqslant$$

$$\frac{3-5\sum bc+6abc\sum a}{2[1-\sum bc+abc\sum a-(abc)^2]}$$

由此知,只需证

$$3-5\sum bc+6abc\sum a\geqslant 0 \qquad ①$$

但

$$3-5\sum bc+6abc\sum a=3(\sum a^2)^2-5\sum a^2\sum bc+6abc\sum a=$$

$$3\sum a^2(\sum a^2-\sum bc)-2(\sum a^2\sum bc-3abc\sum a)=$$

$$\frac{3}{2}\sum a^2\cdot\sum(b-c)^2-2[\sum a^2(b-c)^2+\sum bc(b-c)^2]=$$

$$\frac{1}{2}\sum(-a^2+3b^2+3c^2-4bc)(b-c)^2$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$(-b^2+3c^2+3a^2-4ca)(a-c)^2\geqslant(-b^2+3c^2+3a^2-4ca)(b-c)^2$$

$$(-c^2+3a^2+3b^2-4ab)(a-b)^2\geqslant 0$$

所以

$$\sum(-a^2+3b^2+3c^2-4bc)(b-c)^2\geqslant$$

$$[(-a^2+3b^2+3c^2-4bc)+(-b^2+3c^2+3a^2-4ca)](b-c)^2=$$

$$(2a^2+2b^2+6c^2-4bc-4ca)(b-c)^2=$$

$$[2(b-c)^2+2(c-a)^2+2c^2](b-c)^2\geqslant 0$$

故式 ① 成立. 原式获证.

证二 记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc$,则证一中式 ① 可化为齐次式

$$3s_1^4-17s_1^2+22s_2^2+6s_1s_3\geqslant 0 \qquad ②$$

于是,要证式(1) 成立,只要证式 ② 成立. 又由于 $s_3\geqslant\frac{-s_1^3+4s_1s_2}{9}$(见第一章"等价变换法证明不等式"中例 14),这时

$$3s_1^4-17s_1^2+22s_2^2+6s_1s_3\geqslant 3s_1^4-17s_1^2+22s_2^2+6s_1\cdot\frac{-s_1^3+4s_1s_2}{9}=$$

$$\frac{1}{3}(7s_1^4-43s_1^2s_2+66s_2^2)=$$

$$\frac{1}{3}(s_1^2-3)(7s_1^2-22)\geqslant 0$$

(注意到 $s_1^2\leqslant 3\sum a^2$) 式 ② 获证,故式(1) 成立.

例 2 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum bc=1$,求证

$$\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}+\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}\geqslant\frac{5}{2} \qquad (2)$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，式(2) 取等号.

证

$$\sum\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}-\frac{5}{2}=\sum\frac{(1+b^2)(1+c^2)+2bc}{(b+c)^2}-\frac{11}{2}=$$

$$\sum\frac{(b+c)^2(a+b)(a+c)+2bc}{(b+c)^2}-\frac{11}{2}=$$

$$\frac{1}{2}\sum(b-c)^2-\frac{1}{2}(\sum bc)\cdot\sum(\frac{b-c}{b+c})^2=$$

$$\frac{1}{2}\sum[(b+c)^2-a(b+c)-bc](\frac{b-c}{b+c})^2$$

由此可知，只需证

$$\sum[(b+c)^2-a(b+c)-bc](\frac{b-c}{b+c})^2\geqslant 0$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则易证有

$$(\frac{a-c}{a+b})^2\geqslant(\frac{a-b}{a+b})^2,\ (\frac{a-c}{a+c})^2\geqslant(\frac{b-c}{b+c})^2$$

且

$$(a+c)^2-b(a+c)-ac=(a^2-ab)+(ac-bc)+c^2\geqslant 0$$

$$(a+b)^2-c(a+b)-ab=a^2+b^2+ab-ac-bc\geqslant 0$$

因此，有

$$\sum[(b+c)^2-a(b+c)-bc](\frac{b-c}{b+c})^2\geqslant$$

$$[(b+c)^2-a(b+c)-bc+(a+c)^2-b(a+c)-ac](\frac{b-c}{b+c})^2=$$

$$[(a-b)^2+2c^2](\frac{b-c}{b+c})^2\geqslant 0$$

故原式成立.

例 3 (自创题，2004.08.23) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且 $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$，则

$$x+y+z\geqslant y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2 \tag{3}$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时，式(3) 取等号.

证一　齐次化证法.

由 $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$ 知，要证式(3)，只需证

$$\sum x\cdot\frac{\sum x^2}{3}\cdot\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}}\geqslant\sum y^2z^2 \tag{※}$$

由于

$$\sum x\cdot\frac{\sum x^2}{3}\cdot\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}}-\sum y^2z^2=$$

$$\left[\frac{1}{3}(\sum x^2)^2-\sum y^2z^2\right]-\frac{1}{3}\left[(\sum x^2)^2-\sum x\cdot\sum x^2\cdot\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}}\right]=$$

$$\frac{1}{6}\sum(y^2-z^2)^2-\frac{\sum x^2}{3}\cdot\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}}\left(\sqrt{3\sum x^2}-\sum x\right)=$$

$$\frac{1}{6}\sum(y+z)^2(y-z)^2-\frac{\frac{\sum x^2}{3}\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}}}{\sqrt{3\sum x^2}+\sum x}\cdot\sum(y-z)^2\geqslant$$

$$\frac{1}{6}\sum(y+z)^2(y-z)^2-\frac{\frac{\sum x^2}{3}\sqrt{\frac{\sum x^2}{3}}}{\sqrt{3\sum x^2}+\sqrt{\sum x^2}}\cdot\sum(y-z)^2=$$

$$\frac{1}{6}\sum(y+z)^2(y-z)^2-\frac{\sum x^2}{3\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}\cdot\sum(y-z)^2\geqslant$$

$$\frac{1}{6}\sum(y+z)^2(y-z)^2-\frac{1}{12}\sum x^2\cdot\sum(y-z)^2=$$

$$\frac{1}{12}\sum\left[2(y+z)^2-\sum x^2\right](y-z)^2\geqslant$$

$$\frac{1}{12}\sum(y^2+z^2-x^2)(y-z)^2$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则

$$(x^2+z^2-y^2)(x-z)^2\geqslant(x^2+z^2-y^2)(y-z)^2$$
$$(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2\geqslant 0$$

因此

$$\frac{1}{12}\sum(y^2+z^2-x^2)(y-z)^2\geqslant$$

$$\frac{1}{12}\left[(y^2+z^2-x^2)(y-z)^2+(x^2+z^2-y^2)(y-z)^2\right]=$$

$$\frac{1}{6}z^2(y-z)^2\geqslant 0$$

证二 因为

$$2\sum x+\sum x^4=\sum(x+x+x^4)\geqslant 3\sum x^2\geqslant(\sum x^2)^2$$

所以

$$\sum x\geqslant\sum y^2z^2$$

例4 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\sum\frac{yz}{x(y+z)^2}\geqslant\frac{9}{4\cdot\sum x}\tag{4}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,式(4)取等号.

证

$$4\sum x\cdot\sum\frac{yz}{x(y+z)^2}-9=(4\sum\frac{yz}{(y+z)^2}-3)+(4\sum\frac{yz}{x(y+z)}-6)=$$

$$2\sum\frac{x^2(y-z)^2}{yz(x+y)(x+z)}-\sum(\frac{y-z}{y+z})^2=$$

$$\frac{1}{\prod(y+z)}\cdot\sum\frac{3x^2yz+2x^2y^2+2x^2z^2-xy^2z-xyz^2-y^2z^2}{yz(y+z)}(y-z)^2$$

由对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,易证

$$\frac{(x-z)^2}{xz(x+z)}\geqslant\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}$$

且

$$3x^2yz+2x^2y^2+2x^2z^2-xy^2z-xyz^2-y^2z^2>0$$
$$3xy^2z+2x^2y^2+2y^2z^2-x^2yz-xyz^2-x^2z^2>0$$

于是,有

$$\sum\frac{3x^2yz+2x^2y^2+2x^2z^2-xy^2z-xyz^2-y^2z^2}{yz(y+z)}(y-z)^2\geqslant$$
$$[(3xy^2z+2x^2y^2+2y^2z^2-x^2yz-xyz^2-x^2z^2)+$$
$$(3xyz^2+2x^2z^2+2y^2z^2-x^2yz-xy^2z-x^2y^2)]\cdot\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}=$$
$$(2xy^2z+2xyz^2-2x^2yz+x^2y^2+x^2z^2+4y^2z^2)\cdot\frac{(x-y)^2}{xy(x+y)}\geqslant$$
$$0$$

注 式(4)等价于 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则 $\sum bc\cdot\sum\frac{1}{(b+c)^2}\geqslant\frac{9}{4}$. 可参见第七章"其他不等式证明例子"中例19.

例5 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{3\sum a^2}{\sum a}\geqslant 2\sum\frac{a^2}{a+b}\tag{5}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(5)取等号.

证 易证 $\sum\frac{a^2}{a+b}=\sum\frac{b^2}{a+b}$,于是有

$$2\sum \frac{a^2}{a+b} = \sum \frac{a^2+b^2}{a+b}$$

因此,式(5)等价于

$$\frac{3\sum a^2}{\sum a} \geqslant \sum \frac{a^2+b^2}{a+b} \qquad (※)$$

由于式(※)是关于 a,b,c 的对称式,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则易知有 $\frac{(a-c)^2}{a+c} \geqslant \frac{(a-b)^2}{a+b}, \frac{(a-c)^2}{a+c} \geqslant \frac{(b-c)^2}{b+c}$,于是

$$3\sum a^2 - \sum a \cdot \sum \frac{a^2+b^2}{a+b} =$$

$$3\sum a^2 - \sum (a^2+b^2) - \sum \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} =$$

$$\sum a^2 - \sum c(a+b) + 2abc\sum \frac{1}{a+b} =$$

$$(\sum a^2 - \sum bc) - \sum c(\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b}) =$$

$$\frac{1}{2}\sum (a-b)^2 - \frac{1}{2}\sum \frac{c(a-b)^2}{a+b} =$$

$$\frac{1}{2}\sum (a+b-c)\frac{(a-b)^2}{a+b} \geqslant$$

$$\frac{1}{2}(a-b+c)\frac{(a-c)^2}{a+b} + \frac{1}{2}(-a+b+c)\frac{(b-c)^2}{b+c} \geqslant$$

$$\frac{1}{2}(a-b+c-a+b+c)\frac{(b-c)^2}{b+c} =$$

$$\frac{c(b-c)^2}{b+c} \geqslant 0$$

故式(※)成立,式(5)获证.

例6 (自创题,1992.03.01)在 $\triangle ABC$ 中,$BC=a, CA=b, AB=c$,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,则

$$1 - \frac{2r}{R} \geqslant \left|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}\right| \qquad (6)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(6)取等号.

证 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,且 $a = c+\alpha+\beta, b = c+\alpha, \alpha,\beta \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则有 $c \geqslant \beta$. 由于 $\frac{2r}{R} = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{abc}$,且

$$abc - \prod(-a+b+c) - (a-b)(b-c)(a-c) =$$

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c + (2\alpha+\beta)\beta^2 - \alpha\beta(\alpha+\beta) \geqslant$$

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\beta+(2\alpha+\beta)\beta^2-\alpha\beta(\alpha+\beta)=$$
$$2(\alpha+\beta)\beta^2\geqslant 0$$

由此即知式(6)成立.

例7 (自创题,2000.03.02)在 $\triangle ABC$ 中,三边长为 a,b,c,求证

$$\sum a\sum\frac{1}{a}\geqslant 9+\left(\frac{a-c}{b}\right)^2 \tag{7}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(7)取等号.

证 因为当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时,容易验证有 $\frac{a-c}{b}\geqslant\frac{a-b}{c},\frac{a-c}{b}\geqslant\frac{b-c}{a}$,因此,只要证 $a\geqslant b\geqslant c$ 时式(7)成立即可.令 $a=c+\alpha+\beta,b=c+\alpha$,有 $c\geqslant\beta,\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$,这时

$$\sum a\sum\frac{1}{a}-9-\left(\frac{a-c}{b}\right)^2=\frac{(a-b)^2}{ab}+\left(\frac{1}{ac}-\frac{1}{b^2}\right)(a-c)^2+\frac{(b-c)^2}{bc}$$

$$\text{式(7)}\Leftrightarrow bc(a-b)^2+(b^2-ac)(a-c)^2+ab(b-c)^2\geqslant 0$$

用 $a=c+\alpha+\beta,b=c+\alpha$ 代入上式左边,并整理,得

$$(\alpha^2+\beta^2)c^2+(3\alpha^3-\beta^3+2\alpha^2\beta)c+\alpha^2(\alpha+\beta)^2+\alpha^3(\alpha+\beta)\geqslant 0\ (※)$$

因为 $$c\geqslant\beta$$

所以 $$(\alpha^2+\beta^2)c^2+(3\alpha^3-\beta^3+2\alpha^2\beta)c\geqslant(4\alpha^2+2\alpha^2\beta)c\geqslant 0$$

所以式(※)成立.

注 式(7)是非对称式不等式,但由于在 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下,$\frac{a-c}{b}\geqslant\frac{a-b}{c}$,$\frac{a-c}{b}\geqslant\frac{b-c}{a}$,因此,只需证 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下式(7)成立即可.

例8 (自创题,2000.07.21)设 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\mathbf{R}$,$\max\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}=a_1$,$\min\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}=a_5$,则

$$5\sum a_1^2-\left(\sum a_1\right)^2\leqslant 6(a_1-a_5)^2 \tag{8}$$

若 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$,则当且仅当 $a_1=a_2=a_3,a_4=a_5$ 或 $a_1=a_2,a_3=a_4=a_5$ 时,式(8)取等号.

证 不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3\geqslant a_4\geqslant a_5$,$a_1=a_5+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,$a_2=a_5+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$,$a_3=a_5+\alpha_1+\alpha_2$,$a_4=a_5+\alpha_1$,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$6(a_1-a_5)^2-\left[5\sum a_1^2-\left(\sum a_1\right)^2\right]=6(a_1-a_5)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(a_i-a_j)^2=$$
$$6(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^2-[\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+(\alpha_1+\alpha_2)^2+(\alpha_2+\alpha_3)^2+$$
$$(\alpha_3+\alpha_4)^2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2+(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^2+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^2]=$$
$$5(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)^2-(3\alpha_1^2+5\alpha_2^2+5\alpha_3^2+3\alpha_4^2+4\alpha_1\alpha_2+$$
$$2\alpha_1\alpha_3+6\alpha_2\alpha_3+2\alpha_2\alpha_4+4\alpha_3\alpha_4)=$$

$$2\alpha_1^2+2\alpha_4^2+6\alpha_1\alpha_2+8\alpha_1\alpha_3+10\alpha_1\alpha_4+4\alpha_2\alpha_3+8\alpha_2\alpha_4+6\alpha_3\alpha_4\geqslant 0$$

即式(8)成立，由上式取等号条件 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_4=0$ 或 $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_4=0$ 知式(8)取等号条件.

注 更一般地有以下问题.

设 $a_i\in\mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n,\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=a_1,\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=a_n$，则

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)^2\leqslant\left[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}\right](a_1-a_n)^2 \tag{9}$$

2007 年 8 月 5 日，笔者在深圳亚迪中学"全国高中数学奥林匹克协作学校第九届夏令营"为学生讲课时，提出了以上问题后，中国人民大学附属中学李超、林博两位同学给出了解答，下面是他们的证明.

首先证明以下两个引理.

引理 1 如果 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 为非负实数，那么 $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2\geqslant x_1^2+x_2^2+\cdots+x_k^2$ 总成立(易证，略).

引理 2 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是非负实数，且 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}=a_1,\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{a_i\}=a_n$，则对于 $t=1,2,\cdots,n-1$，如下不等式成立，即

$$\sum_{i=1}^{n-t}(a_i-a_{i+t})^2\leqslant\min\{t,n-t\}\cdot(a_1-a_n)^2$$

证 (1) 如果 $t\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$，则 $t\leqslant n-t$. 将所有形如 $(a_i-a_{i+t})^2$ 的式子按 i 模 t 的余数分为如下 t 类：$A_r=\{(a_i-a_{i+t})^2\mid i\equiv r\pmod t,1\leqslant i\leqslant n-t\}$（其中 $r=1,2,\cdots,t$，并且规定每个 A_r 为可重集）.

对于每个 A_r，有

$$\begin{aligned}\sum_{x\in A_r}x&=(a_r-a_{r+t})^2+(a_{r+t}-a_{r+2t})^2+\cdots+(a_{r+(k-1)t}-a_{r+kt})^2\leqslant\\&[(a_r-a_{r+t})+(a_{r+t}-a_{r+2t})+\cdots+(a_{r+(k-1)t}-a_{r+kt})]^2=\\&\text{(这一步用引理 1)}\\&(a_r-a_{r+kt})^2\leqslant(a_1-a_n)^2\end{aligned}$$

其中 k 为使 $r+kt\leqslant n$ 的最大整数.

(2) 如果 $t>\left[\frac{n}{2}\right]$，则 $t>n-t$. 对 $i=1,2,\cdots,n-t,(a_i-a_{i+t})^2\leqslant(a_1-a_n)^2$，所以

$$\sum_{i=1}^{n-t}(a_i-a_{i+t})^2\leqslant(n-t)(a_1-a_n)^2$$

引理 2 得证.

下面证明式(9). 我们将对 n 的奇偶性分类讨论：

(1) 当 $n=2k(k\in\mathbf{Z})$ 时,则

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=\sum_{t=1}^{2k-1}[\sum_{i=1}^{2k-t}(a_i-a_{i+t})^2]\leqslant$$

$$\sum_{t=1}^{2k-1}[\min\{t,2k-t\}\cdot(a_1-a_n)^2]=$$

(据引理2)

$$[1+2+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+2+1]\cdot(a_1-a_n)^2=$$

$$k^2\cdot(a_1-a_n)^2=\frac{n^2}{4}\cdot(a_1-a_n)^2=$$

$$[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}](a_1-a_n)^2$$

(2) 当 $n=2k+1(k\in\mathbf{Z})$ 时,则

$$n\sum_{i=1}^{n}a_i^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=\sum_{t=1}^{2k}[\sum_{i=1}^{2k+1-t}(a_i-a_{i+t})^2]\leqslant$$

$$\sum_{t=1}^{2k}[\min\{t,2k+1-t\}\cdot(a_1-a_n)^2]=$$

(据引理2)

$$[1+2+\cdots+(k-1)+k+k+(k-1)+\cdots+2+1]\cdot(a_1-a_n)^2=$$

$$k(k+1)\cdot(a_1-a_n)^2=\frac{n^2-1}{4}\cdot(a_1-a_n)^2=$$

$$[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}](a_1-a_n)^2$$

综合以上两方面,式(9)得证.

式(9)中的系数 $[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}]$ 是最佳的. 这是由于,取 $a_1=a_2=\cdots=a_{[\frac{n}{2}]}=1,a_{[\frac{n}{2}]+1}=\cdots=a_n=0$ 时,不难验证式(9)中的等号成立,因此式(9)中的系数 $[\frac{n^2-1}{4}+\frac{1+(-1)^n}{8}]$ 是最佳的.

例 9 (自创题,1991.08.09)在 $\triangle ABC$ 中,三边长为 a,b,c,则

$$ab^2+bc^2+ca^2\geqslant 3abc+2|(b-c)(c-a)(a-b)| \tag{10}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(10)取等号.

证 若 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$a^2b+b^2c+c^2a-(ab^2+bc^2+ca^2)=(a-b)(b-c)(a-c)\geqslant 0$$

因此,要证式(10),我们只需证在 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下成立即可.

设 $a=c+\alpha+\beta,b=c+\alpha$,有 $c\geqslant\beta,\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$ab^2+bc^2+ca^2-3abc-2|(b-c)(c-a)(a-b)|=$$

$$\frac{1}{2}[\sum a(b-c)^2-5(a-b)(b-c)(a-c)]=$$

$$\frac{1}{2}[(a+b)(b-c)^2+2b(a-b)(b-c)+(b+c)(a-b)^2-$$

$$5(a-b)(b-c)(a-c)]=$$

$$\frac{1}{2}[(2c+2\alpha+\beta)\alpha^2+(2c+2\beta)\alpha\beta+(2c+\alpha)\beta^2-5\alpha\beta(\alpha+\beta)]=$$

$$c(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2\geqslant$$

$$\beta(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^3-\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2=$$

$$\alpha^3-\alpha\beta^2+\beta^3\geqslant 0$$

(不论 $\alpha\geqslant\beta$,或 $\beta\geqslant\alpha$,都有 $\alpha^3-\alpha\beta^2+\beta^3\geqslant 0$).

注 这里通过比较 $a^2b+b^2c+c^2a$ 与 $ab^2+bc^2+ca^2$ 在 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下大小,从而又可变为在 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下证明原命题.

例 10 (自创题,1991.08.08) $\triangle ABC$ 为非钝角三角形,三边长为 a,b,c,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,则

$$1-\frac{2r}{R}\geqslant\frac{3|(a-b)(b-c)(a-c)|}{abc}\tag{11}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(11)取等号.

证 设 $a\geqslant b\geqslant c$,且 $a=c+\alpha+\beta,b=c+\alpha,c\geqslant\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}+\beta,\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$式(11)\Leftrightarrow\frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+(2\alpha\beta^2+\beta^3)}{c(c+\alpha)(c+\alpha+\beta)}\geqslant\frac{3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{c(c+\alpha)(c+\alpha+\beta)}\Leftrightarrow$$

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+(2\alpha\beta^2+\beta^3)\geqslant 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

用 $c\geqslant\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}+\beta$ 代入,并整理得到

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+(2\alpha\beta^2+\beta^3)-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\geqslant$$

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}+\beta)+2\alpha\beta^2+\beta^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=$$

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}-2\beta(\alpha^2-\beta^2)=$$

$$\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}[(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)-\sqrt{2}(\alpha-\beta)\sqrt{\beta(\alpha+\beta)}]$$

由此知,要证式(11),只要证

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geqslant\sqrt{2}(\alpha-\beta)\sqrt{\beta(\alpha+\beta)}$$

当 $\alpha<\beta$ 时,上式显然成立;

当 $\alpha\geqslant\beta$ 时,又只要证两边平方后的式子成立.这时

$$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2-2(\alpha-\beta)^2(\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^4+5\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3-\beta^4\geqslant 0$$

注 有更强式

$$1-\frac{2r}{R}\geqslant\frac{(2\sqrt{2}+1)\mid(a-b)(b-c)(a-c)\mid}{abc} \tag{12}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(12)取等号.

由上证明知,这时有

$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+2\alpha\beta^2+\beta^3-(2\sqrt{2}+1)\alpha\beta(\alpha+\beta)\geqslant$

$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}+\beta)+2\alpha\beta^2+\beta^3-(2\sqrt{2}+1)\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\sqrt{2\alpha\beta+2\beta^2}+\beta(\alpha+\beta)^2+\beta(\alpha\beta+\beta^2)-(2\sqrt{2}+1)\alpha\beta(\alpha+\beta)=$

$(\alpha\beta+\beta^2)[(\frac{\sqrt{2}\alpha^2}{\sqrt{\alpha\beta+\beta^2}}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{\alpha+\beta+\beta^2})+\alpha+2\beta-(2\sqrt{2}+1)\alpha]\geqslant$

$(\alpha\beta+\beta^2)[2\sqrt{2}\alpha+\alpha+2\beta-(2\sqrt{2}+1)\alpha]=$

$2(\alpha\beta+\beta^2)\beta\geqslant0$

例 11 (自创题,1991.08.15)$\triangle ABC$ 三边长 a,b,c,则

$$ab^2+bc^2+ca^2\geqslant3abc+(1-\frac{2}{\sqrt{27}}b(a-c)^2 \tag{13}$$

当且仅当 $a=b=c$ 或退化 $\triangle ABC$ 三边比为$(\sqrt{3}+1):\sqrt{3}:1$ 时,式(13)取等号.

证 若 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $a^2b+b^2c+c^2a\geqslant ab^2+bc^2+ca^2$,且

$$b(a-c)^2\geqslant a(b-c)^2,\ b(a-c)^2\geqslant c(a-b)^2$$

因此,要证式(13),只需证在 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下成立即可.

设 $a=c+\alpha+\beta,b=c+\alpha,c\geqslant\beta,\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$ab^2+bc^2+ca^2-3abc=(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+\alpha^2(\alpha+\beta)$$

又

$$\frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+\alpha^2(\alpha+\beta)}{c+\alpha}-\frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)\beta+\alpha^2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}=$$

$$\frac{\alpha\beta^2(c-\beta)}{(c+\alpha)(\alpha+\beta)}\geqslant0$$

所以

$$\frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+\alpha^2(\alpha+\beta)}{(c+\alpha)(\alpha+\beta)^2}\geqslant\frac{\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3}{(\alpha+\beta)^3}=$$

$$1-\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}-\frac{\alpha\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}=$$

$$1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}+(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^3$$

由于$\frac{\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta^3}{(\alpha+\beta)^3}\geqslant0$,且

$$[\frac{\beta}{\alpha+\beta}-(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^3]^2=(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^2\cdot[1-(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^2]^2=$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^2\cdot[1-(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^2][1-(\frac{\beta}{\alpha+\beta})^2]\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\frac{2}{3})^3=\frac{4}{27}$$

所以
$$\frac{(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c+\alpha^2(\alpha+\beta)}{(c+\alpha)(\alpha+\beta^2)}\geqslant 1-\frac{2}{\sqrt{27}}$$

即得式(13).

例 12 在 $\triangle ABC$ 中,三边长为 a,b,c,则

$$a^2(\frac{b}{c}-1)+b^2(\frac{c}{a}-1)+c^2(\frac{a}{b}-1)\geqslant 0 \tag{14}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(14) 取等号.

证 因为

$$\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}-(\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b})=$$

$$\frac{1}{abc}[(\frac{a^3b^2}{c}+\frac{b^3c^2}{a}+\frac{c^3a^2}{b})-(\frac{a^2b^3}{c}+\frac{b^2c^3}{a}+\frac{c^2a^3}{b})]=$$

$$\frac{\sum bc}{abc}(a-b)(b-c)(a-c)$$

所以只要证在 $a\geqslant c\geqslant b$ 情况下式(14) 成立即可. 又

$$a^2(\frac{b}{c}-1)+b^2(\frac{c}{a}-1)+c^2(\frac{a}{b}-1)=$$

$$\frac{a}{c}(a-c)(b-c)+\frac{b}{a}(b-a)(c-a)+\frac{c}{b}(c-b)(a-b)=$$

$$\frac{1}{abc}[b^2c(b-a)(c-a)+c^2a(c-b)(a-b)+a^2b(a-c)(b-c)]$$

由此知,要证式(14) 成立,只需证

$$b^2c(b-a)(c-a)+c^2a(c-b)(a-b)+a^2b(a-c)(b-c)\geqslant 0 \quad (※)$$

当 $a\geqslant c\geqslant b$ 时,设 $a=b+\alpha+\beta,c=b+\alpha,b\geqslant\beta,\alpha,\beta\in\mathbf{R}^-$,则

式(※) 左边 $=b^2(b+\alpha)\beta(\alpha+\beta)+(b+\alpha)^2(b+\alpha+\beta)\alpha(\alpha+\beta)-$
$(b+\alpha+\beta)^2\cdot b\alpha\beta=b^3(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+$
$b^2(\alpha^3+3\alpha^2\beta)+b(3\alpha^4+4\alpha^3\beta-\alpha\beta^3)+\alpha^3(\alpha+\beta)^2\geqslant$
$b[\beta^2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\beta(\alpha^3+3\alpha^2\beta)+3\alpha^4+4\alpha^3\beta-\alpha\beta^3]=$
$b(3\alpha^4+7\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2+\beta^4)\geqslant 0$

故式(14) 成立.

注 本题参见第九章“《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录”,Chapter8

题51.

例13 （美国,Pham Kim Hung）设 a,b,c 是三角形三边长,则

$$2\sum \frac{a^2}{b} \geqslant \sum a + \sum \frac{b^2}{a} \tag{15}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(15)取等号.

证 由于当 $a \geqslant b \geqslant c$ 时,易证有

$$\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} \geqslant \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$$

因此,式(15)只需证在 $a \geqslant b \geqslant c$ 情况下成立即可. 这时

$$\begin{aligned}
&2\sum \frac{a^2}{b} - \sum \frac{b^2}{a} - \sum a = \\
&\sum \left[4a - 2b + \frac{2(a-b)^2}{b}\right] - \\
&\sum \left[2b - a + \frac{(a-b)^2}{a}\right] - \sum a = \\
&\sum \left(\frac{2}{b} - \frac{1}{a}\right)(a-b)^2 = \\
&\frac{1}{abc}\sum c(2a-b)(a-b)^2
\end{aligned}$$

用增量比较法,设 $a = c + \alpha + \beta, b = c + \alpha, \alpha, \beta \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则易证 $\sum c(2a-b)(a-b)^2 \geqslant 0$.

例14 （改编题,2007.07.24）若 a,b,c 为满足 $a+b+c=1$ 的正数,$t \geqslant \frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}+13}}$,则

$$\frac{ta^2+b}{b+c} + \frac{tb^2+c}{c+a} + \frac{tc^2+a}{a+b} \geqslant \frac{t+3}{2} \tag{16}$$

证 式(16)经变换后等价于

$$\frac{\sum (b+c)(b-c)^2}{2\prod (b+c)} t \geqslant \frac{(a-b)(c-b)(a-c)}{2\prod (b+c)} \Leftrightarrow$$

$$t \cdot \sum (b+c)(b-c)^2 \geqslant (a-b)(c-b)(a-c)$$

由此可知当 $a \geqslant b \geqslant c$ 时,t 可为任意正数. 因此,我们只需求在 $a > c > b$ 情况下,式(16)成立. 此时式(16)又可写作

$$\frac{\sum (b+c)(b-c)^2}{(a-b)(c-b)(a-c)} \geqslant \frac{1}{t}$$

由此,先求

$$f(a,b,c)=\frac{(a-c)^2(a+c)+(c-b)^2(c+b)+(a-b)^2(a+b)}{(a-b)(a-c)(c-b)}$$

的最小值.

由 $a>c>b$,我们可设 $a=b+\alpha+\beta,c=b+\alpha,\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$f(a,b,c)=\frac{\beta^2(2b+2\alpha+\beta)+\alpha^2(2b+\alpha)+(\alpha+\beta)^2(2b+\alpha+\beta)}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}\geqslant$$
$$\frac{\beta^2(2\alpha+\beta)+\alpha^3+(\alpha+\beta)^3}{\alpha\beta(\alpha+\beta)}$$

令 $\frac{\alpha}{\beta}=x$,则上式可化为求函数

$$g(x)=\frac{2x+1+x^3+(x+1)^3}{x(x+1)}=2x+1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}$$

的最小值.

引入非负参数 λ,u,且 $\lambda+u=2$,则

$$g(x)=\lambda x+u(x+1)+\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}-u+1\geqslant 2\sqrt{2\lambda}+2\sqrt{2u}-u+1$$

这时取等号条件为

$$\begin{cases}\lambda x=\frac{2}{x}\\ u(x+1)=\frac{2}{x+1}\\ \lambda+u=2\end{cases}$$

由上消去 λ,u,得到

$$\frac{2}{x^2}+\frac{2}{(x+1)^2}=2$$

即

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=1 \qquad ①$$

现在,我们来求解方程 ①. 为此,令 $\frac{1}{x}=\sin\alpha,\frac{1}{x+1}=\cos\alpha,\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$(注意这时 $\sin\alpha>\cos\alpha>0$),于是

$$\frac{1}{\sin\alpha}+1=\frac{1}{\cos\alpha}\Leftrightarrow\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}=1\Leftrightarrow\sin\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$$

令 $\sin\alpha-\cos\alpha=p$,则 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1-p^2}{2}$,因此,得到

$$p=\frac{1-p^2}{2}$$

解得 $p=\sqrt{2}-1$，即有 $\sin\alpha-\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha=\sqrt{2}-1$，由此易求得

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

即

$$\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{-\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$$

于是，可取参数 $\lambda=\frac{2}{x^2}=(\sqrt{2}-1)\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1$，$u=1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{2\sqrt{2}-1}$，这时

$$\begin{aligned}[g(x)]_{\min}&=2x+1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x+1}=\frac{4}{\sqrt{2}-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}+1+\\&(\sqrt{2}-1+\sqrt{2\sqrt{2}-1})+(-\sqrt{2}+1+\sqrt{2\sqrt{2}-1})=\\&\frac{4}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1=\\&\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+2\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1=\\&(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2\sqrt{2}-1}-\sqrt{2}+1)+2\sqrt{2\sqrt{2}-1}+1=\\&(\sqrt{2}+3)\sqrt{2\sqrt{2}-1}=\\&\sqrt{16\sqrt{2}+13}\end{aligned}$$

故只需

$$\sqrt{16\sqrt{2}+13}\geqslant\frac{1}{t}$$

即

$$t\geqslant\frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}+13}}$$

由上面求解过程还不难得到式(16)，当 $t=\frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}+13}}$ 时，取等号条件为：$a=b=c=\frac{1}{3}$；或 $a+b+c=1$，且 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}+1}{2}$，$c=0$；或 $a+b+$

$c=1$，且 $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}+1}{2}$，$a=0$；或 $a+b+c=1$，且 $\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{2\sqrt{2}-1}+\sqrt{2}+1}{2}$，$b=0$. 当 $t>\frac{1}{\sqrt{16\sqrt{2}+13}}$ 时，取等号条件为 $a=b=c=\frac{1}{3}$（详细求解过程从略）.

注 本例证明可参阅《中学数学》（湖北），2008 年第 1 期，杨学枝文："一个不等式的最佳系数".

例 15 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，求证

$$(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant 3(a^3b+b^3c+c^3a) \tag{17}$$

当且仅当 $a=b=c$；或 $a:b:c=\sin^2\frac{3\pi}{7}:\sin^2\frac{2\pi}{7}:\sin^2\frac{\pi}{7}$；或 $b:c:a=\sin^2\frac{3\pi}{7}:\sin^2\frac{2\pi}{7}:\sin^2\frac{\pi}{7}$；或 $c:a:b=\sin^2\frac{3\pi}{7}:\sin^2\frac{2\pi}{7}:\sin^2\frac{\pi}{7}$ 时，式(17)取等号.

证一 由

$$a^3b+b^3c+c^3a-(ab^3+bc^3+ca^3)=(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)$$

知，当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时，有 $a^3b+b^3c+c^3a\geqslant ab^3+bc^3+ca^3$，因此，要证式(17)，只需证 $a\geqslant b\geqslant c$ 时成立即可.

设 $a=c+\alpha+\beta$，$b=c+\alpha$，$\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$\begin{aligned}&(\sum a^2)^2-3\sum a^3b=[(c+\alpha+\beta)^2+(c+\alpha)^2+c^2]^2-\\&3[(c+\alpha+\beta)^3(c+\alpha)+(c+\alpha)^3c+c^3(c+\alpha+\beta)]=\\&(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c^2+(\alpha^3-3\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3)c+\\&(\alpha^4-\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)\end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned}f(c)=&(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c^2+(\alpha^3-3\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3)c+\\&(\alpha^4-\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)\end{aligned}$$

今证 $f(c)\geqslant 0$.

若 $\alpha=\beta=0$，$f(c)=0$.

若 α,β 不全为零，则 $f(c)$ 为 c 的二次函数，且 $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2>0$，又其判别式

$$\begin{aligned}\Delta=&(\alpha^3-3\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2+\beta^3)^2-\\&4(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)(\alpha^4-\alpha^3\beta-\alpha^2\beta^3+\alpha\beta^3+\beta^4)=\\&-3(\alpha^6+2\alpha^5\beta-3\alpha^4\beta^2-6\alpha^3\beta^3+2\alpha^2\beta^4+4\alpha\beta^5+\beta^6)=\\&-3(\alpha^3+\alpha^2\beta-2\alpha\beta^2-\beta^3)^2\leqslant 0\end{aligned}$$

因此，$f(c) \geqslant 0$. 故式(17) 成立.

由上证明可知，当且仅当 $\alpha = \beta = 0$，即 $a = b = c$ 时，式(17) 取等号；除外，等号成立，当且仅当

$$\begin{cases}2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)c + \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = 0 \\ \alpha^3 + \alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = 0\end{cases}$$

用 $\alpha = b - c, \beta = a - b$ 代入上式，并整理，即得当 $a \geqslant b \geqslant c$，且

$$\begin{cases}\sum a^3 - 5\sum a^2b + 4\sum ab^2 = 0 & ① \\ -\sum a^3 + \sum a^2b + 2\sum ab^2 - 6abc = 0 & ②\end{cases}$$

由式①，②得 $a = t\sin^2\frac{3\pi}{7}, b = t\sin^2\frac{2\pi}{7}, c = t\sin^2\frac{\pi}{7}(t > 0)$.

综上，式(17) 取等号条件为当且仅当 $a = b = c$，或 $a : b : c = \sin^2\frac{3\pi}{7} : \sin^2\frac{2\pi}{7} : \sin^2\frac{\pi}{7}$，或 $b : c : a = \sin^2\frac{3\pi}{7} : \sin^2\frac{2\pi}{7} : \sin^2\frac{\pi}{7}$，或 $c : a : b = \sin^2\frac{3\pi}{7} : \sin^2\frac{2\pi}{7} : \sin^2\frac{\pi}{7}$.

证二 由于

$$\left(\sum a^2\right)^2 - 3\sum a^3b = \sum a^4 + 2\sum b^2c^2 - 3\sum a^3b =$$

$$\left(\sum a^4 - \sum b^2c^2\right) + 3\left(\sum b^2c^2 - \sum a^2bc\right) - 3\left(\sum a^3b - \sum a^2bc\right) =$$

$$\frac{1}{2}\sum (b^2 - c^2)^2 + \frac{1}{2}\sum (ab + ac - 2bc)^2 - \sum (b^2 - c^2)(ab + ac - 2bc) =$$

$$\frac{1}{2}\sum (b^2 - c^2 - ab - ac + 2bc)^2 \geqslant 0$$

故式(17) 成立.

证三 由于

$$4\left(\sum a^2 - \sum bc\right)\left[\left(\sum a^2\right)^2 - 3\sum a^3b\right] =$$

$$\left(\sum a^3 - 5\sum a^2b + 4\sum ab^2\right)^2 +$$

$$3\left(\sum a^3 - \sum a^2b - 2\sum ab^2 + 6abc\right)^2 \geqslant 0$$

又

$$\sum a^2 - \sum bc \geqslant 0$$

故式(17) 成立.

注 1. 本题目来源于 Tran phuong(越南) 著《Diamonds In Mathematical Inequalities》一书，证二、证三是原书给出的证明.

2. 原书没有给出取等号条件的证明. 我们给出证明如下

$$(\sin^4\frac{3\pi}{7}+\sin^4\frac{2\pi}{7}+\sin^4\frac{\pi}{7})^2=$$
$$3(\sin^6\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^6\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^6\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7})$$

今证如下

$$8(\sin^4\frac{3\pi}{7}+\sin^4\frac{2\pi}{7}+\sin^4\frac{\pi}{7})=$$
$$2[(1-\cos\frac{6\pi}{7})^2+(1-\cos\frac{4\pi}{7})^2+(1-\cos\frac{2\pi}{7})^2]=$$
$$(\text{应用}\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha))$$
$$9-3(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7})=$$
$$12-12\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7}=$$
$$12+\frac{12\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}}=$$
$$12-\frac{3}{2}=\frac{21}{2}$$

因此

$$(\sin^4\frac{3\pi}{7}+\sin^4\frac{2\pi}{7}+\sin^4\frac{\pi}{7})^2=\frac{441}{256} \qquad ③$$

另外,由于

$$3(\sin^6\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^6\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^6\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7})=$$
$$\frac{3}{16}[(1-\cos\frac{6\pi}{7})^3(1-\cos\frac{4\pi}{7})+(1-\cos\frac{4\pi}{7})^3(1-\cos^2\frac{\pi}{7})+$$
$$(1-\cos\frac{2\pi}{7})^3(1-\cos\frac{6\pi}{7})]=$$
$$(\text{应用公式}\cos^3\alpha=\frac{1}{4}(\cos 3\alpha+3\cos\alpha)\text{及}\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha))$$
$$\frac{63}{128}(3+\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7})=$$
$$\frac{252}{128}(1+\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7})=$$
$$\frac{252}{128}(1+\frac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}})=$$

$$\frac{63}{32}(1-\frac{1}{8})=\frac{441}{256}$$

即有

$$3(\sin^6\frac{3\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}+\sin^6\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^6\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7})=\frac{441}{256} \quad ④$$

由式③、④即得证.

例 16 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\sum\frac{bc}{3a^2+b^2+c^2}\leqslant\frac{3}{5} \quad (18)$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(18)取等号.

证

$$\frac{3}{5}-\sum\frac{bc}{3a^2+b^2+c^2}=\sum(\frac{1}{5}-\frac{bc}{3a^2+b^2+c^2})=$$
$$\frac{1}{10}\sum\frac{5(b-c)^2+3(a^2-b^2)+3(a^2-c^2)}{3a^2+b^2+c^2}=$$
$$\frac{1}{10}\sum\frac{5(b-c)^2}{3a^2+b^2+c^2}+\frac{3}{10}\sum(\frac{b^2-c^2}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{b^2-a^2}{3c^2+a^2+b^2})=$$
$$\frac{1}{10}\sum[\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}-\frac{6(b+c)^2}{(3b^2+c^2+a^2)(3c^2+a^2+b^2)}](b-c)^2$$

记

$$s_a=\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}-\frac{6(b+c)^2}{(3b^2+c^2+a^2)(3c^2+a^2+b^2)}$$
$$s_b=\frac{5}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{6(c+a)^2}{(3c^2+a^2+b^2)(3a^2+b^2+c^2)}$$
$$s_c=\frac{5}{3c^2+a^2+b^2}-\frac{6(a+b)^2}{(3a^2+b^2+c^2)(3b^2+c^2+a^2)}$$

于是,只需证

$$s_a(b-c)^2+s_b(a-c)^2+s_c(a-b)^2\geqslant 0 \quad ①$$

由对称性,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$s_b=\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}[\frac{3a^2+b^2+c^2}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{6(c+a)^2}{5(3c^2+a^2+b^2)}]=$$
$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}\left\{[1+\frac{2(a^2-b^2)}{3b^2+c^2+a^2}]-[1+\frac{a^2+12ac-5b^2-9c^2}{5(3c^2+a^2+b^2)}]\right\}=$$
$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}[\frac{2(a^2-b^2)}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{a^2+12ac-5b^2-9c^2}{5(3c^2+a^2+b^2)}]\geqslant$$
$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}[\frac{a^2-b^2}{3c^2+a^2+b^2}-\frac{a^2+12ac-15b^2-9c^2}{5(3c^2+a^2+b^2)}]=$$

$$\frac{(2a-3c)^2}{(3a^2+b^2+c^2)(3c^2+a^2+b^2)}\geqslant 0$$

$$s_c=\frac{5}{3c^2+a^2+b^2}-\frac{6(a+b)^2}{(3a^2+b^2+c^2)(3b^2+c^2+a^2)}=$$

$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}\left[\frac{3a^2+b^2+c^2}{3c^2+a^2+b^2}-\frac{6(a+b)^2}{5(3b^2+c^2-a^2)}\right]=$$

$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}\left\{\left[1+\frac{2(a^2-c^2)}{3c^2+a^2+b^2}\right]+\left[1+\frac{a^2+12ab-5c^2-9b^2}{5(3b^2+c^2+a^2)}\right]\right\}\geqslant$$

$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}\left[\frac{2(a^2-c^2)}{3c^2+a^2+b^2}-\frac{a^2+12ab-5c^2-9b^2}{5(3b^2+c^2+a^2)}\right]\geqslant$$

$$\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}\left[\frac{a^2-c^2}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{a^2+12ab-5c^2-9b^2}{5(3b^2+c^2+a^2)}\right]=$$

$$\frac{(2a-3b)^2}{(3a^2+b^2+c^2)(3b^2+c^2+a^2)}\geqslant 0$$

又

$$s_a+s_b=\frac{5}{3a^2+b^2+c^2}-\frac{6(b+c)^2}{(3b^2+c^2+a^2)(3c^2+a^2+b^2)}+$$

$$\frac{5}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{6(c+a)^2}{(3c^2+a^2+b^2)(3a^2+b^2+c^2)}=$$

$$\frac{1}{3c^2+a^2+b^2}\left[\frac{5(3c^2+a^2+b^2)}{3a^2+b^2+c^2}-\frac{6(b+c)^2}{3b^2+c^2+a^2}+\right.$$

$$\left.\frac{5(3c^2+a^2+b^2)}{3b^2+c^2+a^2}-\frac{6(c+a)^2}{3a^2+b^2+c^2}\right]=$$

$$\frac{1}{3c^2+a^2+b^2}\left(\frac{5a^2-b^2+9c^2-12bc}{3b^2+c^2+a^2}+\frac{-a^2+5b^2+9c^2-12ca}{3a^2+b^2+c^2}\right)\geqslant$$

$$\frac{4a^2+4b^2+18c^2-12bc-12ca}{(3c^2+a^2+b^2)(3a^2+b^2+c^2)}=$$

(注意到$5a^2-b^2+9c^2-12bc\geqslant 4b^2+9c^2-12bc=(2b-3c)^2\geqslant 0$)

$$\frac{(2a-3c)^2+(2b-3c)^2}{(3c^2+a^2+b^2)(3a^2+b^2+c^2)}\geqslant 0$$

于是

$$式①左边\geqslant s_a(b-c)^2+s_b(a-c)^2\geqslant(s_a+s_b)(b-c)^2\geqslant 0$$

即式①成立,从而式(18)成立.

注 式(18)经去分母变为整式不等式后,也可以用第4章“运用基本不等式证明不等式”的最后“附录”中提供的方法来证明.

例17 (Ngugen Van Thach)设$a,b,c>0$,求证

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}\tag{19}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(19) 取等号.

证

$$式(19)\Leftrightarrow \sum \frac{a^4}{b^2}+2\sum \frac{a^2b}{c}\geqslant \frac{9\sum a^4}{\sum a^2}\Leftrightarrow$$

$$(\sum \frac{a^4}{b^2}+b^2-2a^2)+2\sum(\frac{a^2b}{c}+bc-2ab)\geqslant$$

$$(\frac{9\sum a^4}{\sum a^2}-3\sum a^2)+(2\sum a^2-2\sum bc)\Leftrightarrow$$

$$\sum(\frac{a}{b}+1)^2(a-b)^2+2\sum \frac{c(a-b)^2}{a}\geqslant$$

$$\frac{3\sum(a+b)^2(a-b)^2}{\sum a^2}+\sum(a-b)^2\Leftrightarrow$$

$$s_a(b-c)^2+s_b(c-a)^2+s_c(a-b)^2\geqslant 0 \qquad ①$$

其中

$$s_a=\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}+\frac{2a}{b}-\frac{3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$s_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{2c}{a}+\frac{2b}{c}-\frac{3(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$s_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2c}{a}-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

由于当 $a\geqslant b\geqslant c>0$ 时,有

$$\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}+\frac{a^2}{c}-(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})=$$

$$\frac{1}{abc}[(a+b+c)(a-b)(b-c)(a-c)]\geqslant 0$$

因此,只需证当 $a\geqslant b\geqslant c>0$ 时式(19) 成立即可,即证在 $a\geqslant b\geqslant c>0$ 时式 ① 成立,这时

$$s_a=\frac{b^2}{c^2}+\frac{2b}{c}+\frac{2a}{b}-\frac{3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$5-\frac{3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}= \quad (注意有 b\geqslant c>0)$$

$$\frac{5a^2+2b^2+2c^2-6bc}{a^2+b^2+c^2}>$$

$$\frac{3(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 0$$

以下再分两种情况证明式 ①.

i）若

$$b-c \geqslant a-b \geqslant 0 \Leftrightarrow 2(b-c) \geqslant (a-c) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2b \geqslant a+c$$

于是

$$s_a+s_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}-\frac{3(a+b)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geqslant$$

$$10\sqrt[10]{\frac{a^6b^4c^2}{a^2b^6c^4}}-\frac{3(a+b)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geqslant$$

（注意有 $a \geqslant b \geqslant c > 0$）

$$10-\frac{3(a+b)^2+(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{7a^2+4b^2+7c^2-6ab-6bc}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{3(a-b)^2+3(b-c)^2+2(a^2-b^2)+2a^2+4c^2}{a^2+b^2+c^2}>0$$

（注意有 $a \geqslant b > 0$）

$$s_a+4s_b=\frac{b^2}{c^2}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{8c}{a}+\frac{10b}{c}-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2} \geqslant$$

$$\frac{(a+c)^2}{4c^2}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{2a}{b}+\frac{8c}{a}+\frac{2b}{c}+$$

$$\frac{4(a+c)}{c}-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

（注意有 $2b \geqslant a+c > 0$）

$$\left(\frac{a^2}{4c}+\frac{4c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{2c}{a}+\frac{a}{2c}\right)+\left(\frac{2a}{b}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\right)+$$

$$\left(\frac{4c}{a}+\frac{4a}{c}\right)+4+\frac{1}{4}-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}>$$

$$2+2+6+8+4-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$22-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{10a^2+19b^2+7c^2-6bc-24ac}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{12(a-c)^2+2(4b^2-a^2)+(11b^2-5c^2-6bc)}{a^2+b^2+c^2} \geqslant 0$$

（注意有 $2b \geqslant a+c \geqslant a > 0, b \geqslant c > 0$）

$$s_a+4s_b+s_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{4a}{b}+\frac{10b}{c}+\frac{10c}{a}-$$

$$\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{(a+c)^2}{4c^2}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{4a}{b}+\frac{6b}{c}+\frac{2(a+c)}{c}+\frac{10c}{a}-$$

$$\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

(注意有 $2b\geqslant a+c>0$)

$$\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{2b}{c}+\frac{2c}{a}\right)+\left(\frac{a^2}{4c^2}+\frac{4c^2}{a^2}\right)+\left(\frac{4a}{b}+\frac{4b}{c}+\frac{4c}{a}\right)+\left(\frac{2c}{a}+\frac{a}{2c}\right)+$$

$$\left(\frac{2a}{c}+\frac{2c}{a}\right)+2+\frac{1}{4}-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}>$$

$$5+2+12+2+4+2-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$27-\frac{3(b+c)^2+12(c+a)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{12a^2+21b^2+12c^2-6bc-24ac-6ab}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{12(a-c)^2+3(b-c)^2+3(a-b)^2+3(4b^2-a^2)+3(b^2-c^2)}{a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$0$$

(注意有 $2b\geqslant a+c\geqslant a>0, b\geqslant c>0$).

由以上结果,我们可以得到:

a) 若 $s_b\geqslant 0$,则

$$\sum s_a(b-c)^2\geqslant s_a(b-c)^2+s_c(a-b)^2\geqslant$$

$$(s_a+s_c)(a-b)^2\geqslant 0$$

(注意有 $s_a\geqslant 0, b-c\geqslant a-b\geqslant 0$)

b) 若 $s_b\leqslant 0, s_c\geqslant 0$,则

$$\sum s_a(b-c)^2\geqslant s_a(b-c)^2+s_b(a-c)^2\geqslant$$

$$\frac{1}{4}s_a(a-c)^2+s_b(a-c)^2=$$

(注意有 $2(b-c)\geqslant a-c\geqslant 0$)

$$\frac{1}{4}(s_a+4s_b)(a-c)^2\geqslant$$

$$0$$

c) 若 $s_b\leqslant 0, s_c\leqslant 0$,则

$$\sum s_a(b-c)^2\geqslant(s_a+s_c)(b-c)^2+s_b(a-c)^2\geqslant$$

$$(\text{注意有 } b-c \geqslant a-b \geqslant 0, s_c \leqslant 0)$$

$$\frac{1}{4}(s_a+s_c)(a-c)^2+s_b(a-c)^2=$$

$$(\text{注意有 } 2(b-c) \geqslant a-c \geqslant 0)$$

$$\frac{1}{4}(s_a+4s_b+s_c)(a-c)^2 \geqslant 0$$

ii）若 $a-b \geqslant b-c \geqslant 0, \Leftrightarrow a+c \geqslant 2b > 0$，记

$$f(c)=s_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+\frac{2c}{a}-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

由此易知，$f(c)$ 为增函数，我们来证明 $f(c) \geqslant 0$.

当 $a \geqslant 2b > 0$ 时，有

$$f(c) \geqslant f(0)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2} \geqslant$$

$$8-\frac{3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{5a^2+5b^2-6ab}{a^2+b^2} \geqslant$$

$$0$$

当 $2b \geqslant a \geqslant b > 0$ 时，由 $a+c \geqslant 2b > 0$，即 $c \geqslant 2b-a \geqslant 0$，有

$$f(c) \geqslant f(2b-a)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}+\frac{4b}{a}-2-\frac{3(a+b)^2}{2a^2+5b^2-4ab}=$$

$$\frac{2a^5-10a^3b^2+20a^2b^3-29ab^4+20b^5}{ab^2(2a^2+5b^2-4ab)}=$$

$$\frac{2a^3(a-b)^2+4a^2b(a-\frac{3}{2}b)^2+b^3(11a^2-29ab+20b^2)}{ab^2(2a^2+5b^2-4ab)} >$$

$$0$$

由以上结果，我们可以得到：

d）若 $s_b \geqslant 0$，则由 $s_a \geqslant 0, s_c \geqslant 0$ 知

$$\sum s_a(b-c) \geqslant 0$$

e）若 $s_b \leqslant 0$，我们先计算 $s_a+2s_b \geqslant 0, s_c+2s_b \geqslant 0$，有

$$s_a+2s_b=\frac{2c^2}{a^2}+\frac{4c}{a}+\frac{6b}{c}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{2a}{b}-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$2(\frac{c}{a}-1)^2-2+\frac{8c}{a}+(\frac{b}{c}-1)^2-1+$$

$$\frac{8b}{c}+\frac{2a}{b}-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \geqslant$$

$$\frac{8c}{a}+\frac{8b}{c}+\frac{2a}{b}-3-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$3\sqrt[3]{8\times 8\times 2}-3-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}>$$

$$12-\frac{6(a+c)^2+3(b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{6a^2+9b^2+3c^2-12ac-6bc}{a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$\frac{6a^2+3b^2+9c^2-12ac-6bc}{a^2+b^2+c^2}=$$

（注意有 $b\geqslant c>0$）

$$\frac{6(a-c)^2+3(b-c)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 0$$

$$s_c+2s_b=\frac{2c^2}{a^2}+\frac{6c}{a}+\frac{4b}{c}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{2a}{b}-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}c}{a}-1\right)^2+\frac{2\sqrt{2}c}{a}-1+\left(\frac{a}{b}-1\right)^2+\frac{4a}{b}-1+\frac{4b}{c}+\frac{6c}{a}-$$

$$\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{(2\sqrt{2}+6)c}{a}+\frac{4a}{b}+\frac{4b}{c}-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}\geqslant$$

$$3\sqrt[3]{16(2\sqrt{2}+6)}-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}>$$

$$13.6-\frac{6(a+c)^2+3(a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{4.6a^2+10.6b^2+7.6c^2-12ac-6ab}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{4.6a^2-6a(2c+b)+10.6b^2+7.6c^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{4.6\left[a-\frac{3}{4.6}(2c+b)\right]^2-\frac{9(2c+b)^2}{4.6}+10.6b^2+7.6c^2}{a^2+b^2+c^2}=$$

$$\frac{4.6\left(a-\frac{3}{2.3}c-\frac{3}{4.6}b\right)^2+\frac{39.76b^2-1.04c^2-36bc}{4.6}}{a^2+b^2+c^2}\geqslant 0$$

（注意有 $b\geqslant c>0$）.

由以上结果，可以得到

$$\begin{aligned}\sum s_a(b-c)^2 &= s_a(b-c)^2+s_b[(a-b)+(b-c)]^2+s_c(a-b)^2 \geqslant \\ &\quad s_a(b-c)^2+2s_b[(a-b)^2+(b-c)^2]+s_c(a-b)^2 = \\ &\quad (\text{注意到所设条件 } s_b \leqslant 0) \\ &\quad (s_a+2s_b)(b-c)^2+(2s_b+s_c)(a-b)^2 \geqslant \\ &\quad 0\end{aligned}$$

综上,式 ① 成立,即式(19) 获证. 由上证明知,当且仅当 $a=b=c$ 时,式(19) 取等号.

注 1. 由式(19) 易推得 $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geqslant \sqrt[4]{27\sum a^4}$.

2. 由本例的式(19) 与本章的例 15 的式(17) 可得以下不等式链

$$\frac{(\sum a^2)^2}{3abc} \geqslant \sum \frac{a^2}{b} \geqslant 3\sqrt{\frac{\sum a^4}{\sum a^2}}$$

3. 本题录自《Diamonds In Mathematical Inequalities》(Tran Phuong 著),原书证明有误,笔者作了补充与修正.

第三章

放缩法证明不等式

在不等式的证明方法中,“放缩法”是最常见的一种方法. 它的“难点”就在放缩的尺度的把握上. 常常我们会遇到这种情况:一个不难的不等式,被多次放缩后呈现的不等式却同原不等式面目全非. 经验告诉我们,有些不等式的证明往往较经放缩后的“强”不等式的证明更难. 还有一些不等式经放缩后成了等式(理想状态). 至于放缩的尺度如何把握,就只能因题而异了,有时,可以用赋值法加以比较,了解放缩前后式子在特殊值情况下的变化,从而判定其放缩是否过了“度”.

例1 设 $a_1,a_2,a_3\in[0,1]$,求证

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+1}+\frac{a_2}{a_3+a_1+1}+\frac{a_3}{a_1+a_2+1}+(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\leqslant 1 \tag{1}$$

当且仅当 a_1,a_2,a_3 中有两个为零,另一个为[0,1]中的任意数,或者当 a_1,a_2,a_3 不全为零且不为零的数都等于1时,式(1)取等号.

证 式(1)左边是关于 a_1,a_2,a_3 的对称式,不妨设 $0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant a_3\leqslant 1$,则

$$式(1)\ 左边 \leqslant \frac{a_1}{a_1+a_2+1}+\frac{a_2}{a_1+a_2+1}+\frac{a_3}{a_1+a_2+1}+(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) \leqslant$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+1}+\frac{(a_1+a_2+1)(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)}{a_1+a_2+1} \leqslant$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+1}+\frac{(1+a_1)(1+a_2)(1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)}{a_1+a_2+1} \leqslant$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+1}+\frac{(1-a_1^2)(1-a_2^2)(1-a_3)}{a_1+a_2+1} \leqslant$$

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1+a_2+1}+\frac{(1-a_3)}{a_1+a_2+1}=1$$

注　本题可推广到 n 元情况.

设 $x_i \in [0,1]\,(i=1,2,\cdots,n)$,记 $a=\sum_{i=1}^{n} a_i$,则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1+a-a_i}+\prod_{i=1}^{n}(1-a_i) \leqslant 1$$

注意有:$1+a_2+a_3+\cdots+a_n \leqslant (1+a_2)(1+a_3)\cdots(1+a_n)$.

例 2　已知 $x_1,x_2>0,x_1y_1-z_1^2>0,x_2y_2-z_2^2>0,y_1,y_2 \in \mathbf{R}$,求证

$$\frac{8}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1-z_1^2}+\frac{1}{x_2y_2-z_2^2} \tag{2}$$

当且仅当 $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}=1$ 时,式(2) 取等号.

证

$$(x_1+x_2)(y_1+y_2)-(z_1+z_2)^2=(\sqrt{x_1y_1-z_1^2}+\sqrt{x_2y_2-z_2^2})^2+$$

$$[\sqrt{\frac{x_2}{x_1}(x_1y_1-z_1^2)}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}(x_2y_2-z_2^2)}]^2+$$

$$(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}z_1-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}z_2)^2 \geqslant$$

$$(\sqrt{x_1y_1-z_1^2}+\sqrt{x_2y_2-z_2^2})^2 \geqslant$$

$$4\sqrt{x_1y_1-z_1^2}\cdot\sqrt{x_2y_2-z_2^2} \geqslant$$

$$\frac{8(x_1y_1-z_1^2)(x_2y_2-z_2^2)}{(x_1y_1-z_1^2)+(x_2y_2-z_2^2)}$$

由此即得式(2).

注　1. 此证法可将式(2) 推广为:

已知 $x_i,y_i \in \mathbf{R}^+,x_iy_i-z_i^2>0,z_i \in \mathbf{R},i=1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{n^3}{(\sum x_1)(\sum y_1)-(\sum z_1^2)} \leqslant \sum \frac{1}{x_1y_1-z_1^2} \tag{3}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n, y_1=y_2=\cdots=y_n, z_1=z_2=\cdots=z_n$ 时,式(3)取等号.

注意到这时有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i-(\sum_{i=1}^{n}z_i)^2=(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_iy_i-z_i^2})^2+$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}[\sqrt{\frac{x_j}{x_i}(x_iy_i-z_i^2)}-\sqrt{\frac{x_i}{x_j}(x_jy_j-z_j^2)}]^2+$$
$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\sqrt{\frac{x_j}{x_i}}z_i-\sqrt{\frac{x_i}{x_j}}z_j)^2\geqslant$$
$$(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_iy_i-z_i^2})^2\geqslant$$
$$\frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_iy_i-z_i^2}}$$

2. 2006年8月23日,笔者在华南师大附中授课时,华南师大附中于弢同学作如下推广.

设 $x_1,x_2,y_1,y_2,z_1,z_2\in\mathbf{R}^+, w_1,w_2\in\mathbf{R}$,且 $x_1y_1z_1-w_1^3>0, x_2y_2z_2-w_2^3>0$,则

$$\frac{16}{\prod(x_1+x_2)-(w_1+w_2)^3}\leqslant\frac{1}{x_1y_1z_1-w_1^3}+\frac{1}{x_2y_2z_2-w_2^3} \tag{4}$$

当且仅当 $x_1=x_2, y_1=y_2, z_1=z_2, w_1=w_2$ 时,式(4)取等号.

证 令 $u_1^3=x_1y_1z_1-w_1^3, u_2^3=x_2y_2z_2-w_2^3$,则

$$\text{式(4)右边}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{u_1^3u_2^3}}$$

因此,要证式(4),只要证

$$\prod(x_1+x_2)\geqslant(w_1+w_2)^3+8\sqrt{u_1^3u_2^3} \tag{※}$$

这时,由于

$$\prod(x_1+x_2)\geqslant(\sqrt[3]{x_1y_1z_1}+\sqrt[3]{x_2y_2z_2})^3=(\sqrt[3]{u_1^3+w_1^3}+\sqrt[3]{u_2^3+w_2^3})^3=$$
$$u_1^3+w_1^3+u_2^3+w_2^3+3\sqrt[3]{(u_1^3+w_1^3)^2(u_2^3+w_2^3)}+$$
$$3\sqrt[3]{(u_1^3+w_1^3)(u_2^3+w_2^3)^2}\geqslant$$
$$u_1^3+w_1^3+u_2^3+w_2^3+3u_1^2u_2+3w_1^2w_2+3u_1u_2^2+3w_1w_2^2=$$
$$(u_1+u_2)^3+(w_1+w_2)^3\geqslant$$

$$8\sqrt{u_1^3u_2^3}+(w_1+w_2)^3$$

因此,式(※)成立.

若应用不等式

$$(\sum_{i=1}^{n}a_i^3)^{\frac{1}{3}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^3)^{\frac{1}{3}}\geqslant[\sum_{i=1}^{n}(a_i^3+b_i^3)^3]^{\frac{1}{3}}$$

其中,$a_i,b_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,则上述证法又可以将式(4)推广为:

设 $x_{11},x_{12},x_{21},x_{22},\cdots,x_{n1},x_{n2}\in\mathbf{R}^+$,$w_1,w_2\in\mathbf{R}$,且 $x_{11}x_{21}\cdots x_{n1}-w_1^n>0$,$x_{12}x_{22}\cdots x_{n2}-w_2^n>0$,则

$$\frac{2^{n+1}}{\prod(x_{11}+x_{12})-(w_1+w_2)^n}\leqslant\frac{1}{x_{11}x_{21}\cdots x_{n1}-w_1^n}+\frac{1}{x_{12}x_{22}\cdots x_{n2}-w_2^n}\quad(5)$$

当且仅当 $x_{11}=x_{12},x_{21}=x_{22},\cdots,x_{n1}=x_{n2},w_1=w_2$ 时,式(5)取等号.

3. 2006年8月23日由华南师大附中朱修能同学也证明了式(3)n元推广情况.

设 $x_i,y_i>0,x_iy_i-z_i^2>0,z_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{n^3}{\sum x_1\cdot\sum y_1-(\sum z_1)^2}\leqslant\sum\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}$$

证

$$[\sum x_1\cdot\sum y_1-(\sum z_1)^2]\cdot\sum\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}\geqslant[(\sum\sqrt{x_1y_1})^2-(\sum z_1)^2]\cdot$$

$$\sum\frac{1}{x_1y_1-z_1^2}=\sum(\sqrt{x_1y_1}+z_1)\cdot\sum(\sqrt{x_1y_1}-z_1)\cdot$$

$$\sum\frac{1}{(\sqrt{x_1y_1}+z_1)(\sqrt{x_1y_1}-z_1)}\geqslant$$

$$\left[n\cdot\sqrt[n]{\prod(\sqrt{x_1y_1}+z_1)}\right]\cdot\left[n\cdot\sqrt[n]{\prod(\sqrt{x_1y_1}-z_1)}\right]\cdot$$

$$n\cdot\sqrt[n]{\frac{1}{\prod(\sqrt{x_1y_1}+z_1)\prod(\sqrt{x_1y_1}-z_1)}}=$$

$$n^3$$

例3 在 $\triangle ABC$ 中,证明

$$(\sum\sin\frac{A}{2})^2\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\sin A\quad(6)$$

证 作角变换$\frac{A}{2}\to\frac{\pi}{2}-A$等,证明式(6)变为去证

$$(\sum\cos A)^2\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\sin 2A$$

其中,A,B,C 为锐角 $\triangle ABC$ 三内角. 这时

$$(\sum\cos A)^2 \geqslant \frac{2}{3}(\sum\cos A)^3 = \frac{2}{3}(1+4\prod\sin\frac{A}{2})^3 =$$
$$\frac{2}{3}(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+4\prod\sin\frac{A}{2})^3 \geqslant 18\prod\sin\frac{A}{2} \geqslant$$
$$2\sqrt{3}\prod\sin A \geqslant$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sum\sin 2A$$

注 本题为《中学教研(数学)》(浙江),1993年第3期"难题征解"栏中题44,此后由杨学枝提供了解答.

例4 (自创题,1992,03,25)设 E,F 分别是 $\triangle ABC$ 以 A 为端点的射线 AC,AB 上的任意两个点,则

$$|AB-AC|+|AE-AF|\geqslant|BE-CF| \tag{7}$$

当且仅当 $AB=AC$ 且 $AE=AF$ 时,式(7)取等号.

证 不妨设 $AC\geqslant AB$(图1). 在 AC 上取点 D,使 $AD=AB$. 在 AB(或延长线)上取点 G,使 $AG=AE$,则

$$|AB-AC|+|AE-AF|=|CD|+|FG|\geqslant$$
$$|CF-FD|+|FD-DG|\geqslant$$
$$|CF-FD+FD-DG|=$$
$$|CF-DG|=|CF-BE|$$

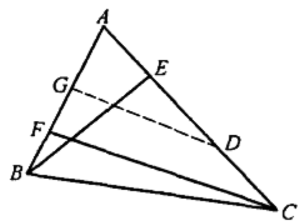


图1

注 1. 本例可参见《中学教研(数学)》,1993年第2期"难题征解"栏,杨学枝对这一问题的解答中提出的新问题.

2. 若 E,F 分别取 AC,AB 中点,有

$$|m_b-m_c|\leqslant\frac{3}{2}|b-c|$$

这里 m_b,m_c 分别为 AC,AB 边上的中线.

若 BE,CF 分别为 $\angle B,\angle C$ 平分线,则有

$$|w_b-w_c|\leqslant 2|b-c|$$

这里 w_b,w_c 分别为 $\angle B,\angle C$ 平分线.

例5 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则

$$x^2y+y^2z+z^2x+xyz\leqslant\frac{4}{27}(x+y+z)^3 \tag{8}$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 $x=0,y=2z$ 或 $y=0,z=2x$ 或 $z=0,x=2y$ 时,式(8)取等号.

本例有多种证法. 下面提供的一种十分简捷的证法.

证 由$x^2y+y^2z+z^2x-(xy^2+yz^2+zx^2)=(x-y)(y-z)(x-z)$,可知,当$x\geqslant y\geqslant z$时,$x^2y+y^2z+z^2x\geqslant xy^2+yz^2+zx^2$,因此,只需证在$x\geqslant y\geqslant z$情况下式(8)成立即可.这时

$$\begin{aligned}x^2y+y^2z+z^2x+xyz&=y(x+z)^2-z(x-y)(y-z)\leqslant y(x+z)^2\leqslant\\&\frac{4}{27}(y+\frac{x+z}{2}+\frac{x+z}{2})^3=\\&\frac{4}{27}(x+y+z)^3\end{aligned}$$

注 后面练习29中(5)有:$\sum xy^2\geqslant\frac{(\sum yz)^2}{\sum x}+\frac{2xyz}{(\sum x)^2}\cdot\sum(y-z)^2$,它与式(8)形成一不等式链,注意其用处.

例6 设$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,求证

$$1\leqslant\sum\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\tag{9}$$

$$\sum\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\leqslant\sqrt{2}\tag{10}$$

当且仅当$a=b=c$时,式(9)取等号;当且仅当a,b,c中有一个为零,另外两个相等时,式(10)取等号.

证 由

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\geqslant\frac{a^2}{\sum a^2},\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\leqslant\frac{\sqrt{2}a^{\frac{3}{2}}}{\sum a^{\frac{3}{2}}}$$

易证得.

注 以上不等式右边指数2与$\frac{3}{2}$可用待定指数方法求之.简解如下:

i)设α为待定指数,今求使

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}\geqslant\frac{a^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha}\tag{①}$$

成立时α的取值,即

$$\begin{aligned}\text{式①}\Leftrightarrow&(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)^2\geqslant a^{2\alpha-3}[a^3+(b+c)^3]\Leftrightarrow\\&2a^\alpha(b^\alpha+c^\alpha)+(b^\alpha+c^\alpha)^2-a^{2\alpha-3}(b+c)^3\geqslant0\end{aligned}\tag{②}$$

因为 $$2a^\alpha(b^\alpha+c^\alpha)+(b^\alpha+c^\alpha)^2\geqslant2\sqrt{2}a^{\frac{\alpha}{2}}(b^\alpha+c^\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

所以要证式②成立,只需

$$2\sqrt{2}a^{\frac{\alpha}{2}}(b^\alpha+c^\alpha)^{\frac{3}{2}}-a^{2\alpha-3}(b+c)^3\geqslant0$$

因此,可令$\frac{\alpha}{2}=2\alpha-3,\alpha=2$,这时上式为

$$2\sqrt{2}a(b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}-a(b+c)^3\geqslant 0\Leftrightarrow 2(b^2+c^2)\geqslant (b+c)^2$$

此式显然成立,故取 $\alpha=2$ 时,式②成立,从而式①也成立.

ii)设 β 为待定指数,今求使

$$\frac{\sqrt{2}a^\beta}{a^\beta+b^\beta+c^\beta}\geqslant\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \qquad ③$$

成立时 β 的取值.

$$式③\Leftrightarrow 2a^{2\beta-3}[a^3+(b+c)^3]\geqslant (a^\beta+b^\beta+c^\beta)^2\Leftrightarrow$$

$$a^{2\beta}+2a^{2\beta-3}(b+c)^3-2a^\beta(b^\beta+c^\beta)-(b^\beta+c^\beta)^2\geqslant 0 \quad ④$$

令 $2\beta-3=0,\beta=\frac{3}{2}$,则这时式④为

$$a^3+2(b+c)^3-2a^{\frac{3}{2}}(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})-(b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})^2\geqslant 0$$

要使上式成立,只需

$$(b+c)^3\geqslant (b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})^2$$

上式易证成立,故取 $\beta=\frac{3}{2}$ 时,式④成立,从而式③也成立.

例7 设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}\geqslant 2\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2} \qquad (11)$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时,式(11)取等号.

证 因为

$$\left(\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\frac{x_3^2}{x_4}+\frac{x_4^2}{x_1}\right)(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_4^2x_1)\geqslant (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)^2$$

所以只需证

$$\frac{(\sum x_1^2)^2}{x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_4^2x_1}\geqslant 2\sqrt{\sum x_1^2}$$

即

$$(\sum x_1^2)^3\geqslant 4(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_4^2x_1)^2$$

此式易证成立. 事实上

$$\begin{aligned}(x_1^2x_2+x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_4^2x_1)^2&\leqslant (x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_4^2+x_4^2x_1^2)=\\&(\sum x_1^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_4^2)\leqslant\\&(\sum x_1^2)\cdot\frac{1}{4}(\sum x_1^2)^2\end{aligned}$$

猜想 设 $x_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n^2}{x_1}\geqslant\sqrt{n\sum x_1^2} \qquad (12)$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时,式(12) 取等号.

当 $n = 5$ 时的证明见第七章"其他不等式证明例子" 中例 28.

例 8 设 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,求证

$$(\sum x)^5 \geqslant 81xyz \cdot \sum x^2 \tag{13}$$

当且仅当 $x = y = z$ 时,式(13) 取等号.

证 设 $u = \sum x, v = \sum yz, w = xyz$,则

$$v^2 \geqslant 3uw$$

于是

$$\begin{aligned} u^5 + 162vw &= u^5 + 81vw + 81vw \geqslant 3(u^5 \cdot 81vw \cdot 81vw)^{\frac{1}{3}} \geqslant \\ &3(u^5 \cdot 81^2 \cdot w^2 \cdot 3uw)^{\frac{1}{3}} = \\ &81u^2w \end{aligned}$$

所以

$$u^5 \geqslant 81w(u^2 - 2v)$$

即得式(13).

注 本题来源于 Vasile Cirtoaje , GM-A , 1 , 2003. (与第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter1 中题 3 相同)

例 9 (自创题,2007. 07. 15) 设 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则

$$\frac{x(z+x)}{(y+z)(3x+y+2z)} + \frac{y(x+y)}{(z+x)(2x+3y+z)} + \frac{z(y+z)}{(x+y)(x+2y+3z)} \geqslant \frac{1}{2} \tag{14}$$

证

$$\begin{aligned} \text{式(14) 左边} &= \sum \frac{3x(z+x)(3x+2y+z)}{(3y+3z)(3x+y+2z)(3x+2y+z)} \geqslant \\ &\sum \frac{3x(z+x)(3x+2y+z)}{8(x+y+z)^3} = \\ &\frac{9\sum x^3 + 12\sum xy^2 + 9\sum x^2y + 18xyz}{8(\sum x)^3} \end{aligned}$$

因此,要证式(14),只需证

$$9\sum x^3 + 12\sum xy^2 + 9\sum x^2y + 18xyz \geqslant 4(\sum x)^3 \tag{①}$$

$$\begin{aligned} \text{式①左边} - \text{右边} &= 5\sum x^3 - 3\sum x^2y - 6xyz = \\ &2(\sum x^3 - 3xyz) + 3(\sum x^3 - \sum x^2y) = \\ &2(\sum x^3 - 3xyz) + 2\sum x(x-y)^2 + \sum y(x-y)^2 \geqslant \\ &0 \end{aligned}$$

ⅱ) 当$(\sum a)^2 \leqslant 4\sum bc$时,令$s_1 = \sum a = 1, s_2 = \sum bc, s_3 = abc, s_2 = \frac{1-w^2}{3} \geqslant \frac{1}{4}$,则由第七章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中推论3,有$s_3 \geqslant \frac{1-3w^2-2w^3}{27}$,于是,要证式①,只要证

$$\frac{1-w^2}{3}-4\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^2 \geqslant \frac{1-3w^2-2w^3}{27}\left(1-12\cdot\frac{1-w^2}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$(1+w)(1-2w)^2 \geqslant 0$$

故式①成立.

综上,式(16)获证,由以上证明易知取等号条件.

例12 (国家集训队测试试题(三),2006.3.22上午8:30—12:30,沈阳)设$x_1, x_2, \cdots, x_n$是正数,且$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$,求证

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n+1}} \tag{17}$$

证一

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+x_i}}\right) &= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+x_i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_i}}\right) \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+x_i}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+x_i}}\right] \leqslant \\ &\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\left[\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+x_i}}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(1+x_i)}}\right] = \\ &\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\left[\sqrt{n(n+1)}-\frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)^2}{\sqrt{n(n+1)}}\right]\end{aligned}$$

令$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} = y$,则$y \leqslant \sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i} = \sqrt{n}$,于是,只需证

$$y\left[\sqrt{n(n+1)}-\frac{y^2}{\sqrt{n(n+1)}}\right] \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow$$

$$y^3-n(n+1)y+n^2\sqrt{n} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(y-\sqrt{n})(y+\sqrt{n}y-n^2) \geqslant 0 \tag{①}$$

因为

$$(y-\sqrt{n})\leqslant 0$$

$$y^2+\sqrt{n}y-n^2\leqslant n+n-n^2=2n-n^2\leqslant 0$$

所以式①成立,故式(17)成立.

证二 (2006年8月24日,笔者在华南师大附中授课时,朱修能同学提供)条件同原例,另有 $0\leqslant\lambda\leqslant n$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_i}}\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n+\lambda}} \tag{18}$$

由于

$$\begin{aligned}(\sum\sqrt{x_1})^2&\leqslant\sum(1+\lambda x_1)\cdot\sum\frac{x_1}{1+\lambda x_1}=\frac{(n+\lambda)}{\lambda}\cdot\sum\frac{\lambda x_1}{1+\lambda x_1}=\\&\frac{(n+\lambda)}{\lambda}\cdot\sum(1-\frac{1}{1+\lambda x_1})=\\&\frac{(n+\lambda)}{\lambda}\cdot(n-\sum\frac{1}{1+\lambda x_1})\end{aligned}$$

又

$$\sum\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}}\leqslant\sqrt{n\cdot\sum\frac{1}{1+\lambda x_1}}$$

因此,令

$$\sum\frac{1}{1+\lambda x_1}=A$$

$$\begin{aligned}\text{式(18)左边}&\leqslant\sqrt{\frac{(n+\lambda)}{\lambda}\cdot(n-\sum\frac{1}{1+\lambda x_1})}\cdot\sqrt{n}\cdot\sqrt{\sum\frac{1}{1+\lambda x_1}}=\\&\sqrt{\frac{(n+\lambda)}{\lambda}}\cdot\sqrt{(n-A)\cdot A}\end{aligned} \tag{②}$$

又因为 $\sum\frac{1}{1+\lambda x_1}\geqslant\frac{n^2}{\sum(1+\lambda x_1)}=\frac{n^2}{n+\lambda}\geqslant\frac{n}{2}$,而函数 $f(x)=(n-x)x$ 为开口向下抛物线,对称轴为 $x=\frac{n}{2}$,而当 $\lambda\in(0,n]$ 时,有 $\frac{n^2}{n+\lambda}\geqslant\frac{n}{2}$,因此,当 $x\leqslant\frac{n}{2}\leqslant\frac{n^2}{n+\lambda^2}$ 时,有 $f(x)\leqslant f(\frac{n^2}{n+\lambda})$,故

$$\text{式②右边}\leqslant\sqrt{\frac{n(n+\lambda)}{\lambda}}\sqrt{f(\frac{n^2}{n+\lambda})}=\frac{n^2}{\sqrt{n+\lambda}}$$

取 $\lambda=1$,即为原例12中式(17).

例13 设 $x,y,z>-1$,证明

$$\frac{1+x^2}{1+y+z^2}+\frac{1+y^2}{1+z+x^2}+\frac{1+z^2}{1+x+y^2}\geqslant 2 \tag{19}$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(19)取等号.

证 记$1+x^2=u,1+y^2=v,1+z^2=w$.

由于$0<1+y+z^2\leqslant\frac{v}{2}+w,0<1+z+x^2\leqslant\frac{w}{2}+u,0<1+x+y^2\leqslant\frac{u}{2}+v$,于是,只要对正数$u,v,w$证明

$$\frac{u}{v+2w}+\frac{v}{w+2u}+\frac{w}{u+2v}\geqslant 1 \tag{※}$$

由柯西不等式,有

$$[u(v+2w)+v(w+2u)+w(u+2v)]\cdot\left(\frac{u^2}{u(v+2w)}+\frac{v^2}{v(w+2u)}+\frac{w^2}{w(u+2v)}\right)\geqslant (u+v+w)^2$$

又 $u(v+2w)+v(w+2u)+w(u+2v)=3\sum vw\leqslant(u+v+w)^2$

故式(※)成立.

例14 设$x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,则

$$\sum\frac{x}{1-yz}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{20}$$

当且仅当$x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,式(20)取等号.

证一 令$x=\frac{\sqrt{3}}{3}a,y=\frac{\sqrt{3}}{3}b,z=\frac{\sqrt{3}}{3}c$,则式(19)等价于$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且$a^2+b^2+c^2\leqslant 3$,则

$$\sum\frac{a}{3-bc}\leqslant\frac{3}{2} \tag{※}$$

今证式(※)成立,有

$$\sum\frac{a}{3-bc}\leqslant\sum\frac{a}{3-\frac{b^2+c^2}{2}}\leqslant\sum\frac{a}{3-\frac{3-a^2}{2}}=\sum\frac{2a}{3+a^2}=$$

$$\sum\frac{2}{\frac{2}{a}+(\frac{1}{a}+a)}\leqslant\sum\frac{a}{1+a}=\frac{\sum a(1+b)(1+c)}{\prod(1+a)}=$$

$$\frac{\sum a+2\sum bc+3abc}{1+\sum a+\sum bc+abc}$$

于是,要证式(※),只要证

$$3(1+\sum a+\sum bc+abc)\geqslant 2(\sum a+2\sum bc+3abc)\Leftrightarrow$$

$$3+\sum a-\sum bc-3abc\geqslant 0$$

因为

$$3-\sum bc\geqslant \sum a^2-\sum bc\geqslant 0$$

$$\sum a-3abc\geqslant \sqrt{\frac{\sum a^2}{3}}\sum a-3abc\geqslant 0$$

所以上式成立,故式(※)成立.

证二

$$\sum \frac{x}{1-yz}\leqslant \sum \frac{x}{1-\frac{y^2+z^2}{2}}=\sum \frac{2x}{2-y^2-z^2}\leqslant \sum \frac{2x}{1+x^2}=$$

$$\sum \frac{2x}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+x^2}\leqslant \sum \frac{2x}{4\sqrt[4]{\frac{x^2}{3^3}}}=\sum \frac{\sqrt[4]{27x^2}}{2}=$$

$$\sum \frac{\sqrt{3\sqrt{3}x}}{2}=\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}\cdot \sum \sqrt{x}\leqslant \frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}\cdot \sqrt{3\sum x}\leqslant$$

$$\frac{\sqrt{3\sqrt{3}}}{2}\cdot \sqrt{3\sqrt{3\sum x^2}}\leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

例 15 设 $a,b,c\in \mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=3$,求证

$$\left(\sum \frac{1}{a}\right)^2\geqslant 3\sum a^2 \tag{21}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(21)取等号.

证 去证更强式

$$\sum \frac{1}{bc}\geqslant \sum a^2 \tag{22}$$

$$\text{式(22)}\Leftrightarrow \sum a\geqslant abc\sum a^2\Leftrightarrow \left(\sum a\right)^5\geqslant 81abc\sum a^2$$

此即为以上例 8 中式(13).

例 16 设 $a,b,c,d\in \mathbf{R}^+$,且 $abcd=1$,求证

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\geqslant 1 \tag{23}$$

当且仅当 $a=b=c=d=1$ 时,式(23)取等号.

证 先证

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}\geqslant \frac{1}{1+\sqrt{(ab)^3}} \tag{24}$$

式(24)等价于,对于 $x,y\in\mathbf{R}^{+}$,有

$$\frac{1}{1+x^2+x^4+x^6}+\frac{1}{1+y^2+y^4+y^6}\geqslant\frac{1}{1+x^3y^3}\qquad(※)$$

式(※)$\Leftrightarrow(1+y^2+y^4+y^6+1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3y^3)\geqslant$

$$(1+y^2+y^4+y^6)(1+x^2+x^4+x^6)\Leftrightarrow$$

$$1+2x^3y^3+x^3y^3(x^2+y^2)+x^3y^3(x^4+y^4)+x^3y^3(x^6+y^6)\geqslant$$

$$x^2y^2+x^4y^4+x^6y^6+x^2y^2(x^2+y^2)+x^2y^2(x^4+y^4)+$$

$$x^4y^4(x^2+y^2)\Leftrightarrow$$

$$(1-x^2y^2-x^4y^4+x^6y^6)+x^3y^3[x^4+y^4-xy(x^2+y^2)]+$$

$$x^3y^3[x^6+y^6-2x^3y^3]\geqslant x^2y^2(x^2+y^2-2xy)+$$

$$x^2y^2[x^4+y^4-xy(x^2+y^2)]\Leftrightarrow$$

$$(1-x^2y^2)^2(1+x^2y^2)+x^3y^3(x-y)^2(x^2+y^2+xy)+$$

$$x^3y^3(x-y)^2(x^2+y^2+xy)^2\geqslant x^2y^2(x-y)^2+$$

$$x^2y^2(x-y)^2(x^2+y^2+xy)\Leftrightarrow$$

$$(1-x^2y^2)^2(1+x^2y^2)+x^3y^3(x-y)^2(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2+xy+1)\geqslant$$

$$x^2y^2(x-y)^2(x^2+y^2+xy+1)\Leftrightarrow$$

$$(1-xy)^2(1+xy)^2(1+x^2y^2)\geqslant x^2y^2(x-y)^2(x^2+y^2+xy+1)$$

$$[1-xy(x^2+y^2+xy)]$$

若 $1-xy(x^2+y^2+xy)\leqslant 0$,则上式显然成立;若 $1-xy(x^2+y^2+xy)\geqslant 0$,这时

上式右边 $=x^2y^2(x-y)^2(x^2+y^2+xy+1)[1-xy(x^2+y^2+xy)]=$

$$\frac{1}{2}[xy(x^2+xy+y^2)-3x^2y^2][xy(x^2+xy+y^2)+xy]$$

$$[2-2xy(x^2+xy+y^2)]\leqslant\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2+xy-3x^2y^2}{3}\right)^3=$$

(应用均值不等式)

$$\frac{(1-xy)^3(2+3xy)^3}{54}$$

因此只需证

$$(1-xy)(2+3xy)^3\leqslant 54(1+xy)^2(1+x^2y^2)$$

此式易由以下得到,即

$$54(1+xy)^2(1+x^2y^2)\geqslant 27(1+xy)^4=(1+xy)(3+3xy)^3>$$

$$(1-xy)(2+3xy)^3$$

故式(※)成立,从而式(24)成立.

同理有

$$\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\geqslant\frac{1}{1+\sqrt{(cd)^3}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{(ab)^3}}}=$$

$$\frac{\sqrt{(ab)^3}}{1+\sqrt{(ab)^3}}$$

因此

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\geqslant$$

$$\frac{1}{1+\sqrt{(ab)^3}}+\frac{\sqrt{(ab)^3}}{1+\sqrt{(ab)^3}}=1$$

式(23)较以下式(25)强

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{1}{(1+d)^3}\geqslant\frac{1}{2} \tag{25}$$

其中,$a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$,且 $abcd=1$,当且仅当 $a=b=c=d=1$ 时,式(25)取等号.

注 原式见第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter8 题27.

例 17 (自创题,2005.07.17)设 $a,b,c,\geqslant 0,x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0,a\geqslant x,ay+bx\geqslant 2xy,ayz+bxz+cxy\geqslant 3xyz,n$ 为正整数,则

$$a^n+b^n+c^n\geqslant x^n+y^n+z^n \tag{26}$$

证 若 $x\geqslant 0,y=z=0$,式(26)成立.

若 $x\geqslant y>0,z=0$,记 $\frac{a}{x}=\lambda,\frac{b}{y}=\mu$,则 $\lambda\geqslant 1,\lambda+\mu\geqslant 2$,且

$$\begin{aligned}&a^n+b^n+c^n-x^n-y^n-z^n\geqslant a^n+b^n-x^n-y^n=\\&(\lambda x)^n+(\mu y)^n-x^n-y^n=(\lambda^n-1)x^n+(\mu^n-1)y^n\geqslant\\&(\lambda^n-1)y^n+(\mu^n-1)y^n=(\lambda^n+\mu^n-2)y^n\geqslant\\&[(\frac{x+y}{2})^n-2]y^n\geqslant 0\end{aligned}$$

若 $x\geqslant y\geqslant z>0$,记 $\frac{a}{x}=\lambda,\frac{b}{y}=\mu,\frac{c}{z}=\nu$,则由已知条件有 $\lambda\geqslant 1,\lambda+\mu\geqslant 2,\lambda+\mu+\nu\geqslant 3$. 又由 $n\geqslant 1$,知有 $\lambda^n\geqslant 1,\lambda^n+\mu^n\geqslant 2,\lambda^n+\mu^n+\nu^n\geqslant 3$. 所以

$$\begin{aligned}a^n+b^n+c^n-x^n-y^n-z^n&=(\lambda x)^n+(\mu y)^n+(\nu z)^n-x^n-y^n-z^n=\\&(\lambda^n-1)x^n+(\mu^n-1)y^n+(\nu^n-1)z^n\geqslant\\&(\lambda^n-1)y^n+(\mu^n-1)y^n+(\nu^n-1)z^n=\\&(\lambda^n+\mu^n-2)y^n+(\nu^n-1)z^n\geqslant\end{aligned}$$

$$(\lambda^n + \mu^n - 2)z^n + (\nu^n - 1)z^n =$$
$$(\lambda^n + \mu^n + \nu^n - 3)z^n \geqslant 0$$

注 下面是本题的一个推广

设 $x_i, \lambda_i \in \overline{\mathbf{R}^-}(i = 1,2,L,n), x_1 \geqslant x_2 \geqslant L \geqslant x_n \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant 1, \lambda_1 + \lambda_2 \geqslant 2, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \geqslant 3, \cdots, \lambda_1 + \lambda_2 + L + \lambda_n \geqslant n, \alpha \geqslant 1$,则

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i x_i)^\alpha \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^\alpha \tag{27}$$

仿上证法,易证式(27).

第四章 应用基本不等式证明不等式

基本不等式是指已被人们证明了的较为常用的不等式，它常被当做定理，用于证明其他一些不等式.

基本不等式在许多不等式专著中都作过介绍. 这里给出几个常用的基本不等式.

1. 平均值不等式

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正实数，记

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}},\ G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},\ Q_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$

分别称 H_n, G_n, A_n, Q_n 为这 n 个正数的调和平均、几何平均、算术平均和平方平均，则有

$$H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant Q_n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号.

2. 柯西(Cauchy)不等式

设 $a_i, b_i \in \mathbf{R}(i = 1,2,\cdots,n)$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

当数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$ 不全为零时,当且仅当 $b_i = \lambda a_i (i = 1,2,\cdots, n, \lambda \neq 0)$ 时取等号.

变式:$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \geqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2}$.

3. 排序不等式

设两组实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n; b_1, b_2, \cdots, b_n$,满足 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,则有

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1 \leqslant \quad \text{(反序和)}$$
$$a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \cdots + a_n b_{i_n} \leqslant \quad \text{(乱序和)}$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \quad \text{(同序和)}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$,或 $b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时取等号.

4. 琴生(Jensen)不等式

设连续函数 $f(x)$ 的定义域为 (a,b),如果对于 (a,b) 内的任意两个数 x_1,x_2,都有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数.若上式不等式反号,则称 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凹函数.

若 $f(x)$ 为 (a,b) 上的凸函数,则对于任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$ 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号.

若为 (a,b) 上的凹函数,则对于任意 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$ 有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号.

5. 贝努利(Bernoulli)不等式

设 $x > -1$,若 $\alpha < 0$,或 $\alpha > -1$,则

$$(1+x)^{\alpha} \geqslant 1+\alpha x$$

若$0<\alpha<1$,则

$$(1+x)^{\alpha} \leqslant 1+\alpha x$$

当且仅当$x=0$时,以上两式均取等号.

6. 赫尔德(Hölder)不等式

设$a_i,b_i,\cdots,l_i \in \mathbf{R}^+ \ (i=1,2,\cdots,n)$,又$\alpha,\beta,\cdots,\lambda \in \mathbf{R}^+$,且$\alpha+\beta+\cdots+\lambda=1$,则有

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{\alpha} b_i^{\beta} \cdots l_i^{\lambda} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^{\beta} \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)^{\lambda}$$

当且仅当$\dfrac{a_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i}=\dfrac{b_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i}=\cdots=\dfrac{l_k}{\sum\limits_{i=1}^{n} l_i}(k=1,2,\cdots,n)$时取等号.

特别地,当$\alpha=\beta=\cdots=\lambda=\dfrac{1}{n}$时,有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i b_i \cdots l_i)^{\frac{1}{n}}\right]^{n} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \cdots \left(\sum_{i=1}^{n} l_i\right)$$

7. 切比雪夫(Chebyshev)不等式

设两组实数$a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n$,若满足$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$或$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$,则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

若满足$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n, b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n$,或$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$,$b_1 \leqslant b_2 \leqslant \cdots \leqslant b_n$,则有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$,或$b_1=b_2=\cdots=b_n$时以上两式均取等号.

8. 加权幂平均不等式

设$a_i,p_i \in \mathbf{R}^+ \ (i=1,2,\cdots,n)$,$r,s \in \mathbf{R}$,且$r<s$,则

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{r}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i a_i^{s}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}\right)^{\frac{1}{s}}$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时取等号.

9. 设 $x,y,z,\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}$,且 $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi\ (k\in \mathbf{Z})$,则

i)

$$yz\cos\alpha + zx\cos\beta + xy\cos\gamma \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

当且仅当 $\frac{\sin\alpha}{x}=\frac{\sin\beta}{y}=\frac{\sin\gamma}{z}$ 时取等号.

ii)

$$yz\sin^2\alpha + zx\sin^2\beta + xy\sin^2\gamma \leqslant \frac{1}{4}(x+y+z)^2$$

当且仅当 $\frac{\sin 2\alpha}{x}=\frac{\sin 2\beta}{y}=\frac{\sin 2\gamma}{z}$ 时取等号.

例 1 (2005 年. IMO. 46) 已知 $x,y,z\in \mathbf{R}^+$,且 $xyz\geqslant 1$,求证

$$\sum \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\geqslant 0 \tag{1}$$

证一 应用柯西不等式.

原式等价于

$$\sum x^2\cdot\sum\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant 3 \tag{※}$$

因为

$$(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)\geqslant(\sqrt{x^4\cdot xyz}+y^2+z^2)^2\geqslant(\sum x^2)^2$$

所以

$$\frac{\sum x^2}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{y^2+z^2+yz}{\sum x^2}$$

类似还有两式,所以

$$\sum x^2\cdot\sum\frac{1}{x^5+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sum(y^2+z^2+yz)}{\sum x^2}=\frac{2\sum x^2+\sum yz}{\sum x^2}\leqslant$$

$$\frac{3\sum x^2}{\sum x^2}=3$$

证二 若 $x\geqslant 1$,则 $x^5-x^2\geqslant 0$,于是

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=\frac{x^2-\frac{1}{x}}{x^2+\frac{y^2+z^2}{x^3}}\geqslant\frac{x^2-\frac{1}{x}}{\sum x^2}$$

若 $x<1$,则 $x^5-x^2<0$,于是

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{y^2 + z^2}{x^3}} \geqslant \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{\sum x^2}$$

所以

$$\sum \frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} \geqslant \sum \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{\sum x^2} = \frac{\sum x^2 - \sum \frac{1}{x}}{\sum x^2} \geqslant \frac{\sum x^2 - \sum yz}{\sum x^2} \geqslant 0$$

例 2 设 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，且 $x + y + z = 1$，求证

$$\frac{z}{x + y^2} + \frac{x}{y + z^2} + \frac{y}{z + x^2} \geqslant \frac{9}{4} \tag{2}$$

当且仅当 $x = y = z = \frac{1}{3}$ 时，式(2) 取等号.

证一 由柯西不等式，有

$$[(zx + y^2z) + (xy + z^2x) + (yz + x^2y)] \cdot$$
$$[\frac{z^2}{zx + y^2z} + \frac{x^2}{xy + z^2x} + \frac{y^2}{yz + x^2y}] \geqslant$$
$$(\sum x)^2 = 1$$

因此，要证式(2)，只要证

$$\sum yz + (x^2y + y^2z + z^2x) \leqslant \frac{4}{9} \tag{①}$$

因为

$$\frac{4}{9} - \sum yz - (x^2y + y^2z + z^2x) =$$
$$\frac{4}{9}(\sum x)^3 - \sum x \sum yz - \frac{1}{2}(\sum x \sum yz - 3xyz) -$$
$$\frac{1}{2}(x - y)(y - x)(x - z) =$$
$$\frac{1}{18}\{8(\sum x)[(\sum x)^2 - 3\sum yz] - 3(\sum x \sum yz - 9xyz)\} -$$
$$\frac{1}{2}(x - y)(y - z)(x - z) =$$
$$\frac{1}{18}[4\sum x \cdot \sum (y - z)^2 - 3\sum x(y - z)^2] -$$
$$\frac{1}{2}(x - y)(y - z)(x - z) =$$
$$\frac{1}{18}\sum (x + 4y + 4z)(y - z)^2 -$$

$$\frac{1}{2}(x-y)(y-z)(x-z)$$

所以要证式①,只需证

$$\sum(x+4y+4z)(y-z)^2 \geqslant 9|(x-y)(y-z)(x-z)| \quad ②$$

但

$$\sum(x+4y+4z)(y-z)^2 \geqslant 4\sum(y+z)(y-z)^2 \geqslant$$
$$4\sum|y-z|^3 \geqslant 12|(x-y)(y-z)(x-z)| \geqslant$$
$$9|(x-y)(y-z)(x-z)|$$

故式②成立,从而式①成立.

证二 由以上证法一中式①及 $\sum x\sum x^2 \geqslant 3(x^2y+y^2z+zx^2)$ 知,只需证

$$\frac{4}{9}-\sum yz-\frac{1}{3}\sum x\sum x^2 \geqslant 0$$

即

$$\frac{4}{9}(\sum x)^2-\sum yz-\frac{1}{3}\sum x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (\sum x)^2 \geqslant 3\sum yz$$

注 注意 $\sum x\cdot\sum x^2 \geqslant 3(x^2y+y^2z+z^2x)$(或 $xy^2+yz^2+zx^2$)的应用.

例 3 (2006 年国家集训队测试题)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x+y+z=1$,求证

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

证 由柯西不等式知,要证式(3)成立,只需证

$$(xy+yz+zx)\cdot\left(\frac{xy}{xy+yz}+\frac{yz}{yz+zx}+\frac{zx}{zx+xy}\right) \leqslant \frac{1}{2} \quad ①$$

$$\text{式①} \Leftrightarrow \sum yz\cdot\sum\frac{x}{z+x}=[xz+y(z+x)]\sum\frac{x}{z+x}=$$
$$\sum\frac{x^2z}{z+x}+\sum xy \leqslant \frac{1}{2}(\sum x)^2 \Leftrightarrow$$
$$2\sum\frac{x^2z}{z+x} \leqslant \sum x^2$$

但 $2\sum\frac{x^2z}{z+x} \leqslant \sum\frac{x(z+x)}{2} \leqslant \sum x^2$,故上式成立,从而式①成立.

注 另一证法见命题者的证明.

例 4 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$,求证

$$\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} \geqslant \frac{3}{4} \quad (4)$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(4)取等号.

证一 $\sum(1+y)\cdot\sum(1+z)\cdot\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant(\sum x)^3$

于是，只要证

$$\frac{(\sum x)^3}{(3+\sum x)^2}\geqslant\frac{3}{4}\quad(\text{此式易证，略})$$

证二 $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geqslant\frac{3}{4}x$，类似还有二式，所以

$$\sum\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}\geqslant\frac{3}{4}\sum x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sum x=\frac{1}{2}\sum x-\frac{3}{4}\geqslant$$
$$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

注 由证二还可证得

$$\sum\frac{x^3}{(1+x)(1+y)}\geqslant\frac{3}{4}\tag{5}$$

例5 已知 $a_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$，求证

$$\frac{1}{a_1(1+a_2)}+\frac{1}{a_2(1+a_3)}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}(1+a_n)}+\frac{1}{a_n(1+a_1)}\geqslant\frac{n^3}{n+1}\tag{6}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时，式(6)取等号.

证 因为

$$\frac{1}{a_1(1+a_2)}+\frac{n^3}{n+1}a_1+\frac{n^3(1+a_2)}{(n+1)^2}\geqslant\frac{3n^2}{n+1}$$

所以

$$\sum\frac{1}{a_1(1+a_2)}\geqslant\frac{3n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n+1}\sum a_1-\frac{n^3}{(n+1)^2}\sum(1+a_2)=$$
$$\frac{3n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n+1}-\frac{n^3}{n+1}=\frac{n^3}{n+1}$$

例6 设 $a,b,c,x,y,z\in\mathbf{R}$，且 $\sum a\geqslant0,\sum bc\geqslant0$，求证

$$a(y-z)^2+b(z-x)^2+c(x-y)^2\geqslant0\tag{7}$$

证一 先证这时 a,b,c 中任意两数之和非负. 用反证法.

若 $b+c<0$，由 $a+b+c\geqslant0$ 知，$a>0$，因此 $a(b+c)<0$.

又因为 $\sum bc=bc+a(c+b)\geqslant0$

所以 $bc>0$

所以 $b<0,c<0$

所以 $a+c>0$

因为 $a > 0,\ c < 0$

所以 $ac < 0$

所以 $\sum bc = ca + b(c+a) < 0$,这与已知 $\sum bc \geqslant 0$ 矛盾,故 $b + c \geqslant 0$. 同理可证 $c + a \geqslant 0, a + b \geqslant 0$.

今证式(7). 这时式(7) 可改写成

$$(b+c)u^2 + 2buv + (a+b)v^2 \geqslant 0 \qquad ①$$

其中,$u = x - y, v = y - z$.

若 $b + c = 0$,则 $a \geqslant 0$,又由 $\sum bc = a(b+c) + bc \geqslant 0$,知 $bc \geqslant 0$,由此有 $-b^2 \geqslant 0, -c^2 \geqslant 0$,故 $b = c = 0$,这时式 ① 成立.

若 $b + c > 0$,于是式 ① 的判别式

$$\Delta = [4b^2 - 4(b+c)(a+b)]v^2 = -4(\sum bc)v^2 \leqslant 0$$

因此式 ① 成立,式(7) 获证.

证二 若 $b+c, c+a, a+b$ 中至少有一个为零,如 $b + c = 0$,则以上证一中已证式(7) 成立.

当 $b+c, c+a, a+b$ 均不为零时,因为

$$\sum bc \geqslant 0$$

所以 $b^2 + \sum bc \geqslant 0$

即 $(a+b)(b+c) \geqslant 0$

同理有

$$(b+c)(c+a) \geqslant 0$$

$$(c+a)(a+b) \geqslant 0$$

又由于 $a + b + c \geqslant 0$,因此 $b+c, c+a, a+b$ 均大于零,下面证法同证一.

例 7 (自创题,1988.07.07) 在 $\triangle ABC$ 中,求证

$$\sum \tan^2 \frac{A}{2} \geqslant \frac{16}{9}\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2 \qquad (8)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(8) 取等号.

证

$$\sum \tan^2 \frac{A}{2} \geqslant \frac{4}{9}\left(\sum \sin^2 A\right) \cdot \left(\sum \tan^2 \frac{A}{2}\right) =$$

$$\frac{16}{9}\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\cos^2 \frac{A}{2}\right) \cdot \left(\sum \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}}\right) \geqslant$$

$$\frac{16}{9}\left(\sum \sin^2 \frac{A}{2}\right)^2$$

例 8 （自创题,1987.07.20）设 $x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$,则

$$8+\sum x\cdot\sum\frac{1}{x}\geqslant\frac{9(\sum x)^2}{xy+xz+xw+yz+yw+zw}\tag{9}$$

当且仅当 $x=y=z=w$ 时,式(9) 取等号.

证

$$\sum x\cdot\sum\frac{1}{x}=4+\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{x}{w}+\frac{w}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{w}+\frac{w}{y}\right)+\left(\frac{z}{w}+\frac{w}{z}\right)\right]=$$

$$-8+\left[\frac{(x+y)^2}{xy}+\frac{(x+z)^2}{xz}+\frac{(x+w)^2}{xw}+\frac{(y+z)^2}{yz}+\frac{(y+w)^2}{yw}+\frac{(z+w)^2}{zw}\right]\geqslant$$

$$-8+\frac{9(\sum x)^2}{xy+xz+xw+yz+yw+zw}$$

注 式(9) 可推广为:设 $x_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{(n-1)^2(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant j}x_ix_j}-(n^2-2n)\tag{10}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,式(10) 取等号.

若记 $s_1=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i,s_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j,s_n=x_1x_2\cdots x_n,s_{n-1}=s_n\sum\frac{1}{x_1}$,则式(10) 可写成如下形式,即

$$s_1s_2s_{n-1}+(n^2-2n)s_2s_n\geqslant(n-1)^2s_1^2s_n$$

注 上式与第七章“其他不等式证明例子”中例 46 的结果不分强弱.

例 9 （自创题,2007.07.20）设 $x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$,则

$$\sum x\cdot\sum\frac{1}{x}\leqslant4+\frac{(xy+xz+xw+yz+yw+zw)^2}{3xyzw}\tag{11}$$

当且仅当 x,y,z,w 中有三个相等时,式(11) 取等号.

证

$$\sum x\cdot\sum\frac{1}{x}=4+\sum\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=$$

$$4+\left[\left(\frac{x}{w}+\frac{w}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right]+$$

$$\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{w}+\frac{w}{z}\right)\right]+\left[\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{w}+\frac{w}{y}\right)\right]=4+$$

$$\frac{(xy+zw)(xz+yw)+(xz+yw)(xw+yz)+(xy+zw)(xw+yz)}{xyzw}\leqslant$$

$$4+\frac{(xy+xz+xw+yz+yw+zw)^2}{3xyzw}$$

即得式(11). 由证明中易知取等号条件.

注　若记

$$s_1=x+y+z+w$$

$$s_2=xy+xz+xw+yz+yw+zw$$

$$s_3=yzw+xzw+xyw+xyz$$

$$s_4=xyzw$$

则式(11) 又可写作

$$s_2^2+12s_4\geqslant 3s_1s_3$$

(此式参见《中学数学教学》(安徽),2007 第 4 期,杨学枝文:“从一道不等式题谈起”).

例 10　(自创题,1985. 07. 29) 设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}^+$,则

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\frac{x_4}{x_1}\geqslant\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_4}{x_1+x_2}+2\qquad(12)$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4$ 时,式(12) 取等号.

证

式(12) 左边 - 右边 =

$$\frac{x_1x_3}{x_2(x_2+x_3)}+\frac{x_2x_4}{x_3(x_3+x_4)}+\frac{x_3x_1}{x_4(x_4+x_1)}+\frac{x_4x_2}{x_1(x_1+x_2)}-2=$$

$$x_1x_2x_3x_4\left[\frac{\frac{1}{x_2^2}}{(x_2+x_3)x_4}+\frac{\frac{1}{x_3^2}}{(x_3+x_4)x_1}+\frac{\frac{1}{x_4^2}}{(x_4+x_1)x_2}+\frac{\frac{1}{x_1^2}}{(x_1+x_2)x_3}\right]-2\geqslant$$

$$x_1x_2x_3x_4\cdot\frac{\left(\sum_{i=1}^4\frac{1}{x_i}\right)^2}{x_1x_3+x_2x_4+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j}-2=$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^4\frac{1}{x_i}\right)^2}{\frac{1}{x_2x_4}+\frac{1}{x_1x_3}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{x_ix_j}}-2\geqslant$$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^4\frac{1}{x_i}\right)^2}{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^4\frac{1}{x_i^2}+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{x_ix_j}}-2=$$

$2-2=0$

注　本题有以下等价命题：

设 $a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbf{R}^+$，且 $a_1a_2a_3a_4=1$，则

$$\frac{a_1}{1+a_2}+\frac{a_2}{1+a_3}+\frac{a_3}{1+a_4}+\frac{a_4}{1+a_1}\geqslant 2$$

证　因为　$\sum a_1(1+a_2)\cdot\sum\frac{a_1}{1+a_2}\geqslant(\sum a_1)^2$

所以只要证

$$(\sum a_1)^2\geqslant 2\sum a_1+2\sum a_1a_2=2\sum a_1+2(a_1+a_3)(a_2+a_4)$$

因为　$$2(a_1+a_3)(a_2+a_4)\leqslant\frac{1}{2}(\sum a_1)^2$$

所以又只需证

$$(\sum a_1)^2\geqslant 2\sum a_1+\frac{1}{2}(\sum a_1)^2\Leftrightarrow\sum a_1\geqslant 4$$

此式显然成立.

例 11　（自创题，1988.12.11）设 $x_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=\lambda\leqslant 1$，求证

$$x_1x_2\cdots x_n\geqslant\left(\frac{n}{\lambda}-1\right)^n \tag{13}$$

当且仅当 $n=2,\lambda=1$ 或 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时，式(13)取等号.

证一　令 $\frac{1}{1+x_i}=y_i$，则 $x_i=\frac{1-y_i}{y_i},i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=\lambda\leqslant 1$，同时知 $y_i\in\mathbf{R}^+,\lambda-y_i\geqslant 0,1-\lambda\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n$. 由 Hölder 不等式有

$$x_1x_2\cdots x_n=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\lambda}{y_i}+\frac{\lambda-y_i}{y_i}\right)\geqslant\left[\frac{1-\lambda}{\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}}+\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda-y_i}{y_i}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n\geqslant$$
$$\left[\frac{n(1-\lambda)}{\lambda}+n-1\right]^n=\left(\frac{n}{\lambda}-1\right)^n$$

证二　先证函数 $f(x)=\ln(\frac{1}{x}-1)(0<x\leqslant 1)$ 为凸函数，再用琴生不等式证明.

注　1. 证一参见《中等数学》，1991年第3期，杨学枝文：“一道数学竞赛题的推广”.

2. 本例有以下等价命题：

设 $x_i\in\mathbf{R}^+,i=1,2,\cdots,n,0\leqslant\lambda\leqslant 1$，则

$[(1-\lambda)x_1+x_2+\cdots+x_n][x_1+(1-\lambda)x_2+x_3+\cdots+x_n]\cdot\cdots\cdot$

$$[x_1+x_2+\cdots x_{n-1}+(1-\lambda)x_n]\geqslant(n-\lambda)^n x_1x_2\cdots x_n \qquad (14)$$

这只需在式(13)中,作置换 $\frac{1}{1+x_i}\to\frac{\lambda x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}$ 即可得到.

猜想 设 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\leqslant 1$,则

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot\left(\prod x_1\right)^{\frac{2}{n}} \qquad (15)$$

例12 (2005年全国十八所奥赛协作体学校试题)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $bc+ca+ab=1$,求证

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant\frac{1}{abc} \qquad (16)$$

证 由 $1=\sum bc\geqslant 3\sqrt[3]{(abc)^2}$ 知,可证更强式

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\leqslant\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} \qquad (17)$$

式(17)可推得

$$\sqrt[3]{bc+6ab^2c}+\sqrt[3]{ca+6abc^2}+\sqrt[3]{ab+6a^2bc}\leqslant 3 \qquad (※)$$

今证式(※).

因为
$$\sqrt[3]{bc+6ab^2c}\cdot 1\cdot 1\leqslant\frac{bc+6ab^2c+2}{3}$$

类似还有二式,所以将以上三式相加得

$$\sum\sqrt[3]{bc+6ab^2c}\leqslant\frac{1}{3}\left(\sum bc+6abc\sum a+6\right)\leqslant$$
$$\frac{1}{3}\left[\sum bc+2\left(\sum bc\right)^2+6\right]\leqslant 3$$

即得式(※).

例13 (2005,第17届亚太地区数学奥林匹克)设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=8$,则

$$\sum\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}}\geqslant\frac{4}{3} \qquad (18)$$

当且仅当 $x=y=z=2$ 时,式(18)取等号.

证

$$\sum\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^3)(1+y^3)}}=\sum\frac{x^2}{\sqrt{(1+x)(1-x+x^2)}\cdot\sqrt{(1+y)(1-y+y^2)}}\geqslant$$

$$\sum \frac{x^2}{\frac{2+x^2}{2}\cdot\frac{2+y^2}{2}}=$$

$$\sum \frac{4x^2}{(2+x^2)(2+y^2)}=$$

$$\frac{4(2\sum x^2+\sum y^2z^2)}{\prod(2+x^2)}=$$

$$\frac{4(2\sum x^2+\sum y^2z^2)}{72+4\sum x^2+2\sum y^2z^2}$$

因此,只需证

$$\frac{2\sum x^2+\sum y^2z^2}{72+4\sum x^2+2\sum y^2z^2}\geqslant\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2\sum x^2+\sum y^2z^2\geqslant 72$$

此式易由 $\sum x^2\geqslant 12,\sum y^2z^2\geqslant 48$ 知成立.

例 14 (自创题,2005.12.16) $\triangle ABC$ 三边为 a,b,c,外接圆半径为 R,则

$$1+\frac{|(a-b)(b-c)(a-c)|}{abc}\leqslant\frac{3\sqrt{3}R}{\sum a} \tag{19}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(19) 取等号.

证 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则式(19) 变为

$$\frac{abc\cdot\sum a}{abc}+\frac{(\sum a)(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}\leqslant 3\sqrt{3}R\Leftrightarrow$$

$$\frac{ab(a^2-b^2+c^2)+bc(a^2+b^2-c^2)+ca(-a^2+b^2+c^2)}{abc}\leqslant 3\sqrt{3}R\Leftrightarrow$$

$$\sum \sin A\cos B\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4} \tag{20}$$

今证式(20) 成立.

由所设 $a\geqslant b\geqslant c$,有 $\sin A\geqslant\sin B\geqslant\sin C,\cos A\leqslant\cos B\leqslant\cos C$,因此,根据排序不等式得到

$$\sin A\cos B+\sin B\cos C+\sin C\cos A\leqslant$$

$$\sin A\cos C+\sin B\cos B+\sin C\cos A=$$

$$\sin B+\sin B\cos B=4\sin\frac{B}{2}\cos^3\frac{B}{2}=$$

$$\sqrt{\frac{16}{3}\cdot 3\sin^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}\cdot\cos^2\frac{B}{2}}\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

当且仅当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时取等号,从而式(20)成立,式(19)获证.

注 式(20)又等价于下面代数不等式:设 $x,y,z\in\mathbf{R}$,且 $y+z,z+x,x+y,\sum yz$ 均为正数,则

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{\prod(y+z)}{\sum yz}} \tag{21}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,式(20)取等号.

2. 在式(21)中作置换:$x\to yz,y\to zx,z\to xy$,可得下面命题.

命题 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{x+y+z}} \quad ①$$

$$\sqrt{\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{x+y+z}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y+z) \quad ②$$

由此即得本章例3中的式(3).

3. 上面命题中式①其另一证法如下.

设 $x+y+z=1$,则式①等价于

$$f=\sqrt{\frac{x}{(z+x)(x+y)}\cdot\frac{xy}{(y+z)(z+x)}}+\sqrt{\frac{y}{(x+y)(y+z)}\cdot\frac{yz}{(z+x)(x+y)}}+\sqrt{\frac{z}{(y+z)(z+x)}\cdot\frac{xy}{(x+y)(y+z)}}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

由于 f 关于 x,y,z 轮换对称,不妨设 $x=\min\{x,y,z\}$. 只须分 $x\leqslant y\leqslant z$ 和 $x\leqslant z\leqslant y$ 两种情况证明. 由于两种情况的证明本质上完全相同,故证第一种情况.

由

$$x\leqslant y\leqslant z\Rightarrow xy\leqslant zx\leqslant yz,(y+z)(z+x)\geqslant(y+z)(x+y)\geqslant(x+y)(z+x)$$

故

$$\frac{xy}{(y+z)(z+x)}\leqslant\frac{zx}{(x+y)(y+z)}\leqslant\frac{yz}{(z+x)(x+y)} \quad ③$$

又由

$$x(y+z)\leqslant y(z+x)\leqslant z(x+y)\Rightarrow$$

$$\frac{x}{(z+x)(x+y)}\leqslant\frac{y}{(x+y)(y+z)}\leqslant$$

$$\frac{z}{(y+z)(z+x)} \qquad ④$$

由式 ③、④ 及排序不等式知

$$f\leqslant\sqrt{\frac{x^2y}{(x+y)(z+x)(y+z)}}+\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}}+$$

$$\sqrt{\frac{yz^2}{(z+x)^2(x+y)(y+z)}}=\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}}+$$

$$\sqrt{\frac{y}{(x+y)(y+z)}}\leqslant$$

$$\sqrt{3[\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}+\frac{y}{4(x+y)(y+z)}+\frac{y}{4(x+y)(y+z)}]}$$

因此,要证$f\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}$,只须证

$$\frac{xyz}{(x+y)^2(y+z)^2}+\frac{y}{2(x+y)(y+z)}\leqslant\frac{9}{16}\Leftrightarrow$$

$$16xyz+8y(x+y)(y+z)\leqslant 9(x+y)^2(y+z)^2\Leftrightarrow$$

$$16xyz+8y(y+zx)\leqslant 9(y+zx)^2\Leftrightarrow$$

$$9z^2x^2+y^2\geqslant 6xyz\Leftrightarrow$$

$$(3xz-y)^2\geqslant 0$$

因此,不等式 ① 成立.

4. 式(19) 与第二章"增量比较法证明不等式" 例 10 中式(11) 不分强弱.

例 15 (2004 年中国数学冬令营选拔赛题,湖南长沙) 设 a,b,c,d 为正实数,满足 $ab+cd=1$,点 $p_i(x_i,y_i)$ $(i=1,2,3,4)$ 是以原点为圆心的单位圆上的四个点,求证

$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\leqslant$$

$$2(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}) \qquad (22)$$

证 令 $\alpha^2=ay_1+by_2+cy_3+dy_4$,$\beta^2=ax_4+bx_3+cx_2+dx_1$,则

$$\alpha^2\leqslant(ady_1^2+bcy_2^2+bcy_3^2+ady_4^2)(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a})$$

同理可得

$$\beta^2\leqslant(adx_4^2+bcx_3^2+bcx_2^2+adx_1^2)(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a})$$

注意到 $x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4),ab+cd=1$,有

$$\alpha^2+\beta^2\leqslant 2(ad+bc)(\frac{a}{d}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a})=$$
$$2(ad+bc)(\frac{ab+cd}{bd}+\frac{ab+cd}{ac})=$$
$$2(ad+bc)(\frac{1}{bd}+\frac{1}{ac})=$$
$$2(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd})$$

例16 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\geqslant\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2}}\tag{23}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(23)取等号.

证

$$2(\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2=$$
$$2\sum\frac{a^2}{a+b}+4\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum a-2\sum\sqrt{bc}=$$
$$\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}+\sum\frac{a^2-b^2}{a+b}+4\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum a-2\sum\sqrt{bc}=$$
$$\sum\frac{a^2+b^2}{a+b}+4\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum a-2\sum\sqrt{bc}=$$
$$4\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum\frac{(a+b+4\sqrt{ab})(a+b)-2(a^2+b^2)}{2(a+b)}=$$
$$4\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum\frac{-a^2-b^2+4a\sqrt{ab}+4b\sqrt{ab}+2ab}{2(a+b)}=$$
$$4\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum\frac{8ab-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4}{2(a+b)}\geqslant$$
$$4\left[\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum\frac{ab}{a+b}\right]$$

因此,要证式(23)只要证

$$\sum\frac{ab}{\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{b+c}}-\sum\frac{ab}{a+b}\geqslant 0$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$\frac{ab}{\sqrt{a+b}}\geqslant\frac{ca}{\sqrt{c+a}}\geqslant\frac{bc}{\sqrt{b+c}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{c+a}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{b+c}}$$

根据排序不等式,有

$$\sum \frac{ab}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c}} \geqslant \sum \frac{ab}{a+b}$$

因此,$\sum \frac{ab}{\sqrt{a+b} \cdot \sqrt{b+c}} - \sum \frac{ab}{a+b} \geqslant 0$,即得 式(23).

例 17 (第 47 届 IMO 第一天试题 3. 2006. 7. 12 - 13 于斯洛文尼亚,卢布尔雅那) 求最小实数 M,使得对于一切实数 a,b,c 都成立不等式

$$| ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) | \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

证一 $ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) = -(a-b)(b-c) \cdot (c-a)(a+b+c)$.

记 $a - b = x, b - c = y, c - a = z, a + b + c = s$,则

$$x + y + z = 0,\ a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}(x^2 + y^2 + z^2 + s^2)$$

原不等式可写成

$$M(x^2 + y^2 + z^2 + s^2)^2 \geqslant 9 | xyzs |$$

由 $x + y + z = 0$ 知,x,y,z 中两个同号而与另一个反号. 不妨设 $x,y \geqslant 0$. 记 $u = \frac{x+y}{2}$,则 $z^2 = 4u^2, x^2 + y^2 \geqslant 2u^2, xy \leqslant u^2$. 于是由算术 - 几何平均不等式

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + z^2 + s^2)^2 \geqslant (6u^2 + s^2)^2 = (2u^2 + 2u^2 + 2u^2 + s^2)^2 \geqslant \\ (4\sqrt[4]{2u^2 \cdot 2u^2 \cdot 2u^2 \cdot s^2})^2 = \\ 32\sqrt{2}u^3 | s | \geqslant 16\sqrt{2} | xyzs |\end{aligned}$$

即 $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ 时原不等式成立.

等号在 $s = \sqrt{2}u, x = y = u, z = -2u$,即

$$a : b : c = (\sqrt{2} + 3) : \sqrt{2} : (\sqrt{2} - 3)$$

时成立. 故所求的最小的 $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

证二 应用增量比较法,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c, a = c + \alpha + \beta, b = c + \alpha, \alpha, \beta \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\begin{aligned}\frac{\left| \sum ab(a^2 - b^2) \right|}{(\sum a^2)^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+\beta)[3c + (2\alpha+\beta)]}{[3c^2 + 2c(2\alpha+\beta) + \alpha^2 + (\alpha+\beta)^2]^2} = \\ \frac{9}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{\alpha(\alpha+\beta) \cdot \beta(\alpha+\beta) \cdot 2\alpha\beta(3c + 2\alpha + \beta)^2}}{9 \cdot [3c^2 + 2c(2\alpha+\beta) + \alpha^2 + (\alpha+\beta)^2]^2} \leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{9}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\frac{[\alpha(\alpha+\beta)+\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta(3c+2\alpha+\beta)^2]^2}{4}}{[(3c+2\alpha+\beta)^2+2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)]^2}\leqslant$$

$$\frac{9}{16\sqrt{2}}$$

(注意到 $\alpha^2+\beta^2+4\alpha\beta\leqslant 2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$).

例 18 (自创题,2003.03.03) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz\geqslant 1$,又 $\lambda\geqslant 2$,则

$$\sum\frac{1}{\lambda+x}\leqslant 1 \tag{24}$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(24) 取等号.

证一 由

$$\text{式}(24)\Leftrightarrow\sum(\lambda+y)(\lambda+z)\leqslant\sum(\lambda+x)\Leftrightarrow$$

$$3\lambda^2+2\lambda\sum x+\sum yz\leqslant\lambda^3+\lambda^2\sum x+\lambda\sum yz+xyz\Leftrightarrow$$

$$\lambda^3+(\sum x)(\lambda^2-2\lambda)+(\sum yz)(\lambda-1)-3\lambda^2+xyz\geqslant 0$$

因为

$$\lambda\geqslant 2,xyz\geqslant 1$$

所以

$$(\sum x)(\lambda^2-2\lambda)\geqslant 3(\lambda^2-2\lambda)$$

$$(\sum yz)(\lambda-1)\geqslant 3(\lambda-1)$$

所以只需证

$$\lambda^3+3\lambda^2-6\lambda+3\lambda-3-3\lambda^2+1\geqslant 0$$

即

$$(\lambda-2)(\lambda+1)^2\geqslant 0$$

由 $\lambda\geqslant 2$ 知此式成立,故式(24) 获证.

证二 因为

$$\sum\frac{1}{\lambda+x}\leqslant\sum\frac{1}{2+x}$$

所以只需证

$$\sum\frac{1}{2+x}\leqslant 1$$

下面用反证法证明上式.

令

$$\frac{1}{2+x}=a,x=\frac{1}{a}-2\geqslant 0$$

$$\frac{1}{2+y}=b,y=\frac{1}{b}-2\geqslant 0$$

$$\frac{1}{2+z}=c,z=\frac{1}{c}-2\geqslant 0$$

若 $a+b+c>1$,则

$$\prod\left(\frac{\sum a}{a}-2\right) > \prod\left(\frac{1}{a}-2\right) = \prod x \geqslant 1 \qquad (※)$$

但另一方面有

$$\prod\left(\frac{\sum a}{a}-2\right) = \frac{\prod(-a+b+c)}{\prod a} \leqslant 1$$

与式(※)矛盾,故式(24)获证.

例 19 (此问题来源于"数学驿站论坛 —— 南方学科网论坛"hanjingjun 提出)设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}} \geqslant 2 \qquad (25)$$

当且仅当 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时,式(25)取等号.

证一 由柯西不等式有

$$\left(\sum \sqrt[3]{\frac{a}{b+c}}\right) \cdot \left[\sum \sqrt[3]{a^5(b+c)}\right] \geqslant \left(\sum a\right)^2$$

由此知,要证原式成立,只需证

$$\sum \sqrt[3]{a^5(b+c)} \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum a\right)^2 \qquad ①$$

由于 $\sum \sqrt[3]{a^5(b+c)} \leqslant \sqrt[3]{\sum a \cdot \sum a \cdot \sum a^3(b+c)}$,因此,要证式①,又只需证

$$8\sum a^3(b+c) \leqslant \left(\sum a\right)^4 \qquad ②$$

但

$$\left(\sum a\right)^4 - 8\sum a^3(b+c) = \left(\sum a^2 + 2bc\right)^2 - 8\sum a^2 \cdot \sum bc + 8abc\sum a =$$
$$\left(\sum a^2 - 2\sum bc\right)^2 + 8abc\sum a \geqslant 0$$

故式②成立,从而式①成立,式(25)获证.由证明过程易得取等号条件.

证二 应用局部不等式,由

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{(b+c)^{\frac{1}{3}}} \geqslant \frac{2a^{\frac{2}{3}}}{\sum a^{\frac{2}{3}}} \qquad ①$$

等三式相加即得.而式①等价于

$$2a^{\frac{1}{3}}(b+c)^{\frac{1}{3}} \leqslant \sum a^{\frac{2}{3}} \qquad ②$$

因为 $\qquad 2a^{\frac{1}{3}}(b+c)^{\frac{1}{3}} \leqslant a^{\frac{2}{3}} + (b+c)^{\frac{2}{3}}$

所以要证式②又只需证

$$(b+c)^{\frac{2}{3}} \leqslant b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow (b+c)^2 \leqslant \left(b^{\frac{2}{3}} + c^{\frac{2}{3}}\right)^3$$

而此式易证成立,故式②成立,从而式①获证.

注 本例更一般情况参见第八章"练习"中题15.

例20 (自创题,2006.12.17)设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}\geqslant\sqrt[3]{4\sum a}\tag{26}$$

当且仅当 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时,式(26)取等号.

证一 由赫尔德不等式,有

$$\sqrt[3]{\sum a(b+c)\cdot\sum a\cdot\sum a^2}\geqslant\sum\sqrt[3]{a^4(b+c)}\qquad①$$

又由柯西不等式,有

$$\sum\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}\cdot\sum\sqrt[3]{a^4(b+c)}\geqslant(\sum a)^2\qquad②$$

由式①、②得

$$\sum\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}\cdot\sqrt[3]{2\sum a(b+c)\cdot\sum a\cdot\sum a^2}\geqslant(\sum a)^2\qquad③$$

由式③知,要证原式,只需证

$$\sqrt[3]{2\sum bc\cdot\sum a\cdot\sum a^2}\leqslant\sqrt[3]{\frac{1}{4}(\sum a)^5}\Leftrightarrow$$

$$(\sum a)^5\geqslant 8\sum bc\cdot\sum a\cdot\sum a^2\Leftrightarrow$$

$$(\sum a)^4\geqslant 8\sum bc[(\sum a)^2-2\sum bc]\Leftrightarrow$$

$$[(\sum a)^2-4\sum bc]^2\geqslant 0$$

因此原式成立,由证明过程易得取等号条件.

证二 由 $\sqrt[3]{\frac{a^2}{b+c}}\geqslant\frac{\sqrt[3]{4}a}{(a+b+c)^{\frac{2}{3}}}$ 等三式即可证得.

例21 (来自"不等式研究网站","竞赛不等式"专栏,2007年1月6日,福建陈胜利老师提出)设 $a,b,c>0$,且 $abc=1$,求证

$$\sqrt[3]{\prod(a^6+1)}\geqslant 2+\frac{1}{3}\sum(a-\frac{1}{a})^2\tag{27}$$

证 注意到条件 $abc=1$,我们有

$$式(27)\Leftrightarrow\sqrt[3]{\prod(a^4+b^2c^2)}\geqslant 2+\frac{1}{3}\sum(a-bc)^2\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{\prod(a^4+b^2c^2)}\geqslant\frac{1}{3}(\sum a^2+\sum b^2c^2)\Leftrightarrow$$

$$27\prod(a^4+b^2c^2)\geqslant(\sum a^2+\sum b^2c^2)^3\Leftrightarrow$$

$$(a^4+b^2c^2+b^2c^2+b^2c^2+a^4+a^4)\cdot$$

$$(c^2a^2+b^4+c^2a^2+b^4+c^2a^2+b^4)\cdot$$
$$(a^2b^2+a^2b^2+c^4+c^4+c^4+a^2b^2)\geqslant$$
$$(a^2+b^2+c^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)^3$$

最后一式可由赫尔德(Hölder)不等式得到,从而式(27)获证.

注 由上证明可知,原题条件可放宽为 $a,b,c\in\mathbf{R}$,当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(27)取等号.

例 22 《中学数学研究》2006 年第 12 期刊出的"一个循环对称四元不等式",在文末,作者提出了以下猜想.

猜想 设

$$n\in\mathbf{N}^+,n\geqslant 3,a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$$
$$f(x,y)=x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}$$

则

$$f(a_1,a_2)\cdot f(a_2,a_3)\cdots f(a_{n-1},a_n)\cdot f(a_n,a_1)\geqslant$$
$$[a_1a_2\cdots a_n(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1})]^n \tag{28}$$

证 应用赫尔德(Hölder)不等式,有

$$f(a_1,a_2)\cdot f(a_2,a_3)\cdots f(a_{n-1},a_n)\cdot f(a_n,a_1)=$$
$$(a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_2+\cdots+a_1^3a_2^{n-4}+a_1^2a_2^{n-3}+a_1a_2^{n-2}+a_2^{n-1})\cdot$$
$$(a_2^{n-1}+a_2^{n-2}a_3+\cdots+a_2^3a_3^{n-4}+a_2^2a_3^{n-3}+a_2a_3^{n-2}+a_3^{n-1})\cdot$$
$$(a_3^{n-1}+a_3^{n-2}a_4+\cdots+a_3^3a_4^{n-4}+a_3^2a_4^{n-3}+a_3a_4^{n-2}+a_4^{n-1})\cdot$$
$$\vdots$$
$$(a_{n-1}^{n-1}+a_{n-1}^{n-2}a_n+a_{n-1}^{n-3}a_n^2+a_{n-1}^{n-4}a_n^3+\cdots+a_{n-1}a_n^{n-2}+a_n^{n-1})\cdot$$
$$(a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_1+a_{n-1}^{n-3}a_1^2+\cdots+a_n^2a_1^{n-3}+a_na_1^{n-2}+a_1^{n-3})=$$
$$(a_2^{n-1}+a_1^{n-1}+a_1^{n-2}a_2+\cdots+a_1^3a_2^{n-4}+a_1^2a_2^{n-3}+a_1a_2^{n-2})\cdot$$
$$(a_2a_3^{n-2}+a_3^{n-1}+a_2^{n-1}+\cdots+a_2^4a_3^{n-5}+a_2^3a_3^{n-4}+a_2^2a_3^{n-3})\cdot$$
$$(a_3^2a_4^{n-3}+a_3a_4^{n-2}+a_4^{n-1}+\cdots+a_3^5a_4^{n-6}+a_3^4a_4^{n-5}+a_3^3a_4^{n-4})\cdot$$
$$\vdots$$
$$(a_{n-1}^{n-2}a_n+a_{n-1}^{n-3}a_n^2+a_{n-1}^{n-4}a_n^3+\cdots+a_{n-1}a_n^{n-2}+a_n^{n-1}+a_{n-1}^{n-1})\cdot$$
$$(a_n^{n-1}+a_n^{n-2}a_1+a_{n-1}^{n-3}a_1^2+\cdots+a_n^2a_1^{n-3}+a_na_1^{n-2}+a_1^{n-3})\geqslant$$
$$(a_2a_3\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1})^n=$$
$$[a_1a_2\cdots a_n(a_1^{-1}+a_2^{-1}+\cdots+a_n^{-1})]^n$$

故式(28)成立.

注 杨学枝于 2007 年 1 月 12 日证明了上述猜想是成立的(此证明可参见:杨学枝,"对一个 n 元循环不等式猜想的证明",《中学数学研究》,2007 年第 3 期).

例 23 （录自“中国不等式研究小组网站”,hljhdf,2007.09.08 提供）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,则

$$\sum\frac{a^{3}}{b^{2}-bc+c^{2}}\geqslant\sum a \tag{29}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(29) 取等号.

证 由柯西不等式有

$$\sum a(b^{2}-bc+c^{2})\cdot\sum\frac{a^{3}}{b^{2}-bc+c^{2}}\geqslant(\sum a^{2})^{2}$$

因此,只需证

$$(\sum a^{2})^{2}\geqslant\sum a\cdot\sum a(b^{2}-bc+c^{2})\Leftrightarrow$$

$$(\sum a^{2})^{2}\geqslant\sum a\cdot(\sum a\cdot\sum bc-6abc)\Leftrightarrow$$

$$[(\sum a^{2})^{2}-\sum a^{2}\cdot\sum bc]-2[(\sum bc)^{2}-3abc\sum a]\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sum a^{2}\cdot\sum(b-c)^{2}-\sum a^{2}(b-c)^{2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum(-a^{2}+b^{2}+c^{2})(b-c)^{2}\geqslant 0$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$\begin{aligned}\text{式①左边}\geqslant&(-a^{2}+b^{2}+c^{2})(b-c)^{2}+(a^{2}-b^{2}+c^{2})(a-c)^{2}\geqslant\\&(-a^{2}+b^{2}+c^{2}+a^{2}-b^{2}+c^{2})(b-c)^{2}=\\&2c^{2}(b-c)^{2}\geqslant 0\end{aligned}$$

即得式(29).

例 24 （自创题,2007.07.07）设 $a,b,c>-1$,求证

$$\sum\frac{1}{1+a^{3}}\geqslant\frac{4(6-\sum a)}{9} \tag{30}$$

并指出式(30) 取等号的条件.

证一 由柯西不等式,有

$$\sum\frac{1-a+a^{2}}{1+a}\cdot\sum\frac{1}{1+a^{3}}\geqslant(\sum\frac{1}{1+a})^{2}$$

因此,只需证

$$(\sum\frac{1}{1+a})^{2}\geqslant\frac{4(6-\sum a)}{9}\cdot\sum\frac{1-a+a^{2}}{1+a} \qquad ①$$

记 $\sum\frac{1}{1+a}=u$,则

$$\sum\frac{1-a+a^{2}}{1+a}=\sum(a-2)+\sum\frac{3}{1+a}=$$

$$\sum a-6+3u>0$$

于是,要证式 ① 成立,只需证

$$u^2\geqslant\frac{4(6-\sum a)}{9}\cdot(\sum a-6+3u)\Leftrightarrow$$

$$u^2-\frac{4}{3}(6-\sum a)u+\frac{4}{9}(6-\sum a)^2\geqslant0\Leftrightarrow$$

$$[u-\frac{2}{3}(6-\sum a)]^2\geqslant0$$

故式 ① 成立. 由以上证明知,当且仅当 $a=b=c$,且

$$\frac{3}{1+a}-\frac{2}{3}(6-3a)=0\Leftrightarrow2a^2-2a-1=0$$

由 $a,b,c>-1$,得 $a=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$,故当且仅当 $a=b=c=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ 时,式(30) 取等号.

证二　去证局部不等式 $\frac{1}{1+a^3}\geqslant\frac{8-4a}{9}$,即

$$4a^2-8a^3+4a+1\geqslant0\Leftrightarrow(2a^2-2a-1)^2\geqslant0$$

例 25　(自创题,2007.08.07) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_k\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$m,n$ 为正整数,则

$$(\sum a_1^2)^m\cdot(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}a_ia_j)^n\leqslant\frac{m^m\cdot n^n}{2^n\cdot(m+n)^{m+n}}\cdot(\sum a_1)^{2(m+n)}\qquad(31)$$

当且仅当$(k-1)m>n$,$ns_1^2=2(m+n)s_2$ 时,式(31) 取等号.

证　记 $s_1=\sum a_1$,$s_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k}a_ia_j$,则

$$(\sum a_1^2)^m\cdot(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}a_ia_j)^n=[(\sum a_1)^2-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}a_ia_j]^m\cdot(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}a_ia_j)^n=$$

$$(\frac{2m}{n})^m\cdot\underbrace{(\frac{n}{2m}s_1^2-\frac{n}{m}s_2)(\frac{n}{2m}s_1^2-\frac{n}{m}s_2)\cdots(\frac{n}{2m}s_1^2-\frac{n}{m}s_2)}_{m\text{个}}\cdot\underbrace{s_2\cdot s_2\cdot\cdots\cdot s_2}_{n\text{个}}\leqslant$$

$$(\frac{2m}{n})^m\cdot(\frac{\frac{n}{2}s_1^2}{m+n})^{m+n}=$$

$$\frac{m^m\cdot n^n}{2^n\cdot(m+n)^{m+n}}\cdot(\sum a_1)^{2(m+n)}$$

即得原式.

特别地,当$(k-1)m=n$ 时,有

$$\sum a_1^2\cdot(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}a_ia_j)^{k-1}\leqslant\frac{(k-1)^{k-1}}{2^{k-1}\cdot k^k}\cdot(\sum a_1)^{2k}$$

当且仅当 $a_1={}_2=\cdots=a_k$ 时,式(31) 取等号.

例 26 （自创题,2007.07.12）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum a^2=1$,则

$$\sum\sqrt{1-bc}\geqslant\sqrt{6} \tag{32}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时,式(32)取等号.

证 由对称性,不妨设 a 最大,由于

$$\begin{aligned}(\sqrt{1-ab}+\sqrt{1-ac})^2=&\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum a^2+c^2+(a-b)^2}+\right.\\&\left.\sqrt{\sum a^2+b^2+(a-c)^2}\right)^2\geqslant\\&\frac{1}{2}[4\sum a^2+(b+c)^2+(2a-b-c)^2]=\\&4a^2+3b^2+3c^2+2bc-2ac-2ab\end{aligned}$$

即有

$$\sqrt{1-ab}+\sqrt{1-ac}\geqslant\sqrt{4a^2+3b^2+3c^2+2bc-2ac-2ab}$$

因此,要证式(32),只要证

$$\sqrt{4a^2+3b^2+3c^2+2bc-2ac-2ab}+\sqrt{1-bc}\geqslant\sqrt{6}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt{4a^2+3b^2+3c^2+2bc-2ac-2ab}\cdot\sqrt{4a^2+4b^2+4c^2-4bc}\geqslant$$

$$a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac-bc \tag{①}$$

今证式①,有

$$\begin{aligned}\text{式①左边}\geqslant&\sqrt{3a^2+2b^2+2c^2+(b+c-a)^2}\cdot\sqrt{3a^2+2b^2+2c^2+a^2}\geqslant\\&3a^2+2b^2+2c^2+ab+ac-a^2=\\&2a^2+2b^2+2c^2+ab+ac\end{aligned}$$

因此,要证式①成立,又只需证

$$2a^2+2b^2+2c^2+ab+ac\geqslant a^2+2b^2+2c^2+2ab+2ac-bc\Leftrightarrow$$

$$(a-b)(a-c)\geqslant0$$

由假设 a 最大知上式成立,故式①成立,式(32)获证,由证明过程易知取等号条件.

猜想 设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,且 $\sum a^2=1$,则

$$\sum\sqrt{1-a_1a_2}\geqslant\sqrt{n(n-1)}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 时取等号.

当 $n=3$ 时,即为式(33);当 $n=4$ 时,即为 第七章"其他不等式证明例子"中的例 27.

附　录

在本章最后，给出两个三元不等式定理，它是笔者于2005年11月27日得到的. 这两个定理与推论在证明一些不等式时常常有效，在此也作为基本不等式. 下面的定理与推论以及例题中的不等式的编号是独立的.

定理1　设 $\lambda,u,v\in\mathbf{R}^+$，记 $s_1=\lambda+u+v,s_2=uv+v\lambda+\lambda u,s_3=\lambda uv$，$x=\frac{s_1}{3\sqrt[3]{s_3}},y=\frac{s_2}{3\sqrt[3]{s_3^2}}$，则

ⅰ) $3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}\overset{(1)}{\leqslant}8x^3\overset{(2)}{\leqslant}3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$；

ⅱ) $3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}\overset{(3)}{\leqslant}8y^3\overset{(4)}{\leqslant}3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$.

当且仅当 λ,u,v 中有两个数相等且不小于第三个数时，(1)、(4) 两式取等号；当且仅当 λ,u,v 中有两个数相等，且不大于第三个数时，(2)、(3) 两式取等号.

证　ⅰ) 由于

$$(u-v)^2(v-\lambda)^2(\lambda-u)^2=-4s_1^3s_3+s_1^2s_2^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-27s_3^2=$$

$$\frac{s_3}{16s_1^3}[(s_1s_2-s_3)(s_1s_2-9s_3)^3-(8s_1^3s_3-s_1^2s_2^2-18s_1s_2s_3+27s_3^2)^2]\geqslant 0$$

因此，得到

$$(8s_1^3s_3-s_1^2s_2^2-18s_1s_2s_3+27s_3^2)^2\leqslant(s_1s_2-s_3)(s_1s_2-9s_3)^3$$

用 x,y 代入，得到

$$[8x^3-3(xy)^2-6xy+1]^2\leqslant(xy-1)^3(9xy-1)$$

由上式即得(1)、(2) 两式.

当 $\lambda=u\geqslant v$ 时

$$8x^3-3(xy)^2-6xy+1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}=$$

$$8\frac{(2\lambda+v)^3}{27\lambda^2v}-\frac{(2\lambda+v)^2(\lambda+2v)^2}{27\lambda^2v^2}+\frac{18(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{27\lambda v}+$$

$$1+[\frac{(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{9\lambda v}-1]$$

$$\sqrt{[\frac{(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{\lambda v}-1][\frac{(2\lambda+v)(\lambda+2v)}{9\lambda v}-1]}=$$

$$\frac{4}{27\lambda^2v^2}[(-\lambda^2+v^2)(\lambda-v)^2+(\lambda-v)^2\cdot|\lambda^2-v^2|]=0$$

即此时式(1)取等号. 同理可得式(2)取等号条件.

ii)下面仅证式(3),式(4)证法与之类似(从略).

由式(2)有

$$8x^3\leqslant 3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$$

两边同除以$(xy)^3$,得到

$$\frac{8}{y^3}\leqslant\frac{3(xy)^2+6xy-1+(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}}{(xy)^3}=$$

$$\frac{[3(xy)^2+6xy-1]^2-(xy-1)^3(9xy-1)}{(xy)^3[3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}]}=$$

$$\frac{64(xy)^3}{(xy)^3[3(xy)^3+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}]}=$$

$$\frac{64}{3(xy)^2+6xy-1-(xy-1)\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}}$$

由此即得式(3),显然式(3)取等号条件同式(2).

由定理1及$(9xy-5)-\frac{8}{9xy-5}\geqslant 3\sqrt{(9xy-1)(xy-1)}$(此式易证,从略),可得以下推论.

推论1 同定理1条件,有

$$16xy-4+\frac{4(xy-1)}{9xy-5}\leqslant 12x^3 \tag{5}$$

$$12x^3\leqslant 9(xy)^2+2xy+1-\frac{4(xy-1)}{9xy-5} \tag{6}$$

$$16xy-4+\frac{4(xy-1)}{9xy-5}\leqslant 12y^3 \tag{7}$$

$$12y^3\leqslant 9(xy)^2+2xy+1-\frac{4(xy-1)}{9xy-5} \tag{8}$$

当且仅当$\lambda=u=v$时,(5)、(6)、(7)、(8)四式取等号.

推论2 同定理1条件,有

$$\frac{-1+2\sqrt{27y^3-2}}{9y}\leqslant x \tag{9}$$

$$x\leqslant\frac{27y^3+28+\sqrt{729y^6-648y^3+208}}{72y} \tag{10}$$

$$\frac{-1+2\sqrt{27x^3-2}}{9x}\leqslant y \tag{11}$$

$$y \leqslant \frac{27x^3+28+\sqrt{729x^6-648x^3+208}}{72x} \tag{12}$$

当且仅当 $\lambda = u = v$ 时,(9)、(10)、(11)、(12) 四式均取等号.

定理 2 设 $\lambda, u, v \in \mathbf{R}$,记 $s_1 = \lambda + u + v, s_2 = uv + v\lambda + \lambda u, s_3 = \lambda uv, w = \sqrt{s_1^2 - 3s_2}(0 \leqslant w \leqslant s_1)$,则

$$\frac{s_1^3 - 3s_1w^2 - 2w^3}{27} = \frac{(s_1 - 2w)(s_1 + w)^2}{27} \leqslant s_3 \tag{13}$$

$$s_3 \leqslant \frac{(s_1 + 2w)(s_1 - w)^2}{27} = \frac{s_1^3 - 3s_1w^2 + 2w^3}{27} \tag{14}$$

当且仅当 λ, u, v 中有两个数相等,且不小于 $\frac{1}{3}s_1$ 时,式(13) 取等号;当且仅当 λ, u, v 中有两个数相等,且不大于 $\frac{1}{3}s_1$ 时,式(14) 取等号.

证 由于

$$(u-v)^2(v-\lambda)^2(\lambda-u)^2 = -4s_1^3s_3 + s_1^2s_2^2 + 18s_1s_2s_3 - 4s_2^3 - 27s_3^2 = -27s_3^2 + 2(9s_1s_2 - 2s_1^3)s_3 + (s_1^2s_2^2 - 4s_2^3) \geqslant 0$$

由此得到

$$\frac{9s_1s_2 - 2s_1^3 - 2(s_1^2 - 3s_2)^{\frac{3}{2}}}{27} \leqslant s_3 \leqslant \frac{9s_1s_2 - 2s_1^3 + 2(s_1^2 - 3s_2)^{\frac{3}{2}}}{27}$$

又由 $w = \sqrt{s_1^2 - 3s_2}$ 得到 $s_2 = \frac{s_1^2 - w^2}{3}$,代入并整理即的到(13)、(14) 两式. 由定理 1 中不等式的取等号条件,易得到定理 2 中不等式的取等号条件.

推论 3 同定理 2 条件,特别地,当 $s_1 = 1$ 时,有

$$\frac{1 - 3w^2 - 2w^3}{27} = \frac{(1 - 2w)(1 + w)^2}{27} \leqslant \lambda uv \tag{15}$$

$$\lambda uv \leqslant \frac{(1 + 2w)(1 - w)^2}{27} = \frac{1 - 3w^2 + 2w^3}{27} \tag{16}$$

当且仅当 $\lambda = u = v = \frac{1}{3}$ 时,(15)、(16) 两式取等号.

例 1 设 $a, b, c \in \mathbf{R}^+$,且 $abc = 1$,求证

$$\sum a^3 + 3 \geqslant 2\sum a^2 \tag{17}$$

当且仅当 $a = b = c = 1$ 时,式(17) 取等号.

证 记 $s_1 = \sum a, s_2 = \sum bc, s_3 = abc = 1$,则式(17) 等价于

$$s_1^3 - 3s_1s_2 + 6 - 2s_1^2 + 4s_2 \geqslant 0 \Leftrightarrow s_1^3 - 2s_1^2 + 6 \geqslant (3s_1 - 4)s_2$$

又记 $s_1=3x,s_2=3y$,则上式又等价于

$$9x^3-6x^2+2\geqslant(9x-4)y \tag{①}$$

由于 $9y-4\geqslant5>0$,并由推论 2,有

$$y\leqslant\frac{27x^3+28+\sqrt{729x^6-648x^3+208}}{72x}$$

因此,要证式①,只要证

$$9x^3-6x^2+2\geqslant(9x-4)\cdot\frac{27x^3+28+\sqrt{729x^6-648x^3+208}}{72x}\Leftrightarrow$$

$$405x^4-324x^3-108x+112\geqslant(9x-4)\cdot\sqrt{729x^6-648x^3+208} \tag{②}$$

由于

$$\begin{aligned}&(405x^4-324x^3-108x+112)^2-(9x-4)^2\cdot(729x^6-648x^3+208)=\\&164\,025x^8-262\,440x^7+104\,976x^6-87\,480x^5+160\,704x^4-\\&72\,576x^3+11\,664x^2-24\,192x+12\,544-(59\,049x^8-52\,488x^7+\\&11\,664x^6-52\,488x^5+46\,656x^4-10\,368x^3+16\,848x^2-14\,976x+3\,328)=\\&104\,976x^8-209\,952x^7+93\,312x^6-34\,992x^5+11\,404x^4-\\&62\,208x^3-5\,184x^2-9\,216x+9\,216=\\&(x-1)(104\,976x^7-104\,976x^6-11\,664x^5-46\,656x^4+67\,392x^3+\\&5\,184x^2-9\,216)=\\&(x-1)^2(104\,976x^6-11\,664x^4-58\,300x^3+9\,092x^2+14\,276x+\\&14\,276)+5\,060(x-1)\geqslant0\end{aligned}$$

(注意到 $x\geqslant1$) 故式②成立,因此,式①也成立,从而式(17)获证.

例 2 (自创题,2007.08.08) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=4$,则

$$108\sum bc\geqslant-\left(\sum a\right)^4+6\left(\sum a\right)^3+27\left(\sum a\right)^2 \tag{18}$$

当且仅当 a,b,c 中有一个等于 4,其余两个均等于 1 时,式(18)取等号.

证 记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc=4,w=\sqrt{s_1^2-3s_2}$,则有

$$abc\leqslant\frac{(s_1-w)^2(s_1+2w)}{27}$$

另外,有

$$\begin{aligned}&(s_1-w)^2(s_1+2w)\cdot(s_1+2w)^3=\\&(s_1-w)(s_1-w)\left(\frac{s_1}{4}+\frac{w}{2}\right)\left(\frac{s_1}{4}+\frac{w}{2}\right)\left(\frac{s_1}{4}+\frac{w}{2}\right)\left(\frac{s_1}{4}+\frac{w}{2}\right)\cdot\\&4^4\leqslant\left[\frac{(2+1)s_1}{6}\right]^6\cdot4^4=\text{(应用算术几何平均值不等式)}\\&4s_1^6\end{aligned}$$

因此,有

$$27abc\cdot(s_1+2\sqrt{s_1^2-3s_2})^3\leqslant 4s_1^6$$

由 $abc=4$,得到

$$6\sqrt{s_1^2-3s_2}\leqslant s_1^2-3s_1$$

将上式两边平方整理即得式(18),并由上证明中可知,当且仅当 a,b,c 中有一个等于4,其余两个均等于1时,式(18)取等号.

例3 (录自罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》§8.1. Applicationsti 题70)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}\qquad(19)$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(19)取等号.

证 由柯西不等式有

$$[\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}]^2\leqslant 2\sum bc\cdot\sum bc(b^2+c^2)$$

因此,只要证

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)^2\geqslant 2\sum bc\cdot\sum bc(b^2+c^2)\qquad①$$

今用定理2中的推论3证明式①.记 $s_1=\sum a=1,s_2=\sum bc,s_3=abc$,代入式①经整理后得

$$(1-3s_2+6s_3)^2\geqslant 2s_2(s_2-2s_2^2-s_3)$$

记 $w=\sqrt{1-3s_2}$,即 $s_2=\dfrac{1-w^2}{3}$,以及 $s_3\geqslant\dfrac{1-3w^2-2w^3}{27}$,得到

$$(\frac{2+3w^2-4w^3}{9})^2\geqslant\frac{2(1-w^2)(2+6w^2+2w^3-6w^4)}{81}\Leftrightarrow$$

$$w^2(4w^4-20w^3+33w^2-20w+4)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$w^2(2w-1)^2(w-2)^2\geqslant 0$$

故式①成立.故式(19)获证.

例4 (录自 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)-ab}+\frac{1}{5(b^2+c^2)-bc}+\frac{1}{5(c^2+a^2)-ca}\geqslant\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\qquad(20)$$

证 式(20)经去分母整理后得到其等价式

$$\sum a^2[25(\sum a^2)^2+25\sum b^2c^2-5\sum a^2\sum bc-4abc\sum a]\geqslant$$
$$125\sum a^2\sum b^2c^2-25abc\sum a^3-25\sum bc\sum b^2c^2+$$
$$5abc\sum a\sum bc-141a^2b^2c^2$$

记 $s_1 = \sum a = 1, s_2 = \sum bc, s_3 = abc$,则

$$\sum a^2 = s_1^2 - 2s_2, \ \sum a^3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3, \ \sum b^2c^2 = s_2^2 - 2s_1s_3$$

代入上式,并整理得

$$25s_1^6 - 155s_1^4s_2 + 345s_1^2s_2^2 - 54s_1^3s_3 - 270s_2^3 + 108s_1s_2s_3 \geqslant$$
$$125s_1^2s_2^2 - 275s_2^3 - 275s_1^3s_3 + 630s_1s_2s_3 - 216s_3^2 \Leftrightarrow$$
$$25s_1^6 - 155s_1^4s_2 + 221s_1^3s_3 + 220s_1^2s_2^2 + 5s_2^3 - 522s_1s_2s_3 + 216s_3^2 \geqslant 0$$

即

$$25 - 155s_2 + 220s_2^2 + 5s_2^3 + (221 - 522s_2)s_3 + 216s_3^2 \geqslant 0 \quad ①$$

i)当 $s_2 = \sum bc \geqslant \frac{1}{4}$ 时,因为

$$1 - 3s_2 = (\sum a)^2 - 3\sum bc \geqslant 0$$

所以

$$221 - 522s_2 > 0$$

记 $w = \sqrt{1 - 3s_2} \leqslant \frac{1}{2}$,即 $s_2 = \frac{1 - w^2}{3} \geqslant \frac{1}{4}$,由定理 2 推论 3,得

$$\text{式①左边} = 25 - \frac{155(1 - w^2)}{3} + \frac{220(1 - w^2)^2}{9} + \frac{5(1 - w^2)^3}{27} +$$
$$(47 + 174w^2)s_3 + 216s_3^2 \geqslant 25 - \frac{155(1 - w^2)}{3} +$$
$$\frac{220(1 - w^2)^2}{9} + \frac{5(1 - w^2)^3}{27} +$$
$$\frac{(47 + 174w^2)(1 - 3w^2 - 2w^3)}{27} +$$
$$\frac{8(1 - 3w^2 - 2w^3)^2}{27} =$$
$$\frac{w^2}{3}(5 - 14w + 25w^2 - 28w^3 + 3w^4) =$$
$$\frac{w^2}{3}[(1 - 2w)(5 - 4w + 17w^2 + 6w^3) + 15w^4] \geqslant 0$$

(注意 $1 - 2w \geqslant 0$).

ii)当 $s_2 = \sum bc \leqslant \frac{1}{4}$ 时

$$\text{式①左边} \geqslant 25 - 155s_2 + 220s_2^2 = 220(\frac{31}{88} - s_2)^2 - \frac{405}{176} \geqslant$$
$$220(\frac{31}{88} - \frac{1}{4})^2 - \frac{405}{176} = 0$$

综上 i),ii)知,式(20)成立.

例5 （自创题,2005.12.04）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,则

$$(2\sqrt{3}-3)-9(6\sqrt{3}-5)abc+108abc\sum bc\geqslant 0 \tag{21}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$,或 a,b,c 中有一个等于 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$,另外两个都等于 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,式(21)取等号.

证 记 $w=\sqrt{(\sum a)^2-3\sum bc}=\sqrt{1-3\sum bc}$,即 $\sum bc=\frac{1-w^2}{3}(0\leqslant w<1)$,由定理2的推论3,有

$$\begin{aligned}
\text{式(21)左边}&=(2\sqrt{3}-3)-[9(6\sqrt{3}-5)-108\sum bc]abc=\\
&(2\sqrt{3}-3)-[9(6\sqrt{3}-5)-108\cdot\frac{1-w^2}{3}]abc=\\
&(2\sqrt{3}-3)-(54\sqrt{3}-81+36w^2)abc\geqslant\\
&(2\sqrt{3}-3)-(54\sqrt{3}-81+36w^2)\cdot\frac{1-3w^2+2w^3}{27}=\\
&w^2\cdot[\frac{18\sqrt{3}-31}{3}-2(2\sqrt{3}-3)w+4w^2-\frac{8}{3}w^3]=\\
&w^2(w-\frac{2-\sqrt{3}}{2})^2\cdot(-\frac{8}{3}w+\frac{8\sqrt{3}-4}{3})\geqslant 0
\end{aligned}$$

（注意到 $0\leqslant w<1$）当且仅当 $w=0$ 或 $w=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ 时上式取等号. 即当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$,或 a,b,c 中有一个等于 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$,另外两个都等于 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时,式(21)取等号.

注 本题创作思路:设参数 $\lambda>1$,使

$$(\lambda-1)-27\lambda abc+81abc\sum bc\geqslant 0$$

成立,定理2的推论3,有

$$\lambda\geqslant\frac{4-2w-3w^2+2w^3}{3-2w}$$

可应用导数求得上式右边最大值为 $\frac{6\sqrt{3}-5}{4}$,即取 $\lambda=\frac{6\sqrt{3}-5}{4}$,得 $w=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

例6 （自创题,2007.09.18）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b+c=1$,则

$$\frac{7}{abc}-4\sum\frac{1}{a^2}\leqslant 81 \tag{22}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$,或 a,b,c 中一个等于 $\frac{2}{3}$,其余两个都等于 $\frac{1}{6}$ 时,式

(22) 取等号.

证 由

$$式(22)\Leftrightarrow 4(\sum bc)^2-15abc+81(abc)^2\geqslant 0 \quad ①$$

记 $w=\sqrt{1-3\sum bc}$,即 $\sum bc=\frac{1}{3}(1-w^2)$,$0\leqslant w<1$,则由定理 2 的推论 3 得到

$$abc\leqslant\frac{(1+2w)(1-w)^2}{27}$$

于是

$$式①左边\geqslant 4[\frac{1}{3}(1-w^2)]^2-15\cdot\frac{(1+2w)(1-w)^2}{27}+81\cdot\frac{(1+2w)^2(1-w)^4}{27^2}=$$

$$\frac{(1-w)^2}{9}[4(1+w)^2-5(1+2w)+(1+2w)^2(1-w)^2]=$$

$$\frac{w^2(1-w)^2(1-2w)^2}{9}\geqslant 0$$

当且仅当 $w=0$,即 $a=b=c=\frac{1}{3}$;或 $w=\frac{1}{2}$,即 a,b,c 中有一个等于$\frac{2}{3}$,其余两个都等于$\frac{1}{6}$时,上式取等号,即式(22) 取等号.

例 7 (浙江陈计老师,2008.01.21 提供) 设实数 a,b,c 满足 $\sum a^2=9$,则

$$6\sum a\leqslant abc+26 \quad (23)$$

当且仅当 a,b,c 中有一个等于 1,另外两个都等于 2 时,式(23) 取等号.

证 由题设,可将式(23) 写作齐次式

$$6\sum a\cdot\frac{\sum a^2}{9}\leqslant abc+26(\sqrt{\frac{\sum a^2}{9}})^3$$

由此知,要证式(23),只要证

$$(18\sum a\cdot\sum a^2-27abc)^2\leqslant 676(\sum a^2)^3 \quad ①$$

为证式 ①,令 $\sum a=1$,记 $w=\sqrt{(\sum a)^2-3\sum bc}=\sqrt{1-3\sum bc}\geqslant 0$,则

$$\sum bc=\frac{1-w^2}{3}$$

根据定理 2 的推论 3,有

$$abc\geqslant\frac{1-3w^2-2w^3}{27}$$

因此,要证式 ①,只需证

$$\left\{18\left[1-\frac{2(1-w^2)}{3}\right]-(1-3w^2-2w^3)\right\}^2\leqslant 676\left[1-\frac{2(1-w^2)}{3}\right]^3\Leftrightarrow$$

$$27(5+15w^2+2w^3)\leqslant 26^2(1+2w^2)^3 \qquad ②$$

式②右边 - 左边 $=1+6w^2-540w^3+2\,037w^4-1\,620w^5+5\,300w^6=(1-5w)^2(1+10w+81w^2+20w^3+212w^5)\geqslant 0$

式②成立,故式①成立,从而式(23)获证,由以上证明易得其取等号条件.

注: 我们还可证明以下三个命题:

1. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum a^2=3$,则

$$abc\geqslant\sum bc-2\geqslant 3\sum a-8$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

2. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum a^2=2$,则

$$2abc\geqslant\sum bc-1\geqslant 2\sum a-4$$

当且仅当 a,b,c 中有一个等于 0,其余两个都等于 1 时取等号.

3. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum a^2=9$,则

$$abc\geqslant 2\sum bc-4\sum a+8\geqslant 6\sum a-26$$

当且仅当 a,b,c 中有一个等于 1,其余两个都等于 2 时取等号.

例 8 (自创题,2006.02.22) 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\left(\sum a^2\right)^3\geqslant 8\sum b^3c^3+3a^2b^2c^2$$

当且仅当 $a=b=c$,或 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时取等号.

证 记 $s_1=\sum a=1,s_2=\sum bc,s_3=abc$,则

$$\sum a^2=1-2s_2,\ \sum b^3c^3=s_2^3-3s_2s_3+3s_3^2$$

代入原式,并经整理得到与原式等价式

$$1-6s_2+12s_2^2-16s_2^3+24s_2s_3-27s_3^2\geqslant 0 \qquad ①$$

设 $w=\sqrt{1-3s_2}\,(0\leqslant w\leqslant 1)$,由定理 2 的推论 3,得到

式①左边 $\geqslant 1-6\cdot\frac{1-w^2}{3}+12\cdot\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^2-16\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^3+24\cdot\frac{1-w^2}{3}\cdot\frac{1-3w^2-2w^3}{27}-27\cdot\left(\frac{1-3w^2-2w^3}{27}\right)^2\Leftrightarrow$

$$w^2(4-12w+3w^2+4w^3+12w^4)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$w^2(1-2w)^2(4+4w+3w^2)\geqslant 0$$

上式显然成立,故式①成立,原式获证. 由以上证明过程易知取等号条件.

参数法证明不等式

第五章

在求某些函数极值问题，或证明某些不等式中，有时可引入参数，再应用已知基本不等式进行放缩，最后，根据取等号条件来确定所选的参数值. 这种应用参数法求极值或证明不等式，有较大的灵活性.

例 1 已知 $a^2+b^2-kab=1\ c^2+d^2-kcd=1$, $a,b,c,d,k\in\mathbf{R}$, 且 $|k|<2$，求证

$$|ac-bd|\leqslant\frac{2}{\sqrt{4-k^2}}\tag{1}$$

当且仅当$\frac{2-k}{2+k}=\frac{(a-b)(c-d)}{(a+b)(c+d)}$, 即 $k=\frac{bc+ad}{ac+bd}$时，式(1)取等号.

证 设参数 $t\neq 0$，同时应用柯西不等式，有

$$4|ac-bd|^2=|(a+b)(c-d)+(a-b)(c+d)|^2=$$

$$\left|\frac{t(a+b)\cdot(c-d)}{t}+(a-b)(c+d)\right|^2\leqslant$$

$$[t^2(a+b)^2+(a-b)^2]\left[\frac{(c-d)^2}{t^2}+(c+d)^2\right]=$$

$$[(t^2+1)(a^2+b^2)+(2t^2-2)ab]\cdot$$

$$\frac{(t^2+1)(c^2+d^2)+(2t^2-2)cd}{t^2}$$

注意到所给条件,可令

$$\frac{2t^2-2}{t^2+1}=-k$$

得 $t^2=\frac{2-k}{2+k}$,代入上式不等式中,则有

$$\begin{aligned}4|ac-bd|^2 &\leqslant (t^2+1)\left[a^2+b^2+\frac{2t^2-2}{t^2+1}ab\right]\cdot \\ &\frac{(t^2+1)}{t^2}\cdot\left[c^2+d^2+\frac{2t^2-2}{t^2+1}cd\right]= \\ &\frac{(t^2+1)^2}{t^2}(a^2+b^2-kab)(c^2+d^2-kcd)= \\ &\frac{(t^2+1)^2}{t^2}=\frac{16}{\sqrt{4-k^2}}\end{aligned}$$

例 2 (自创题,1989.04.06) a,b,c 为已知非零实数,$x,y,z,w\in\mathbf{R}$,则

$$\frac{axy+byz+czw}{x^2+y^2+z^2+w^2}\leqslant\frac{1}{2}[\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}] \tag{2}$$

当且仅当 $\frac{y}{x}=a\alpha^2,\frac{z}{y}=b\beta^2,\frac{w}{z}=\frac{c^2}{a^2\alpha^2}$,其中 $\alpha^2=\frac{u}{a^2},\beta^2=u-\frac{a^2}{u},u=\frac{1}{2}[\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}]$ 时,式(2)取等号.

证 设 α,β 为两个不为零的参数,则

$$\begin{aligned}2axy+2byz+2czw &= \left[(a\alpha x)^2+(\frac{y}{\alpha})^2-(a\alpha x-\frac{y}{\alpha})^2\right]+ \\ &\left[(b\beta y)^2+(\frac{z}{\beta})^2-(b\beta y-\frac{z}{\beta})^2\right]+ \\ &\left[(\frac{cz}{a\alpha})^2+(a\alpha w)^2-(\frac{cz}{a\alpha}-a\alpha w)^2\right]= \\ &\alpha^2a^2x^2+(\frac{1}{\alpha^2}+b^2\beta^2)y^2+ \\ &(\frac{1}{\beta^2}+\frac{c^2}{a^2\alpha^2})z^2+a^2\alpha^2w^2-(a\alpha x-\frac{y}{\alpha})^2- \\ &(b\beta y-\frac{z}{\beta})^2-(\frac{cz}{a\alpha}-a\alpha w)^2\end{aligned}$$

令 $a^2\alpha^2=\frac{1}{\alpha^2}+b^2\beta^2=\frac{1}{\beta^2}+\frac{c^2}{a^2\alpha^2}=u>0$,由此消去 α,β,得到含 u 的方程

$$u^4-(a^2+b^2+c^2)u^2+a^2c^2=0$$

求得正根 $u=\frac{1}{2}[\sqrt{(a+c)^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+b^2}]$,因此

$$2(axy+byz+czw)\leqslant u\cdot(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

即得式(2),由以上证明过程可证取等号条件.

注 以上例1,例2 可参见《中学数学教学》(上海)1989 年第5期,杨学枝文:"用参数方法求极值及证明不等式".

例3 (自创题,1988.11.03) 设 $x\in\mathbf{R}, a\geqslant 1$ 为常数,则

$$|\sin x\cdot(\cos x+a)|\leqslant\sqrt{\frac{-a^2+20a+8+(a^3+8a)\sqrt{a^2+8}}{32}}\quad(3)$$

证 引入参数 λ,则

$$\begin{aligned}[\sin x\cdot(\cos x+a)]^2&=\frac{\sin^2x}{\lambda^2}\cdot(\lambda\cos x+\lambda a)^2\leqslant\\&\frac{\sin^2x}{\lambda^2}\cdot(\lambda^2+a^2)(\cos^2x+\lambda^2)=\\&\frac{\lambda^2+a^2}{\lambda^2}\sin^2x\cdot(\cos^2x+\lambda^2)\leqslant\\&\frac{\lambda^2+a^2}{\lambda^2}\cdot(\frac{1+\lambda^2}{2})^2\end{aligned}$$

由不等式取等号条件,令

$$\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\lambda}=\dfrac{\lambda}{a}\\ \sin^2x=\cos^2x+\lambda^2\end{cases}$$

求得 $\lambda^2=\frac{1}{4}(-a^2+a\sqrt{a^2+8})$,于是

$$\frac{\lambda^2+a^2}{\lambda^2}\cdot(\frac{1+\lambda^2}{2})=\frac{-a^2+20a+8+(a^3+8a)\sqrt{a^2+8}}{32}$$

即得式(3).

例4 (自创题,1989.11.26) 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 四个面的面积为 S_1,S_2,S_3,S_4,体积为 V,x_1,x_2,x_3,x_4 为任意正数,则

i)

$$x_1S_1^2+x_2S_2^2+x_3S_3^2+x_4S_4^2\geqslant\frac{18\sqrt[3]{6}}{4}(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}\cdot V^{\frac{4}{3}}\quad(4)$$

ii)

$$S_1S_2S_3S_4\geqslant\frac{27\sqrt{3}}{2}\left[\frac{x_2x_3x_4S_1^2+x_1x_3x_4S_2^2+x_1x_2x_4S_3^2+x_1x_2x_3S_4^2}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}\right]^{\frac{1}{2}}\cdot V^2\quad(5)$$

证 记

$$\overrightarrow{s_1}=\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3},\overrightarrow{s_2}=\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4A_1},\overrightarrow{s_3}=\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2},\overrightarrow{s_4}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}$$

则

$$\begin{aligned}\overrightarrow{s_4}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}&=(\overrightarrow{A_4A_2}-\overrightarrow{A_4A_1})\times(\overrightarrow{A_4A_3}-\overrightarrow{A_4A_1})=\\&\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3}+\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4A_1}+\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2}=\\&\overrightarrow{s_1}+\overrightarrow{s_2}+\overrightarrow{s_3}\end{aligned}$$

设参数 $\lambda\geqslant 0$,一方面由于

$$(\sqrt{x_1}\,\overrightarrow{s_1}-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\overrightarrow{s_4})^2+(\sqrt{x_2}\,\overrightarrow{s_2}-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\overrightarrow{s_4})^2+(\sqrt{x_3}\,\overrightarrow{s_3}-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\overrightarrow{s_4})^2=$$

$$x_1(\overrightarrow{s_1})^2+x_2(\overrightarrow{s_2})^2+x_3(\overrightarrow{s_3})^2+[\lambda(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)-2\sqrt{\lambda x_1x_2x_3}](\overrightarrow{s_4})^2 \quad ①$$

另一方面,根据算术 - 几何平均值不等式及向量不等式

$$|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot|\vec c|\geqslant|(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c|$$

有

$$\begin{aligned}&(\sqrt{x_1}\,\overrightarrow{s_1}-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\overrightarrow{s_4})^2+(\sqrt{x_2}\,\overrightarrow{s_2}-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\overrightarrow{s_4})^2+(\sqrt{x_3}\,\overrightarrow{s_3}-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\overrightarrow{s_4})^2\geqslant\\&3[(\sqrt{x_1}\,\overrightarrow{s_1}-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\overrightarrow{s_4})^2\cdot(\sqrt{x_2}\,\overrightarrow{s_2}-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\overrightarrow{s_4})^2\cdot(\sqrt{x_3}\,\overrightarrow{s_3}-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\overrightarrow{s_4})^2]^{\frac13}\geqslant\\&3[|(\sqrt{x_1}\,\overrightarrow{s_1}-\sqrt{\lambda x_2x_3}\,\overrightarrow{s_4})\times(\sqrt{x_2}\,\overrightarrow{s_2}-\sqrt{\lambda x_3x_1}\,\overrightarrow{s_4})\cdot(\sqrt{x_3}\,\overrightarrow{s_3}-\sqrt{\lambda x_1x_2}\,\overrightarrow{s_4})|]^{\frac23}=\\&3[|\sqrt{x_1x_2x_3}-\sqrt{\lambda}(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)|]^{\frac23}\cdot[|(\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2})\cdot\overrightarrow{s_3}|]^{\frac23} \quad ②\end{aligned}$$

由 ①、② 两式可以得到

$$\begin{aligned}&x_1(\overrightarrow{s_1})^2+x_2(\overrightarrow{s_2})^2+x_3(\overrightarrow{s_3})^2+[\lambda(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)-2\sqrt{\lambda x_1x_2x_3}](\overrightarrow{s_4})^2\geqslant\\&3[|\sqrt{x_1x_2x_3}-\sqrt{\lambda}(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)|]^{\frac23}\cdot[|(\overrightarrow{s_1}\times\overrightarrow{s_2})\cdot\overrightarrow{s_3}|]^{\frac23} \quad ③\end{aligned}$$

为了确定参数 λ 值,我们令

$$\lambda(x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2)-2\sqrt{\lambda x_1x_2x_3}=x_4$$

可求得

$$\sqrt{\lambda}=\frac{\sqrt{x_1x_2x_3}+\sqrt{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}}{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}$$

代人式 ③ 并整理,得到

$$\begin{aligned}&x_1(\overrightarrow{s_1})^2+x_2(\overrightarrow{s_2})^2+x_3(\overrightarrow{s_3})^2+x_4(\overrightarrow{s_4})^2\geqslant\\&3(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_2x_3x_4)^{\frac13}\cdot[|\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{s_2}\overrightarrow{s_3}|]^{\frac23}\end{aligned}$$

但由于

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{s_2}\overrightarrow{s_3}|&=|(\overrightarrow{A_4A_2}\times\overrightarrow{A_4A_3})\times(\overrightarrow{A_4A_3}\times\overrightarrow{A_4A_1})\cdot(\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2})|=\\&[|(\overrightarrow{A_4A_1}\times\overrightarrow{A_4A_2})\cdot\overrightarrow{A_4A_3}|]^2=\\&(6V)^2\end{aligned}$$

因此得到式(4).

再用 $x_1s_2^2s_3^2s_4^2,x_2s_1^2s_3^2s_4^2,x_3s_1^2s_2^2s_4^2,x_4s_1^2s_2^2s_3^2$ 分别置换式 ① 中的 x_1,x_2,x_3,x_4 并

整理便得到式(5).

注 1. 本题创作时间为 1989. 11. 26,“关于四面体的两个不等式”发表于《安徽教育学院学报(自然科学版)》,1991 年第 1 期;另一证法见《中国初等数学研究文集》(杨世明主编,河南教育出版社,1992 年 6 月出版).

2. 式(4) 较笔者在文“关于四面体的一个三角不等式及其应用”(杨学枝、林章衍主编,福建教育出版社 1993 年 7 月出版) 中如下不等式要弱

$$x_1S_1^2+x_2S_2^2+x_3S_3^2+x_4S_4^2\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1x_2A_3A_4^2+x_1x_3A_2A_4^2+x_1x_4A_2A_3^2+x_2x_3A_1A_4^2+x_2x_4A_1A_3^2+x_3x_4A_1A_2^2)^{\frac{1}{2}}\cdot V \quad (6)$$

三角几何不等式

第六章

近十几年,在我国不等式研究中,对几何(尤其是三角形)不等式的研究相当红火,也取得了大量的新成果.本章专门介绍近几年我国在三角、几何不等式研究方面所得到的一些新成果.

例1 假设 P,Q,R 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上三点,且满足

$$AQ+AR=BR+BP=CP+CQ=\frac{1}{3}$$

则

$$PQ+QR+RP\geqslant\frac{1}{2} \tag{1}$$

证 如图1所示,记 $BC=a,CA=b,AB=c$,由已知有 $a+b+c=1$. 从 R,Q 向直线 BC 引垂线,垂足分别为 M,N,则

$$QR\geqslant NM=a-(BR\cos B+CQ\cos C)$$

(当 B 为钝角时,则 $NM=a+MB-NC=a+BR\cos(180^\circ-B)-CQ\cos C=a-(BR\cos B+CQ\cos C)$) 同理

$$RP\geqslant b-(CP\cos C+AR\cos A)$$

$$PQ\geqslant c-(AQ\cos A+BP\cos B)$$

以上三式相加,得

$$QR + RP + PQ \geqslant (a + b + c) - [(AQ + AR)\cos A + (BR + BP)\cos B + (CP + CQ)\cos C] = 1 - \frac{1}{3}(\cos A + \cos B + \cos C)$$

由于 $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$,因此

$$QR + RP + PQ \geqslant 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

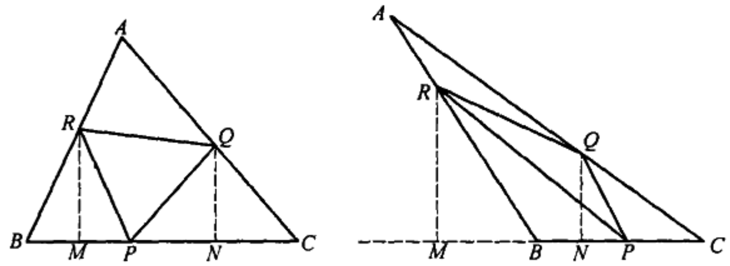


图 1

由上可知,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,而且 P,Q,R 为各边中点时,式(1)取等号.

注 1. 关于本题,有其深刻的背景,可参阅杨之所著《初等数学研究的问题和课题》P297 ~ 298;或参阅《数学通讯》1991 年第 2 期"问题征解"栏目杨学校解答及编者评语;或参阅《中学数学教学参考》(陕西),1992 年第 6 期,杨学校文"一个几何不等式的再加强";或参阅《数学通讯》1996 年第 10 期,杨学校文"从一道命题谈起";也可以参阅杨学校主编《不等式研究》(西藏人民出版社,2000 年 6 月出版)一书和本书中杨路教授写的"序";还可以参见《UNIV, BEOGRAD. PUBL. ELEKTKOTEHN. FAKser. Mat. 4(1993). 25 ~ 27. 陈计与杨学校文:"ON A ZIRAKZADEH INEQUALITY RELATED TO TWO TRIANGLES INSCRIBED ONE IN THE OTHER".

2. 由以上所得重要不等式

$$QR + RP + PQ \geqslant (a + b + c) - \frac{1}{3}(a + b + c)(\cos A + \cos B + \cos C) \tag{2}$$

可得较式(1)更强的不等式

$$(QR + RP + PQ)^3 \geqslant \frac{9}{8}(BC^3 + CA^3 + AB^3) \tag{3}$$

3.《福建中学数学》,1996 年第 4 期. 杨学校文:"对一道猜想题的证明"中,用与式(1)的类似证法,给出了

$$RP \cdot PQ + PQ \cdot QR + QR \cdot RP \geqslant \frac{1}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2) \qquad (4)$$

其中,P,Q,R 分别为 BC,CA,AB 边上的周界中点.

例 2 (改编题,2005.09.20)设 P 为 $\triangle ABC$ 内部任意一点,AP,BP,CP 的延长线分别交 $\triangle BPC,\triangle CPA,\triangle APB$ 的外接圆于另一点 A',B',C'. 记 $BC = a$, $CA = b,AB = c,\angle BPC = \alpha,\angle CPA = \beta,\angle APB = r$,则

$$PA' \cdot PB' \cdot PC' \geqslant 8PA \cdot PB \cdot PC \qquad (5)$$

当且仅当 $PA\sin\alpha = PB\sin\beta = PC\sin\gamma$ 时,式(5)取等号.

证 如图2所示,设 $\triangle BPC$ 的外接圆半径为 R_a,连 $A'B,A'C$,由托罗密定理有

$$PB \cdot A'C + PC \cdot A'B = PA' \cdot BC$$

应用正弦定理,上式又可写作

$$PB \cdot 2R_a\sin\angle A'PC + PC \cdot 2R_a\sin\angle A'PB = PA' \cdot 2R_a\sin\angle BPC$$

即

$$PB \cdot \sin\beta + PC\sin\gamma = PA'\sin\alpha$$

同理可得

$$PC\sin\gamma + PA\sin\alpha = PB' \cdot \sin\beta$$

$$PA\sin\alpha + PB \cdot \sin\beta = PC'\sin\gamma$$

因此得到

$$PA' \cdot PB' \cdot PC'(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma) = (PB \cdot \sin\beta + PC\sin\gamma)$$
$$(PC\sin\gamma + PA\sin\alpha)(PA\sin\alpha + PB \cdot \sin\beta) \geqslant$$
$$8PA \cdot PB \cdot PC(\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma)$$

即得

$$PA' \cdot PB' \cdot PC' \geqslant 8PA \cdot PB \cdot PC$$

由上证明可知,当且仅当 $PA\sin\alpha = PB\sin\beta = PC\sin\gamma$ 时,式(5)取等号.

在式(5)中,分别取 P 为 $\triangle ABC$ 的外心、内心、重心、锐角三角形垂心时,便得到"一道 IMO 预选题的探索"(苏化明. 一道 IMO 预选题的探索[J]. 中等数学,2005(9))一文中的诸结果.

注 1. 关于式(5)的背景及证明可参阅《中等数学》(天津),2006 年第 5 期,杨学枝文:"一道 IMO 预选题的推广".

2. 重庆市合川太和中学沈毅老师于 2008 年 1 月 31 日向笔者提出如下猜想:P 是四面体 $ABCD$ 内一点,射线 AP 交四面体 $PBCD$ 的外接球于另一点 A',类似地得到 B',C',D'. 求证

$$PA' \cdot PB' \cdot PC' \cdot PD' \geqslant 81PA \cdot PB \cdot PC \cdot PD$$

此式证明可见第八章"练习"题 120 的解答.

例3 (自创题,2006.01.01)设 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC = a,CA = b,AB = c$,

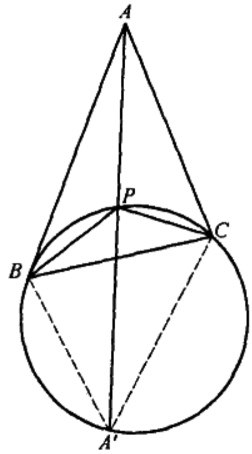


图2

外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,记 $Q = \prod \frac{b-c}{a}$,则

$$|Q| \leqslant 1 + \frac{5r}{R} - \frac{r^2}{2R^2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{R}\left(4 + \frac{r}{R}\right)^3} \tag{6}$$

当且仅当 $\frac{b-c}{a}, \frac{c-a}{b}, \frac{a-b}{c}$ 中,有两个相等时,式(6) 取等号.

证　记

$$y_1 = \prod \frac{b-c}{a} + \frac{b-c}{a}, y_2 = \prod \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}, y_3 = \prod \frac{b-c}{a} + \frac{a-b}{c}$$

则经计算有

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$y_2y_3 + y_3y_1 + y_1y_2 = -\left(1 - \frac{2r}{R} + \frac{1}{3}Q^2\right)$$

$$y_1y_2y_3 = \frac{2}{27}Q^3 - \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)Q$$

由此可知,y_1, y_2, y_3 是方程

$$y^3 - \left(1 - \frac{2r}{R} + \frac{1}{3}Q^2\right)y - \frac{2}{27}Q^3 + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)Q = 0 \quad ①$$

的三个实根. 根据三次方程有三个实根的充要条件可以得到

$$\frac{1}{4}\left[-\frac{2}{27}Q^3 + \frac{2}{3}\left(1 + \frac{r}{R}\right)Q\right]^2 + \frac{1}{27}\left[-\left(1 - \frac{2r}{R} + \frac{1}{3}Q^2\right)\right]^3 \leqslant 0 \quad ②$$

即

$$4Q^4 - \left(8 + \frac{40r}{R} - \frac{4r^2}{R^2}\right)Q^2 + 4\left(1 - \frac{2r}{R}\right)^3 \geqslant 0$$

等价于

$$(2Q^2-2-\frac{10r}{R}+\frac{r^2}{R^2}-\sqrt{\frac{r}{R}(4+\frac{r}{R})^3})(2Q^2-2-\frac{10r}{R}+\frac{r^2}{R^2}+\sqrt{\frac{r}{R}(4+\frac{r}{R})^3})\geqslant 0$$

另外易证

$$2Q^2-2-\frac{10r}{R}+\frac{r^2}{R^2}-\sqrt{\frac{r}{R}(4+\frac{r}{R})^3}<0$$

因此有

$$2Q^2-2-\frac{10r}{R}+\frac{r^2}{R^2}+\sqrt{\frac{r}{R}(4+\frac{r}{R})^3}\leqslant 0$$

即得式(6). 当且仅当方程 ① 有重根时,式 ② 取等号,即当且仅当$\frac{b-c}{a}$,$\frac{c-a}{b}$,$\frac{a-b}{c}$中,有两个相等时,式(6) 取等号.

注 1. 由式(6) 可以得到

$$\left|\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}\right|\leqslant 1-\sqrt{\frac{4r}{R}}+\frac{2(\sqrt{2}-1)r}{R} \tag{7}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(7) 取等号.

2. 式(6) 及其证明可参阅《福建中学数学》,2006 年第 4 期,杨学枝文:"三角形中关于$\left|\prod\frac{b-c}{a}\right|$的一个不等式".

例 4 (自创题,1986.4.22) 加权正弦和不等式:对于任意实数 x,y,z,任意正数 u,v,w 以及任意 $\triangle ABC$,有

$$2(yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C)\leqslant(\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}+\frac{z^2}{w})\sqrt{vw+wu+uv} \tag{8}$$

当且仅当 $x:y:z=\cos A:\cos B:\cos C$ 且 $u:v:w=\cot A:\cot B:\cot C$ 时,式(8) 取等号.

证

$$4(yz\sin A+zx\sin B+xy\sin C)^2\leqslant 4(vw+wu+uv)$$
$$(\frac{y^2z^2}{vw}\sin^2A+\frac{z^2x^2}{wu}\sin^2B+\frac{x^2y^2}{uv}\sin^2C)\leqslant$$
$$(vw+wu+uv)(\frac{x^2}{u}+\frac{y^2}{v}+\frac{z^2}{w})^2$$

注 这里应用了一个重要三角不等式:

设 $x,y,z,\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$,且 $\alpha+\beta+\gamma=(2k+1)\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,则

$$yz\sin^2\alpha + zx\sin^2\beta + xy\sin^2\gamma \leqslant \frac{1}{4}(x+y+z)^2$$

当且仅当 $x:y:z = \sin 2\alpha : \sin 2\beta : \sin 2\gamma$ 时上式取等号.

本例及其证明可参见《中等数学》,1988 年第 1 期,杨学枝文:"一个三角形不等式的再推广".

例 5 在锐角 $\triangle ABC$ 中,求证

$$\sum \tan B\tan C \geqslant \sum \cot^2 \frac{A}{2} \tag{9}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(9) 取等号.

证 先证局部不等式

$$\tan B\tan C \geqslant \cot^2 \frac{A}{2}$$

由于

$$\tan A\tan B = \frac{\cos(A-B) - \cos(A+B)}{\cos(A+B) + \cos(A-B)} = \frac{\cos(A-B) + \cos C}{-\cos C + \cos(A-B)} = \left[1 + \frac{2\cos C}{\cos(A-B) - \cos C}\right] \geqslant \left[1 + \frac{2\cos C}{1-\cos C}\right] = \frac{1+\cos C}{1-\cos C} = \cot^2 \frac{C}{2}$$

即

$$\tan B\tan C \geqslant \cot^2 \frac{A}{2}$$

所以

$$\sum \tan B\tan C \geqslant \sum \cot^2 \frac{A}{2}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(9) 取等号.

例 6 (自创题,2005. 06. 10) 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 体积为 V,它的四个顶点 A_1,A_2,A_3,A_4 所对的面的三角形的内切圆半径分别为 r_1,r_2,r_3,r_4,面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4,则

$$(S_2+S_3+S_4)^2 - S_1^2 \geqslant \left(\frac{3V}{r_1}\right)^2 \tag{10}$$

当且仅当二面角 $A_1-A_3A_4-A_2, A_1-A_4A_2-A_3, A_1-A_2A_3-A_4$ 的平面角相等时,式(10) 取等号.

证 如图 3 所示,设二面角 $A_1-A_3A_4-A_2, A_1-A_4A_2-A_3, A_1-A_2A_3-A_4$ 的平面角分别为 α,β,γ,从 A 作 $AH\perp$ 平面 $A_2A_3A_4$,垂足为 H,从 A_1 作 $A_1B\perp A_3A_4$,垂足为 B,连 BH,则二面角 $A_1-A_3A_4-A_2$ 的平面角为 $\angle A_1BH = \alpha$,于是

$$A_1H = A_1B\cdot\sin\alpha$$

因此,得到

$$A_1H \cdot A_3A_4 = 2S_2\sin\alpha = 2\sqrt{(S_2 + S_2\cos\alpha)(S_2 - S_2\cos\alpha)} \quad ①$$

同理,有

$$A_1H \cdot A_4A_2 = 2\sqrt{(S_3 + S_3\cos\beta)(S_3 - S_3\cos\beta)} \quad ②$$

$$A_1H \cdot A_2A_3 = 2\sqrt{(S_4 + S_4\cos\gamma)(S_4 - S_4\cos\gamma)} \quad ③$$

式①+②+③,并注意到$A_1H = \frac{3V}{S_1}$(V为四面体$A_1A_2A_3A_4$体积),$A_3A_4 + A_4A_2 + A_2A_3 = \frac{2S_1}{r_1}$以及空间射影定理,同时再应用柯西不等式,得到

$$\frac{3V}{r_1} = 2[\sqrt{(S_2 + S_2\cos\alpha)(S_2 - S_2\cos\alpha)} + \sqrt{(S_3 + S_3\cos\beta)(S_3 - S_3\cos\beta)} + \sqrt{(S_4 + S_4\cos\gamma)(S_4 - S_4\cos\gamma)}] \leqslant$$
$$2\sqrt{(S_2 + S_2\cos\alpha + S_3 + S_3\cos\beta + S_4 + S_4\cos\gamma)(S_2 - S_2\cos\alpha + S_3 - S_3\cos\beta + S_4 - S_4\cos\gamma)} =$$
$$2\sqrt{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)(-S_1 + S_2 + S_3 + S_4)}$$

即得式(10),由柯西不等式取等号条件易知,当且仅当

$$\frac{S_2 + S_2\cos\alpha}{S_2 - S_2\cos\alpha} = \frac{S_3 + S_3\cos\beta}{S_3 - S_3\cos\beta} = \frac{S_4 + S_4\cos\gamma}{S_4 - S_4\cos\gamma}$$

即有$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$,也就是$\alpha = \beta = \gamma$时,式(10)取等号.

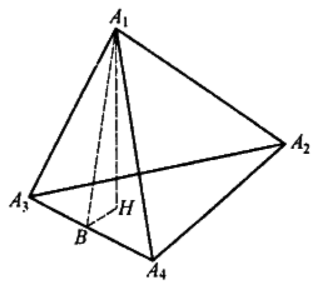


图3

注　见《中学数学研究》(广东),2005年第9期,杨学校文:"关于四面体的一个不等式".

例7　《数学通讯》,2006年第5期,谭志中文:"一个含双参数的分式不等式及其应用",在结束时,提出猜想:

设$x,y,z \in \mathbf{R}^+, a,b,c \in \mathbf{R}^+$,若$p > 2t \geqslant 0$,则有

$$\frac{xa^2}{tx + py} + \frac{yb^2}{ty + pz} + \frac{zc^2}{tz + px} \geqslant \frac{2p(bc + ca + ab) - (2t + p)(a^2 + b^2 + c^2)}{(p + t)(p - 2t)} \quad (11)$$

(注:原文 $t>0$,可放宽为 $t\geqslant 0$).

若令 $\lambda=\frac{y}{x},\mu=\frac{z}{y},\nu=\frac{x}{z},p=2n,t=m$,分别代入式(11),并经整理得到与之等价的以下命题.

命题1 设 $a,b,c,\lambda,\mu,\nu\in\mathbf{R}^+$,且 $\lambda\upsilon\nu=1$,又 $n>m\geqslant 0$,则

$$\frac{a^2}{m+2n\lambda}+\frac{b^2}{m+2n\mu}+\frac{c^2}{m+2n\nu}\geqslant \frac{2n(bc+ca+ab)-(n+m)(a^2+b^2+c^2)}{(2n+m)(n-m)} \quad ①$$

要证式①,可作变换:$\lambda=\frac{r_2r_3}{r_1^2},\mu=\frac{r_3r_1}{r_2^2},\nu=\frac{r_1r_2}{r_3^2},r_1,r_2,r_3\in\mathbf{R}^+$,代入式①,并整理得式①的等价式

$$\frac{r_1^2a^2}{mr_1^2+2nr_2r_3}+\frac{r_2^2b^2}{mr_2^2+2nr_3r_1}+\frac{r_3^2c^2}{mr_3^2+2nr_1r_2}\geqslant \frac{2n(bc+ca+ab)-(n+m)(a^2+b^2+c^2)}{(2n+m)(n-m)} \quad ②$$

要证式②,需用到以下引理.

引理1 (自创题,2005.06.01)平面上,设 $\triangle ABC$ 三边长 $BC=a,CA=b,AB=c$,面积为 Δ,P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上任意一点,点 P 到三边 BC,CA,AB 所在直线的距离分别为 $r_1,r_2,r_3,m,n\in\mathbf{R}^+$,且 $n>m\geqslant 0$,则

$$4(n-m)(2n+m)\Delta^2\geqslant\left[2n\sum bc-(n+m)\sum a^2\right]\left(m\sum r_1^2+2n\sum r_2r_3\right) \quad (12)$$

当且仅当 $2n\sum bc-(n+m)\sum a^2>0$,且

$$\frac{r_1}{|n(-a+b+c)-ma|}=\frac{r_2}{|n(a-b+c)-mb|}=\frac{r_3}{|n(a+b-c)-mc|}$$

时,式(12)取等号.

以上引理证明可参见《中学数学》(湖北),2005年第10期,杨学枝文:"平面内一个含参数的动点不等式".

在式(12)中,令 $2\Delta=r_1a+r_2b+r_3c$,可得到以下等价的引理.

引理2 设 $a,b,c,r_1,r_2,r_3\in\mathbf{R}^+,n>m\geqslant 0$,则有

$$(2n+m)(n-m)(r_1a+r_2b+r_3c)^2\geqslant [2n(bc+ca+ab)-(n+m)(a^2+b^2+c^2)][m(r_1^2+r_2^2+r_3^2)+2n(r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2)] \quad ③$$

当且仅当 $2n(bc+ca+ab)-(n+m)(a^2+b^2+c^2)>0$,且

$$\frac{r_1}{|n(-a+b+c)-ma|}=\frac{r_2}{|n(a-b+c)-mb|}=\frac{r_3}{|n(a+b-c)-mc|}$$

时,式③取等号.

由式③,并用柯西不等式,即得式②,从而可得式(11).

注 关于式(11)的证明可参见杨学枝文“对一道猜想不等式的解答”,《中学数学》(湖北)2007年第2期.

例8 (自创题,2004.02.08)如图4所示,$\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a, CA=b, AB=c$,P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上任意一点,从 P 作 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 所在的直线作垂线,垂足分别为 D, E, F,则

$$BF\cdot CE+CD\cdot AF+AE\cdot BD\geqslant\frac{1}{4}(2\sum bc-\sum a^2)\qquad(13)$$

当且仅当点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时,式(13)取等号.

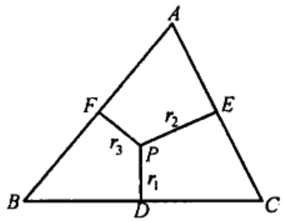


图4

证 设 $PD=r_1, PE=r_2, PF=r_3$,当 D,E,F 分别在 BC,CA,AB 边上时,则易证有 $BF=\dfrac{r_1+r_3\cos B}{\sin C}$ 等,由 $BF=\dfrac{r_1+r_3\cos B}{\sin B}$ 等代入式(13),得其等价式

$$\sum\left(\frac{r_1+r_3\cos B}{\sin B}\cdot\frac{r_1+r_2\cos C}{\sin C}\right)\geqslant\frac{1}{4}(2\sum bc-\sum a^2)$$

取 $ar_1=x, br_2=y, cr_3=z$,则上式又等价于

$$\sum\left[4bcx^2+\frac{2b}{c}(a^2-b^2+c^2)xz+\frac{2c}{b}(a^2+b^2-c^2)xy+\right.$$
$$\left.\frac{(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}{bc}yz\right]\geqslant(2\sum bc-\sum a^2)(\sum x)^2\Leftrightarrow$$
$$\sum(-a+b+c)^2x^2\geqslant\sum\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{bc}$$
$$(-a^2-b^2-c^2+2ab+2ac)yz\Leftrightarrow$$
$$[\sum(-a+b+c)x]^2\geqslant(2\sum bc-\sum a^2)\sum\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{bc}yz\Leftrightarrow$$
$$\sum\{(-a+b+c)\frac{x}{a}\cdot[(a-b+c)+(a+b-c)]\}\geqslant$$

$$(2\sum bc-\sum a^2)\cdot\sum\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{bc}yz \qquad (※)$$

在不等式$(\mu+\nu)\lambda'+(\nu+\lambda)\mu'+(\lambda+\mu)\nu'\geqslant 2\sqrt{\sum\mu\nu}\cdot\sqrt{\sum\mu'\nu'}$(见第一章"等价变换法证明不等式"例1中式(2))中令$\lambda'=(-a+b+c)\dfrac{x}{a}$，$\mu'=(a-b+c)\dfrac{y}{b}$，$\nu'=(a+b-c)\dfrac{z}{c}$，$\lambda=-a+b+c$，$\mu=a-b+c$，$\nu=a+b-c$，即得式(※)．故式(13)成立．

当D,E,F中有一个点在边的延长线上时，如点E在CA的延长线上，这时$\angle A$必为钝角，易证有$AE=\dfrac{-r_3-r_2\cos A}{\sin A}\geqslant\dfrac{r_3+r_2\cos A}{\sin A}$，因此，式(13)也成立．

注　另一证法参见《中学数学》，2004年第12期，杨学枝文："三角形中关于动点的几个不等式"．

例9　(自创题，1993，07，01)设r_1,r_2,r_3分别为$\triangle A_1A_2A_3$内任意一点P到边A_2A_3,A_3A_1,A_1A_2的距离，Δ表示$\triangle A_1A_2A_2$面积，则

$$\sum\frac{1}{r_2r_3}\geqslant\frac{1}{\Delta}(\sum\sqrt{\cot\frac{A}{2}})^2=(\sum\frac{1}{\sqrt{(S-a_2)(S-a_3)}})^2 \qquad (14)$$

这里$S=\dfrac{1}{2}(a_1+a_2+a_3)$，当且仅当$\triangle A_1A_2A_3$为正三角形，且点$P$为其中心时，式(14)取等号．

证　在不等式

$$(x+y+z)^2\geqslant 4(yz\cos^2\frac{A_1}{2}+zx\cos^2\frac{A_2}{2}+xy\cos^2\frac{A_3}{2})$$

中，令$x=a_1r_1$，$y=a_2r_2$，$z=a_3r_3$，可得

$$1\geqslant\frac{1}{\Delta}(\sum r_2r_3\cot\frac{A_1}{2})$$

再应用柯西不等式即得．

注　式(14)可参见《中学数学》(江苏)，1994年第2期，杨学枝文："一个几何不等式的加强"．

由式(14)可推得

$$\sum\frac{1}{r_2r_3}\geqslant 4(\sum\frac{1}{a_1})^2 \qquad (15)$$

$$\sum\frac{1}{r_2r_3}\geqslant\frac{1}{r^2}+\frac{6\sqrt{3}}{\Delta} \qquad (16)$$

r为$\triangle ABC$内切圆半径，当且仅当$\triangle A_1A_2A_3$为正三角形，且点P为其中心时，

(15)、(16) 两式取等号.

例10 （《美国数学月刊》2004年第1期问题11507）设 x,y,z 为正实数，矩形 $ABCD$ 内部有一点 P 满足 $PA=x,PB=y,PC=z$，求矩形面积的最大值.

解法一 （四川蒋明斌提供）

如图5所示，过 P 分别作直线 AB,BC 的垂线，分别交 AB,BC,CD,DA 于 E,F,G,H，记

$$PE=s,PG=t,PF=u$$
$$PH=v,PD=w$$

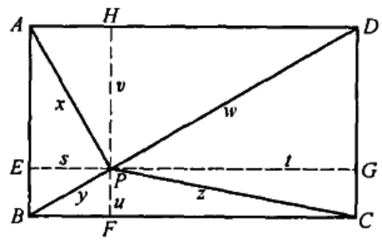


图5

设矩形面积为 S，则 $S=(s+t)\cdot(u+v)$，且满足

$$\begin{cases}s^2+v^2=x^2\\ s^2+u^2=y^2\\ u^2+t^2=z^2\\ v^2+t^2=w^2\end{cases} \quad (※)$$

应用柯西不等式，有

$$S=(s+t)(u+v)=(su+tv)+(sv+tu)\leqslant$$
$$\sqrt{(s^2+v^2)(u^2+t^2)}+\sqrt{(s^2+u^2)(v^2+t^2)}=$$
$$\sqrt{x^2z^2}+\sqrt{y^2w^2}=xz+yw$$

另，由上方程组(※)可求得 $w=\sqrt{x^2+z^2-y^2}$，因此

$$S\leqslant xz+y\sqrt{x^2+z^2-y^2}$$

当且仅当 $\frac{s}{u}=\frac{v}{t}$，且 $\frac{s}{v}=\frac{u}{t}$，即 $\frac{s}{u}=\frac{v}{t}$ 时取等号.

由 $\frac{s}{u}=\frac{v}{t}$ 及以上方程组(※)可解得 $s=\frac{xy}{\sqrt{x^2+z^2}},t=\frac{zw}{\sqrt{x^2+z^2}},u=\frac{yz}{\sqrt{x^2+z^2}},v=\frac{xw}{\sqrt{x^2+z^2}}$. 故当矩形边长分别为 $\frac{xy+zw}{\sqrt{x^2+z^2}},\frac{yz+xw}{\sqrt{x^2+z^2}},w=\sqrt{x^2+z^2-y^2}$ 时，矩形 $ABCD$ 面积最大，其最大值为

$$xz + yw = xz + y\sqrt{x^2 + z^2 - y^2}$$

解法二 （周兰林、孙世宝提供）

如图6所示，设过点 A 作 $AQ \mathbin{/\mkern-5mu/} BP$，过点 P 作 $PQ \mathbin{/\mkern-5mu/} BA$ 交于 Q，则四边形 $ABPQ$ 与四边形 $QPCD$ 均为平行四边形. 根据托勒密(Ptolemy) 不等式，有

$$S = AB \cdot AD = PQ \cdot AD \leqslant AQ \cdot PD + AP \cdot QD =$$

$$xz + y\sqrt{x^2 + z^2 - y^2}$$

记 $\angle PBC = \theta$，当 A,P,D,Q 四点共圆时，设此圆半径为 R，则

$$\tan\angle QAD = \tan\theta = \frac{2R\sin\theta}{2R\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \frac{QD}{PA} = \frac{z}{x}$$

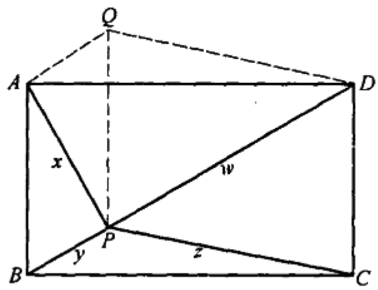


图6

注 以上参见《中学数学教学》(安徽)2005年第5期，蒋明斌等人文："求一类矩形面积的最大值的初等方法".

解法三 建立如图7所示直角坐标系，原点为 $D(0,0)$，$A(a,0)$，$B(a,c)$，$C(0,c)$，$P(t,s)$ $(0 < t < a, 0 < s < c)$. 由柯西不等式，有

$$|PA|\cdot|PC| + |PB|\cdot|PD| = \sqrt{(a-t)^2 + s^2}\cdot\sqrt{t^2 + (c-s)^2} +$$
$$\sqrt{(a-t)^2 + (c-s)^2}\cdot\sqrt{t^2 + s^2} = \sqrt{(a-t)^2 + s^2}\cdot\sqrt{(c-s)^2 + t^2} +$$
$$\sqrt{(c-s)^2 + (a-t)^2}\cdot\sqrt{t^2 + s^2} \geqslant (a-t)(c-s) + st +$$
$$(c-s)t + (a-t)s = ac$$

当且仅当 $\frac{a-t}{c-s} = \frac{s}{t}$ 时，上式取等号.

另外，易知有

$$PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$$

求得
$$PD = \sqrt{x^2 + z^2 - y^2}$$

所以
$$|PA|\cdot|PC| + |PB|\cdot|PD| = xz + y\sqrt{x^2 + z^2 - y^2}$$

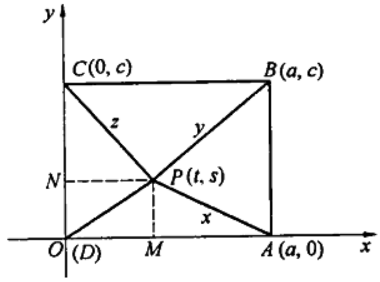


图7

即矩形 $ABCD$ 的面积最大值为 $xz+y\sqrt{x^2+z^2-y^2}$.

由柯西不等式的取等号条件有

$$\frac{a-t}{c-s}=\frac{s}{t}$$

即$\frac{MA}{NC}=\frac{MP}{NP}$,由此可知 $\triangle PMA\backsim\triangle PNC$,因此,又有

$$\frac{s}{t}=\frac{x}{z} \qquad ①$$

另外,由 $PB^2+PD^2=PA^2+PC^2$,得

$$y^2+t^2+s^2=x^2+z^2$$

即

$$s^2+t^2=x^2+z^2-y^2 \qquad ②$$

由 ①、② 两式可求得

$$\begin{cases} t=\sqrt{\dfrac{z^2(x^2+z^2-y^2)}{x^2+z^2}} \\ s=\sqrt{\dfrac{x^2(x^2+z^2-y^2)}{x^2+z^2}} \end{cases}$$

于是可求得

$$a-t=MA=\sqrt{PA^2-PM^2}=\sqrt{x^2-\frac{x^2(x^2+z^2-y^2)}{x^2+z^2}}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$c-s=NC=\sqrt{PC^2-PN^2}=\sqrt{z^2-\frac{z^2(x^2+z^2-y^2)}{x^2+z^2}}=\frac{yz}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

因此,矩形边长

$$DA=a=\frac{\sqrt{z^2(x^2+z^2-y^2)}+xy}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$DC = c = \frac{\sqrt{x^2(x^2+z^2-y^2)}+yz}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

例 11 （2005 年首届北方数学奥林匹克试题）设 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\sum\cos^2\alpha=1$，求证

$$2<\sum(1+\cos^2\alpha)^2\sin^4\alpha\leqslant\prod(1+\cos^2\alpha) \tag{17}$$

证

$$\begin{aligned}
&\sum(1+\cos^2\alpha)^2\sin^4\alpha=\sum(1-\cos^4\alpha)^2=\\
&3-2\sum\cos^4\alpha+\sum\cos^8\alpha=\\
&3-2[(\sum\cos^2\alpha)^2-2\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma]+\\
&[(\sum\cos^4\alpha)^2-2\sum\cos^4\beta\cos^4\gamma]=\\
&3-2(\sum\cos^2\alpha)^2+4\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma+\\
&[(\sum\cos^2\alpha)^2-2\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma]^2-\\
&2(\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma)^2+4\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma\sum\cos^2\alpha=\\
&2+2(\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma)^2+4\prod\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

由此易证式(17)左端式子. 对于其右端，因为

$$\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma\leqslant\frac{1}{3}(\sum\cos^2\alpha)^2=\frac{1}{3}$$

所以只要证

$$\begin{aligned}
&2+\frac{2}{3}\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma+4\prod\cos^2\alpha\leqslant\prod(1+\cos^2\alpha)=\\
&2+\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma+\prod\cos^2\alpha\Leftrightarrow\\
&\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma\geqslant9\prod\cos^2\alpha\Leftrightarrow\\
&\sum\cos^2\alpha\sum\cos^2\beta\cos^2\gamma\geqslant9\prod\cos^2\alpha
\end{aligned}$$

由均值不等式即知，此式成立.

注 由证明中知条件 $\alpha,\beta,\gamma\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 是多余的.

例 12 （自创题，2003.09.25）在 $\triangle ABC$ 中，三边长为 a,b,c，则

$$4b^3c^3\geqslant(b+c)^2(-a+b+c)^2(a-b+c)(a+b-c) \tag{18}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，式(18)取等号.

证

式(17)$\Leftrightarrow 4b^3c^3 \geqslant (b+c)^2[c^2-(a-b)^2][b^2-(c-a)^2] \Leftrightarrow$

$$4b^3c^3 \geqslant b^2c^2(b+c)^2 + (b+c)^2(a-b)^2(c-a)^2 - b^2(b+c)^2(b-a)^2 - c^2(b+c)^2(c-a)^2 \Leftrightarrow$$

$$b^2(b+c)^2(b-a)^2 + c^2(b+c)^2(c-a)^2 \geqslant b^2c^2(b-c)^2 + (b+c)^2(a-b)^2(c-a)^2 \Leftrightarrow$$

$$[b^3(b+c)(b-a)^2 + b^3c(b-a)^2 + b^2c^2(b-a)^2] + [c^3(b+c)(c-a)^2 + bc^3(c-a)^2 + b^2c^2(c-a)^2] \geqslant [b^2c^2(b-a)^2 + b^2c^2(a-c)^2 + 2b^2c^2(b-a)(a-c)] + (b+c)^2(b-a)^2(c-a)^2 \Leftrightarrow$$

$$[b^3(b+c)(b-a)^2 + c^3(b+c)(c-a)^2 - (b+c)^2(b-a)^2(c-a)^2] + bc[b^2(b-a)^2 + c^2(c-a)^2 + 2bc(b-a)(c-a)] \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(b+c)[b(b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2 + c(c+b-a)(c-b+a)(c-a)^2] + bc[b(b-a)+c(c-a)]^2 \geqslant 0$$

此式显然成立.

注 1. 式(18)等价于

$$2Rw_a \geqslant a(-a+b+c) \tag{19}$$

其中,R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径,w_a 为 a 边上的角平分线.

下面对式(19)再给出一种证明,先证以下引理.

引理 $\triangle ABC$ 中,三边长为 $BC=a, CA=b, AB=c$,BC 边上的中线和角平分线分别为 m_a, w_a,则

$$4m_aw_a \geqslant (a+b+c)(-a+b+c) \tag{20}$$

当且仅当 $b=c$ 时,式(20)取等号(或退化情况:$a-b+c=0$ 或 $a+b-c=0$).

证

式(20)$\Leftrightarrow 4bc(2b^2+2c^2-a^2) \geqslant (b+c)^2(a+b+c)(-a+b+c) \Leftrightarrow$

$$4bc(a+b+c)(-a+b+c) + 4bc(b-c)^2 \geqslant (b+c)^2(a+b+c)(-a+b+c) \Leftrightarrow$$

$$4bc(b-c)^2 - (a+b+c)(-a+b+c)(b-c)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(a-b+c)(a+b-c)(b-c)^2 \geqslant 0$$

今证式(19),由式(20)知,只要证

$$\frac{2R(a+b+c)(-a+b+c)}{4m_a} \geqslant a(-a+b+c)$$

即

$$\frac{R}{m_a} \geqslant \frac{2a}{a+b+c} = \frac{2r}{h_a} \tag{21}$$

这里 h_a 为 BC 边上的高，有

$$式(21)\Leftrightarrow abc\sum a \geqslant 2am_a\cdot 4\Delta \Leftrightarrow b^2c^2(a+b+c)\geqslant$$
$$[(a+b+c)(-a+b+c)+(b-c)^2]\prod(-a+b+c)$$

令 $x=-a+b+c, y=a-b+c, z=a+b-c, x,y,z\in\mathbf{R}^+$，则

$$式(21)\Leftrightarrow (x+y)^2(x+z)^2(x+y+z)\geqslant$$
$$16x^2yz(x+y+z)+4xyz(y-z)^2\Leftrightarrow$$
$$[(x-y)^2+4xy][(x-z)^2+4xz](x+y+z)\geqslant$$
$$16x^2yz(x+y+z)+4xyz(y-z)^2\Leftrightarrow$$
$$(x+y+z)(x-y)^2(x-z)^2+4[xy(x-z)^2+xz(x-y)^2]$$
$$(x+y+z)\geqslant 4xyz(y-z)^2$$

由此知，只需证

$$[y(x-z)^2+z(x-y)^2](x+y+z)\geqslant yz(y-z)^2 \qquad (※)$$

因为

$$[y(x-z)^2+z(x-y)^2](x+y+z)\geqslant$$
$$[y(x-z)^2+z(x-y)^2](z+y)\geqslant$$
$$yz(y-z)^2$$

所以式(※)成立.

2. 对于式(18)，不知是否有以下更强式

$$4ab^3c^3\geqslant\frac{4}{27}(\sum a)^3(-a+b+c)^2(a-b+c)(a+b-c) \qquad (22)$$

3. 注意到 $4(\sum a)^3\geqslant 27a(b+c)^2$，故式(22)比式(18)强.

例 13 （自创题，1998.09.23）在 $\triangle ABC$ 中，三边长 $BC=a, CA=b, AB=c$，BC 边上的中线为 m_a，$\angle A$ 平分线为 w_a，则

$$m_a-w_a\geqslant\frac{(b-c)^2}{2(b+c)} \qquad (23)$$

当且仅当 $b=c$ 时，式(23)取等号.

证一

$$式(23)\Leftrightarrow m_aw_a\geqslant w_a^2+\frac{(b-c)^2}{2(b+c)}w_a\Leftrightarrow$$
$$m_aw_a\geqslant\frac{bc(a+b+c)(-a+b+c)}{(b+c)^2}+$$
$$\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{2(b+c)^2}(b-c)^2=$$
$$\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)[1-(\frac{b-c}{b+c})^2]+$$

$$\frac{\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)}}{2(b+c)^2}(b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$4m_aw_a-(a+b+c)(-a+b+c) \geqslant$$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}\cdot(b-c)^2}{(b+c)^2}$$

$$[2\sqrt{bc}-\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}]=$$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}\cdot(a-b+c)(a+b-c)\cdot(b-c)^2}{(b+c)^2[2\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}]} \quad (※)$$

另外,有

$$4m_aw_a-(a+b+c)(-a+b+c)=\frac{16m_a^2w_a^2-(a+b+c)^2(-a+b+c)^2}{4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{4[(a+b+c)(-a+b+c)+(b-c)^2]\cdot\frac{bc(a+b+c)(-a+b+c)}{(b+c)^2}-(a+b+c)^2(-a+b+c)^2}{4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)[4bc(a+b+c)(-a+b+c)+4bc(b-c)^2-(b+c)^2(a+b+c)(-a+b+c)]}{(b+c)^2[4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)]}=$$

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c)^2[4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)]}\cdot(b-c)^2$$

于是,式(※)又等价于

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c)^2[4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)]}\cdot(b-c)^2 \geqslant$$

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}\cdot(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c)^2[2\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}]}\cdot(b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)}\cdot(b-c)^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{2\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}\cdot(b-c)^2 \quad (※※)$$

当 $b=c$ 时,式(※※)显然成立,此时,式(23)取等号.

当 $b \neq c$ 时,要证式(※※),只需证

$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}}{4m_aw_1+(a+b+c)(-a+b+c)} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{bc}+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}} \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{bc(a+b+c)(-a+b+c)} \geqslant 4m_aw_a \Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{2m_a}{b+c}$$

此式易证成立,事实上,有

$$(b+c)^2-4m_a^2=(b+c)^2-2b^2-2c^2+a^2=a^2-(b-c)^2=$$
$$(a-b+c)(a+b-c)>0$$

从而证得式(23).

证二

$$式(23)\Leftrightarrow 2m_a-\frac{(b-c)^2}{b+c}\geqslant 2w_a\Leftrightarrow$$

$$4m_a^2+\frac{(b-c)^4}{(b+c)^2}-4m_a\cdot\frac{(b-c)^2}{b+c}-\frac{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}{(b+c)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)+(b-c)^2+\frac{(b-c)^4}{(b+c)^2}-$$

$$\frac{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}{(b+c)^2}-4m_a\cdot\frac{(b-c)^2}{b+c}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(b-c)^2}{(b+c)^2}+(b-c)^2+$$

$$\frac{(b-c)^4}{(b+c)^2}-4m_a\cdot\frac{(b-c)^2}{b+c}\geqslant 0$$

由此只要证

$$(a+b+c)(-a+b+c)+(b+c)^2+(b-c)^2-4m_a\cdot(b+c)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$4m_a^2+(b+c)^2-4m_a(b+c)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$[2m_a-(b+c)]^2\geqslant 0$$

注 由上证明过程可得到

$$4m_aw_a-(a+b+c)(-a+b+c)=$$

$$\frac{16\Delta^2(b-c)^2}{(b+c)^2[4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)]}\geqslant 0 \tag{24}$$

$$4m_aw_a-(a+b+c)(-a+b+c)\leqslant\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b-c)^2}{2(b+c)^2} \tag{25}$$

$$m_a-w_a\leqslant\frac{(b-c)^2}{4m_a} \tag{26}$$

由式(26)两边同除以 w_a,并应用式(24),可得到

$$\frac{m_a}{w_a}\leqslant 1+\frac{(b-c)^2}{(a+b+c)(-a+b+c)} \tag{27}$$

注意到 $\frac{w_a}{m_a}\geqslant 1-\frac{(b-c)^2}{4m_a^2}\geqslant 1-(\frac{a}{b+c})^2$,有

$$\frac{w_a}{m_a}\geqslant 1-(\frac{a}{b+c})^2 \tag{28}$$

另外,由式(24)两边同除以 w_a^2 可得

$$\frac{w_a}{m_a}\leqslant\frac{4bc}{(b+c)^2} \tag{29}$$

以上(24)、(25)、(26)、(27)式,当且仅当 $b=c$ 时取等号.

证三 式(23)$\Leftrightarrow 4m_a^2+4w_a^2-8m_aw_a\geqslant\dfrac{(b-c)^4}{(b+c)^2}$,即

$$8m_aw_a\leqslant(a+b+c)(-a+b+c)+(b-c)^2+\frac{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}{(b+c)^2}-\frac{(b-c)^4}{(b+c)^2}=$$

$$(a+b+c)(-a+b+c)+\frac{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}{(b+c)^2}+\frac{4bc(b-c)^2}{(b+c)^2}=$$

$$2(a+b+c)(-a+b+c)-(a-b+c)(a+b-c)\cdot\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}+\frac{4bc(b-c)^2}{(b+c)^2}=$$

$$2(a+b+c)(-a+b+c)-(a-b+c)(a+b-c)\cdot\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}\Leftrightarrow$$

$$4m_aw_a-(a+b+c)(-a+b+c)\leqslant\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(b+c)^2}(b-c)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c)^2[4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)]}\leqslant\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2(b+c)^2}(b-c)^2\Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4m_aw_a+(a+b+c)(-a+b+c)}\leqslant\frac{1}{2}$$

$$4m_aw_a\geqslant(a+b+c)(-a+b+c)$$

即为以上式(24).

例 14 (王振提出)设 I,G 分别是 $\triangle ABC$ 的内心和重心,求证

$$AI+BI+CI\leqslant AG+BG+CG \tag{30}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(30)取等号.

式(30)是王振先生提出的有相当难度的命题. 冷岗松先生在《几何不等式》(华东师范大学出版社,2005年4月)P46 ~ 48介绍了王振先生的证明. 下面是笔者于2006年3月5日利用式(23),给出一种较为简捷的证明.

证 设 $\triangle ABC$ 三边分别为 $BC=a,CA=b,AB=c$ 其对应边上的中线分别为 m_a,m_b,m_c,角平分线分别为 w_a,w_b,w_c,则易知,有

$$AI=\frac{b+c}{(a+b+c)}w_a,\ BI=\frac{c+a}{a+b+c}w_b,\ CI=\frac{a+b}{a+b+c}w_c$$

$$AG = \frac{2}{3}m_a,\ BG = \frac{2}{3}m_b,\ CG = \frac{2}{3}m_c$$

由式(23)及以上等式,得到

$$AI + BI + CI = \sum \frac{b+c}{a+b+c}w_a \leqslant \sum \frac{b+c}{a+b+c}m_a - \sum \frac{(b-c)^2}{2(a+b+c)}$$

于是,只需证

$$\sum \frac{b+c}{a+b+c}m_a - \sum \frac{(b-c)^2}{2(a+b+c)} \leqslant \frac{2}{3}\sum m_a \Leftrightarrow$$

$$2\sum (b+c-2a)m_a \leqslant 3\sum (b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$2\sum (b-c)(m_c - m_b) \leqslant 3\sum (b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{(b+c)(b-c)^2}{2(m_b+m_c)} \leqslant \sum (b-c)^2 \qquad (※)$$

要证式(※),又只需证

$$\frac{b+c}{2(m_b+m_c)} \leqslant 1,\ \frac{c+a}{2(m_c+m_a)} \leqslant 1,\ \frac{a+b}{2(m_a+m_b)} \leqslant 1$$

由于证法类似,只证其中一个即可,今证上面第一式,即

$$2(m_b+m_c) \geqslant b+c$$

如图 8 所示,$\triangle ABC$ 中,E,F 分别为 AC,AB 的中点,BE,CF 交于 G,则

$$\begin{aligned} b+c = 2CE + 2BF &\leqslant 2(CG + GE + BG + GF) = \\ &2(BE + CF) = \\ &2(m_b + m_c) \end{aligned}$$

因此知式(※)成立,式(30)获证.

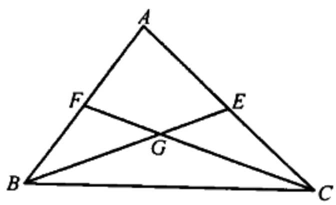


图 8

例 15 (自创题,2003.09.25)$\triangle ABC$ 三边长为 $BC = a$,$CA = b$,$AB = c$,$\angle A$ 平分线为 w_a,则

$$w_a \geqslant \frac{3\sqrt{3abc(-a+b+c)}}{2(a+b+c)} \qquad (31)$$

当且仅当 $b + c = 2a$ 时,式(31)取等号.

证

$$\text{式}(31)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a+b+c}}{b+c}\geqslant\frac{3\sqrt{3a}}{2(a+b+c)}$$

$$4(a+b+c)^3\geqslant 27a(b+c)^2 \qquad (※)$$

由于

$$4(a+b+c)^3=4\left(\frac{b+c}{2}+\frac{b+c}{2}+a\right)^3\geqslant$$

$$4\cdot 27\cdot\frac{b+c}{2}\cdot\frac{b+c}{2}\cdot a=$$

$$27a(b+c)^2$$

即得式(※).

注 由式(31)可得

$$\sum w_a^2\geqslant\frac{27}{2}Rr \quad (\text{刘健猜想}) \qquad (32)$$

$$\sum a(b+c)w_a^2\geqslant 162(Rr)^2 \qquad (33)$$

$$\sum\left(\sqrt{-a+b+c}\cdot w_a\right)\geqslant\frac{3\sqrt{3abc}}{2} \qquad (34)$$

以上 w_a,w_b,w_c 分别为 $\triangle ABC$ 中 $\angle A,\angle B,\angle C$ 平分线,R 与 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径. 当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,(32)、(33)、(34) 三式均取等号.

例 16 设 m_a,m_b,m_c 为 $\triangle ABC$ 中 BC,CA,AB 边上的中线.

ⅰ)(自创题,2004. 02. 23) 若 $\triangle ABC$ 为任意三角形,则

$$\min\{m_a,m_b,m_c\}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\sum bc} \qquad (35)$$

ⅱ) 若 $\triangle ABC$ 为非钝角三角形,则

$$\max\{m_a,m_b,m_c\}\geqslant R+r \qquad (36)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,以上二式取等号.

证 ⅰ) 设 $a\geqslant b\geqslant c$,下面证

$$m_a\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\sum bc} \qquad ①$$

$$\sum bc-4m_a^2=\sum bc-2b^2-2c^2+a^2=$$

$$(a+b)(a+c)-2(b^2+c^2)=$$

$$(a+b)(a+c)-2(b^2+c^2)=$$

$$(a^2+ab-2b^2)+(ac+bc-2c^2)\geqslant 0$$

故式 ① 成立.

注 易证$\frac{1}{2}\sqrt{\sum bc}\leqslant R+r$,因此,又有

$$\min\{m_a,m_b,m_c\}\leqslant R+r \tag{37}$$

这里 R 与 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径与内切圆半径(下同).

ⅱ) 设 $a\leqslant b\leqslant c$,下面证

$$m_a\geqslant R+r \quad ②$$

$4m_a^2-4(R+r)^2=2b^2+2c^2-a^2-\frac{4(abc)^2}{16\Delta^2}-\frac{\prod(-a+b+c)}{a+b+c}-\frac{4abc}{a+b+c}=$

$\frac{ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+3b^2+3c^2-2a^2b-2a^2c-2abc}{a+b+c}-\frac{4a^2b^2c^2}{16\Delta^2}\geqslant$

$\frac{ab^2+ac^2+b^2c+bc^2+3b^2+3c^2-2a^2b-2a^2c-2abc}{a+b+c}-\frac{4c^2}{3}=$

(注意到非钝角 $\triangle ABC$ 中,在 $a\leqslant b\leqslant c$ 条件下,有 $16\Delta^2=4a^2b^2\sin^2c\geqslant 3a^2b^2$)

$\frac{3a(b-c)^2+c^2(c-b)+3(b^3-a^3)+(3a+\frac{7}{2}c)(c-a)^2+\frac{1}{2}c(c^2-a^2)+(3c+6b)(b^2-a^2)}{3(a+b+c)}\geqslant$

0

故式 ② 成立. 以上 Δ 表示 $\triangle ABC$ 面积.

注 式(36) 可进一步加强为

$$\max\{h_a,h_b,h_c\}\geqslant R+r \tag{38}$$

这里 h_a,h_b,h_c 分别为非锐角 $\triangle ABC$ 边 BC,CA,AB 上的高. 证明可参见贺斌:"与三角形垂心有关的两个不等式",《中学数学》2004 年第 11 期.

式(36) 的另一加强可参见第八章"练习" 题 129.

例 17 在 $\triangle ABC$ 中,求证

$$\sum\frac{\cos A-\frac{1}{2}}{\cos B+\cos C}\geqslant 0 \tag{39}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(39) 取等号.

证

$$\sum\frac{\cos A-\frac{1}{2}}{\cos B+\cos C}=\sum\frac{\frac{a(-a^2+b^2+c^2-bc)}{2abc}}{\frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c)}{2abc}}=$$

$$\sum\frac{abc-a(a-b+c)(a+b-c)}{(a-b+c)(a+b-c)(b+c)}=$$

$$\frac{abc}{\prod(-a+b+c)}\sum\frac{-a+b+c}{b+c}-\sum\frac{a}{b+c}=$$

$$\frac{3abc}{\prod(-a+b+c)}-\frac{abc}{\prod(-a+b+c)}\cdot\sum\frac{a}{b+c}-\sum\frac{a}{b+c}=$$

$$\left[\frac{abc}{\prod(-a+b+c)}-1\right]\left(3-\sum\frac{a}{b+c}\right)-\left(2\sum\frac{a}{b+c}-3\right)=$$

$$\left(3-\sum\frac{a}{b+c}\right)\cdot\frac{1}{2}\sum\frac{(b-c)^2}{(a-b+c)(a+b-c)}-$$

$$\sum\frac{1}{(a+b)(a+c)}(b-c)^2 \tag{※}$$

因为

$$\frac{1}{2(a-b+c)(a+b-c)}-\frac{1}{(a+b)(a+c)}=$$

$$\frac{a(b+c-a)+bc+2(b-c)^2}{2(a-b+c)(a+b-c)(a+b)(a+c)}\geqslant 0$$

类似还有二式,所以由式(※)知,只需证

$$3-\sum\frac{a}{b+c}-1\geqslant 0$$

即

$$2\geqslant\sum\frac{a}{b+c}$$

但$2-\sum\frac{a}{b+c}=\frac{abc+\sum a(-a+b+c)}{\prod(b+c)}\geqslant 0$. 故式(※)不小于零,式(39)成立.

例18 在$\triangle ABC$中,$CA=b,AB=c,\angle A$平分线为w_a,BC边上中线为m_a,则

$$\frac{m_a}{w_a}\geqslant\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2bc}} \tag{40}$$

当且仅当$b=c$时,式(40)取等号.

证一

$$\frac{b^2+c^2}{2bc}-\left(\frac{m_a}{w_a}\right)^2=\frac{b^2+c^2}{2bc}-\frac{(2b^2+2c^2-a^2)(b+c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{b^2+c^2}{2bc}-\left\{\frac{(b+c)^2}{4bc}+\frac{(b+c)^2(b-c)^2}{4bc[(b+c)^2-a^2]}\right\}=$$

$$\frac{(b-c)^2}{4bc}-\frac{(b+c)^2(b-c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{-a^2(b-c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}\leqslant 0$$

证二 由本章式(29) $\frac{w_a}{m_a}\leqslant\frac{4bc}{(b+c)^2}$ 知,只需证

$$[\frac{4bc}{(b+c)^2}]^2 \leqslant \frac{2bc}{b^2+c^2} \Leftrightarrow (b+c)^4 \geqslant 8bc(b^2+c^2)$$

此式由$(b+c)^4-8bc(b^2+c^2)=(b-c)^4\geqslant 0$即得.

例 19 非钝角 $\triangle ABC$ 中,$CA=b,AB=c,\angle A$ 平分线为 w_a,BC 边上的中线为 m_a,则

$$\frac{b^2+c^2}{2bc} \geqslant \frac{m_a}{w_a} \tag{41}$$

当且仅当 $b=c$ 时,式(41) 取等号.

证一

$$(\frac{b^2+c^2}{2bc})^2-(\frac{m_a}{w_a})^2=\frac{(b^2+c^2)^2}{4b^2c^2}-\frac{(2b^2+2c^2-a^2)(b+c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{(b^2+c^2)^2}{4b^2c^2}-\frac{[(a+b+c)(-a+b+c)+(b-c)^2](b+c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{(b^2+c^2)^2}{4b^2c^2}-\frac{(b+c)^2}{4bc}-\frac{(b+c)^2(b-c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\frac{(b^2+bc+c^2)(b-c)^2}{4b^2c^2}-\frac{(b+c)^2(b-c)^2}{4bc(a+b+c)(-a+b+c)}=$$

$$\left[\frac{(b+c)^2(b^2+c^2)-(b^2+bc+c^2)a^2}{4b^2c^2(a+b+c)(-a+b+c)}\right](b-c)^2\geqslant 0$$

(注意到 $b^2+c^2\geqslant a^2$).

证二 由本章式(27)

$$\frac{m_a}{w_a}\leqslant 1+\frac{(b-c)^2}{(a+b+c)(-a+b+c)}$$

知,只需证

$$1+\frac{(b-c)^2}{(a+b+c)(-a+b+c)}\leqslant\frac{b^2+c^2}{2bc}$$

此式易证,从略.

例 20 在非钝角 $\triangle ABC$ 中,$\angle A,\angle B,\angle C$ 平分线分别为 w_a,w_b,w_c,BC,CA,AB 边上的中线分别为 m_a,m_b,m_c,则

$$\sum\frac{m_bm_c}{w_bw_c}\leqslant(\sum\cot A)^2 \tag{42}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(42) 取等号.

证 若 $\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c,面积为 Δ,由 $\sum\cot A=\frac{\sum a^2}{4\Delta}$ 知,式(42) 等价于

$$\sum\frac{m_bm_c}{w_bw_c}\leqslant(\frac{\sum a^2}{4\Delta})^2 \tag{※}$$

由例 19 中式(41)知,要证式(※)成立,只要证

$$\sum \frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{4a^2bc} \leqslant \frac{(\sum a^2)^2}{(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum a^3}{4abc}+\frac{\sum b^2c^2\cdot\sum bc}{4a^2b^2c^2} \leqslant \frac{(\sum a^2)^2}{(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)} \qquad (※※)$$

因为

$$\frac{(\sum a^2)^2}{(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)}-\frac{\sum a^3}{abc}=$$

$$\left[\frac{(\sum a^2)^2}{(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)}-3\right]-\left(\frac{\sum a^3}{abc}-3\right)=$$

$$\sum\left[\frac{2(b+c)^2}{(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)}-\frac{\sum a}{2abc}\right](b-c)^2 \geqslant$$

$$\sum\left[\frac{\sum a}{2\prod(-a+b+c)}-\frac{\sum a}{2abc}\right](b-c)^2 \geqslant 0$$

注 这里用到

$$2(b+c) > \sum a, abc \geqslant \prod(-a+b+c)$$

所以

$$\frac{(\sum a^2)^2}{4(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)} \geqslant \frac{\sum a^3}{4abc} \qquad ①$$

又因为

$$9(abc)^2 \geqslant 16(\sum a^2)\Delta^2=(\sum a^2)(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c) \geqslant$$

$$(\sum bc)(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)$$

$$(\sum a^2)^2 \geqslant 3\sum b^2c^2$$

所以

$$\frac{3(\sum a^2)^2}{4(\sum a)\cdot\prod(-a+b+c)} \geqslant \frac{\sum b^2c^2\cdot\sum bc}{4a^2b^2c^2} \qquad ②$$

式 ① + ② 即得式(※※),从而知式(42)成立.

例 21 (自创题,2007.01.03)设 $\alpha,\beta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,求证

$$1+3\sin\alpha\sin\beta \geqslant 2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta) \qquad (43)$$

当且仅当 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}$;或 $\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{6}$;或 $\alpha=\frac{\pi}{6},\beta=\frac{\pi}{2}$ 时,式(43)取等号.

证 设 $x=2\sin\alpha,y=2\sin\beta$. 由 $\alpha,\beta\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$ 知,$x,y\in[1,2]$,于是原命题变为当 $x,y\in[1,2]$ 时,证明

$$4+3xy\geqslant 2(x^2+y^2) \qquad ①$$

不妨设 $2\geqslant x\geqslant y\geqslant 1$,则式①又可以写成

$$(2-x)(2+y)+2(x-y)(1-x+y)\geqslant 0$$

此式显然成立,即式①成立,故式(43)获证,且易知其取等号条件.

例22 (“中国不等式研究网站”,“几何不等式”专栏,2006年12月17日提供)设 m_a,m_b,m_c 与 h_a,h_b,h_c 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 上的中线与高线,则

$$\sum\frac{h_a}{m_b}\leqslant 3 \qquad (44)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(44)取等号.

证 式(44)$\Leftrightarrow\sum h_am_cm_a\leqslant 3m_am_bm_c$,因为

$$abcm_am_bm_c\geqslant\frac{\Delta}{2}\cdot\sum b^2c^2$$

(这里及下文“Δ”表示 $\triangle ABC$ 面积,上式可参见《数学通报》,1995年第12期,杨学枝文:“一个三角形中线不等式”),因此,只需证

$$\sum h_am_cm_a\leqslant\frac{3\Delta}{2}\cdot\sum b^2c^2\Leftrightarrow 4\sum bcm_cm_a\leqslant 3\sum b^2c^2 \qquad (※)$$

但由柯西不等式及中线公式,有

$$\begin{aligned}4\sum bcm_cm_a&\leqslant\sqrt{\sum b^2c^2\cdot\sum(2a^2+2b^2-c^2)(2c^2+2b^2-a^2)}=\\&\sqrt{\sum b^2c^2\cdot 9\sum b^2c^2}=\\&3\sum b^2c^2\end{aligned}$$

即得式(※),故式(44)成立,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(44)取等号.

例23 设 $\triangle ABC$ 的三边长为 a,b,c,相应边上的三条高线与旁切圆半径分别为 h_a,h_b,h_c 与 r_a,r_b,r_c,试证

$$\frac{h_a}{r_a+h_b}+\frac{h_b}{r_b+h_c}+\frac{h_c}{r_c+h_a}\geqslant\frac{3}{2} \qquad (45)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(45)取等号.

证 为证命题,先给出以下引理.

引理 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$x^3y+y^3z+z^3x\leqslant xyz\sum x+\frac{4}{3}\left(\sum x\right)^2\sum yz-4\left(\sum yz\right)^2 \tag{46}$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 $x=2y,z=0$,或 $y=2z,x=0$ 或 $z=2x,y=0$ 时取等号(这里及下文中"$\sum$",表示循环和).

引理证明 由于 $x\geqslant y\geqslant z$ 时,有

$$x^3y+y^3z+z^3x-(xy^3+yz^3+zx^3)=$$
$$(x+y+z)(x-y)(y-z)(x-z)\geqslant 0$$

因此,只要证当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时(46)式成立即可. 这时有

$$xyz\sum x+\frac{4}{3}\left(\sum x\right)^2\sum yz-4\left(\sum yz\right)^2-(x^3y+y^3z+z^3x)=$$
$$4xz(x-y)(x-z)+4yz(y-z)(x-z)+$$
$$xy(x+z-2y)^2+yz(x-y)^2+xz(y-z)^2\geqslant 0$$

故式(46)成立.

今证式(45),令

$$x=-a+b+c,y=a-b+c,z=a+b-c\quad x,y,z\in\mathbf{R}^+$$

则式(45)经变量代换后等价于

$$\sum\frac{x(z+x)}{(y+z)(z+3x)}\geqslant\frac{3}{4} \tag{47}$$

记 $s_1=\sum x,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,则

$$\text{式(47)左边}=\sum\frac{x(z+x)(4x^2+4y^2+z^2+9yz+3zx+3xy)}{(y+z)(z+3x)(4x^2+4y^2+z^2+9yz+3zx+3xy)}=$$

$$\sum\frac{3x(z+x)(4x^2+4y^2+z^2+9yz+3zx+3xy)}{(3yz+9zx+9xy+3z^2)(4x^2+4y^2+z^2+9yz+3zx+3xy)}\geqslant$$

$$\frac{12\sum x(z+x)(4x^2+4y^2+z^2+9yz+3zx+3xy)}{\left(4\sum x^2+12\sum yz\right)^2}=$$

$$\frac{3\sum x(z+x)\left(4\sum x^2+3\sum yz-3z^2+6yz\right)}{4\left(\sum x^2+3\sum yz\right)^2}=$$

$$\frac{3\left(\sum x^2+\sum yz\right)\left(4\sum x^2+3\sum yz\right)-9\sum z^3x-9\sum z^2x^2+36xy\sum x}{4\left(\sum x^2+3\sum yz\right)^2}=$$

$$\frac{3(s_1^2-s_2)(4s_1^2-5s_2)-9\sum z^3x-9s_2^2+54s_1s_3}{4(s_1^2+s_2)^2}$$

因此,只需证

$$(s_1^2-s_2)(4s_1^2-5s_2)-3\sum z^3x-3s_2^2+18s_1s_3\geqslant(s_1^2+s_3)^2 \tag*{①}$$

由于$\sum z^3x \leqslant s_1s_3+\frac{4}{3}s_1^2s_2-4s_2^2$(即式(46)),因此,要证式①,又只需要证

$$(s_1^2-s_2)(4s_1^2-5s_2)-3s_1s_3-4s_1^2s_2+12s_2^2-3s_2^2+18s_1s_3 \geqslant (s_1^2+s_2)^2 \Leftrightarrow$$
$$3s_1^4-15s_1^2s_2+13s_2^2+15s_1s_3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$3(s_1^4-5s_1^2s_2+4s_2^2+6s_1s_3)+(s_2^2-3s_1s_3) \geqslant 0 \quad ②$$

今证式②成立.由对称性,不妨设$x \geqslant y \geqslant z$,则

$$s_1^4-5s_1^2s_2+4s_2^2+6s_1s_3=(s_1^2-2s_2)(s_1^2-3s_2)-2(s_2^2-3s_1s_3)=$$
$$\frac{1}{2}\sum x^2 \cdot \sum (y-z)^2-\sum x^2(y-z)^2=$$
$$\frac{1}{2}\sum(-x^2+y^2+z^2)(y-z)^2 \geqslant$$
$$\frac{1}{2}[(-x^2+y^2+z^2)(y-z)^2+(x^2-y^2+z^2)(y-z)^2+$$
$$(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2]=$$
$$\frac{1}{2}[2z^2(y-z)^2+(x^2+y^2-z^2)(x-y)^2] \geqslant 0$$

又
$$s_2^2-3s_1s_3=\frac{1}{2}\sum x^2(y-z)^2 \geqslant 0$$

故式②成立,从而式①成立,原命题获证.由证明中知,当且仅当$x=y=z$时,式(47)取等号,即当且仅当$a=b=c$,$\triangle ABC$为正三角形时,式(45)取等号.

注 1.在式(47)证明中,如式(47)左边第一项的分子分母同时都乘以$4x^2+4y^2+z^2+9yz+3zx+3xy$等式子,其来源是应用待定系数方法

$$\sum \frac{x(z+x)}{(y+z)(z+3x)}=$$

$$\sum \frac{x(z+x)[\lambda x^2+\lambda y^2+(\lambda-1)z^2+(\frac{13}{3}-\lambda)yz+(\frac{7}{3}-\lambda)zx+(\frac{7}{3}-\lambda)xy]}{(yz+3zx+3xy+z^2)[\lambda x^2+\lambda y^2+(\lambda-1)z^2+(\frac{13}{3}-\lambda)yz+(\frac{7}{3}-\lambda)zx+(\frac{7}{3}-\lambda)xy]} \geqslant$$

$$\frac{4\sum x(z+x)[\lambda x^2+\lambda y^2+(\lambda-1)z^2+(\frac{13}{3}-\lambda)yz+(\frac{7}{3}-\lambda)zx+(\frac{7}{3}-\lambda)xy]}{[\lambda\sum x^2+(\frac{16}{3}-\lambda)\sum yz]^2}=$$

$$\frac{4\sum x(z+x)[\lambda\sum x^2+(\frac{7}{3}-\lambda)\sum yz-z^2+2yz]}{[\lambda\sum x^2+(\frac{16}{3}-\lambda)\sum yz]^2}=$$

$$\frac{4[\lambda\sum x^2+(\frac{7}{3}-\lambda)\sum yz](\sum x^2+\sum yz)-16\sum z^3x-16\sum y^2z^2+64xyz\sum x}{[\lambda\sum x^2+\frac{16}{3}-\lambda)\sum yz]^2} \geqslant$$

$$\frac{4[\lambda s_1^2+(\frac{7}{3}-3\lambda)s_2](s_1^2-s_2)-16s_1s_3-\frac{64}{3}s_1^2s_2+64s_2^2-16s_2^2+32s_1s_3+64s_1s_3}{[\lambda s_1^2+(\frac{16}{3}-3\lambda)s_2]^2}$$

(应用引理中式(46)).

由此可知,只需证

$$16[\lambda s_1^2+(\frac{16}{3}-3\lambda)s_2](s_1^2-s_2)+80s_1s_3-\frac{64}{3}s_1^2s_2+48s_2^2\geqslant$$

$$3[\lambda s_1^2+(\frac{16}{3}-3\lambda)s_2]^2\Leftrightarrow$$

$$(16\lambda-3\lambda^2)s_1^4+(16-96\lambda+18\lambda^2)s_1^2s_2+80s_1s_3+$$

$$(-\frac{224}{3}+144\lambda-27\lambda^2)s_2^2\geqslant 0$$

由于已知有 $s_1^4-5s_1^2s_2+6s_1s_3+4s_2^2\geqslant 0$,故可令

$$\frac{-16+96\lambda-18\lambda^2}{16\lambda-3\lambda^2}=5$$

求得 $\lambda=4$ 或 $\lambda=\frac{4}{3}$,易判断这时只可取 $\lambda=\frac{4}{3}$.

2. 式(45)由江西刘健先生提出,可参见《不等式研究通讯》,2007 年第 14 卷第 2 期,刘健文:"三元轮换对称不等式的一个定理及其证明".

例 24 (沈毅,2008.04.10 提出)P 为非钝角 $\triangle ABC$ 内任意一点,记 $\angle PAC=\alpha_1$,$\angle PAB=\alpha_2$,$\angle PBA=\beta_1$,$\angle PBC=\beta_2$,$\angle PCB=\gamma_1$,$\angle PCA=\gamma_2$,则

$$\sin 2\alpha_1\sin 2\beta_1\sin 2\gamma_1+\sin 2\alpha_2\sin 2\beta_2\sin 2\gamma_2\leqslant 2\sin A\sin B\sin C \quad (48)$$

当且仅当点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时,式(48)取等号.

证一 (沈毅,2008.04.19 提供)根据积化和差公式,有

$$\sin 2\alpha_1\sin 2\beta_1\sin 2\gamma_1+\sin 2\alpha_2\sin 2\beta_2\sin 2\gamma_2=$$

$$\frac{1}{4}[-\sin(2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1)+\sin(2\alpha_1+2\beta_1-2\gamma_1)+\sin(2\alpha_1-2\beta_1+2\gamma_1)+$$

$$\sin(-2\alpha_1+2\beta_1+2\gamma_1)-\sin(2\alpha_2+2\beta_2+2\gamma_2)+\sin(2\alpha_2+2\beta_2-2\gamma_2)+$$

$$\sin(2\alpha_2-2\beta_2+2\gamma_2)+\sin(-2\alpha_2+2\beta_2+2\gamma_2)]=$$

$$\frac{1}{2}[-\sin(A+B+C)\cos(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1-\alpha_2-\beta_2-\gamma_2)+$$

$$\sin(A+B-C)\cos(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-\alpha_2-\beta_2+\gamma_2)+$$

$$\sin(A-B+C)\cos(\alpha_1-\beta_1+\gamma_1-\alpha_2+\beta_2-\gamma_2)+$$

$$\sin(-A+B+C)\cos(-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\alpha_2-\beta_2-\gamma_2)]=$$

$$\frac{1}{2}[\sin 2C\cos(\alpha_1+\beta_1-\gamma_1-\alpha_2-\beta_2+\gamma_2)+$$

$\sin 2B\cos(\alpha_1-\beta_1+\gamma_1-\alpha_2+\beta_2-\gamma_2)+$

$\sin 2A\cos(-\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\alpha_2-\beta_2-\gamma_2)]\leqslant$

$\frac{1}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=$

$2\sin A\sin B\sin C$

即得原式,由以上证明可知,当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2,\gamma_1=\gamma_2$,即点 P 为 $\triangle ABC$ 的内心时取等号.

证二 原式,即

$$4\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1(\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2\cos\gamma_2)\leqslant\sin A\sin B\sin C \qquad ①$$

(易知有 $\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1=\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2$,见图9).

下面证明式①. 如图9所示,从 P 分别向 BC,CA,AB 三边作垂线,垂足分别为 D,E,F,易证有

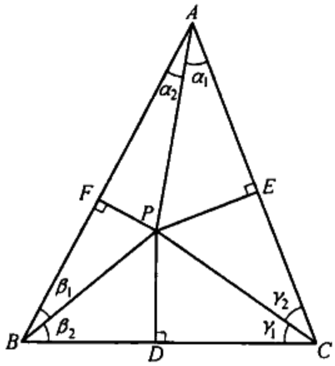


图9

$$AE=\frac{r_3+r_2\cos A}{\sin A},\ AF=\frac{r_2+r_3\cos A}{\sin A}$$

$$BF=\frac{r_1+r_3\cos B}{\sin B},\ BD=\frac{r_3+r_1\cos B}{\sin B}$$

$$CD=\frac{r_2+r_1\cos C}{\sin C},\ CE=\frac{r_1+r_2\cos C}{\sin C}$$

$$\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1=\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2=\frac{r_1r_2r_3}{PA\cdot PB\cdot PC}$$

$$\cos\alpha_1=\frac{AE}{PA},\ \cos\alpha_2=\frac{AF}{PA},\ \cos\beta_1=\frac{BF}{PB}$$

$$\cos\beta_2=\frac{BD}{PB},\ \cos\gamma_1=\frac{CD}{PC},\ \cos\gamma_2=\frac{CE}{PC}$$

又

$$PA^2\sin A = PA\cdot EF = AE\cdot r_3 + AF\cdot r_2 \quad \text{（托罗密定理）}$$

$$PB^2\sin B = BF\cdot r_1 + BD\cdot r_3$$

$$PC^2\sin C = CD\cdot r_2 + CE\cdot r_1$$

将以上诸式代入式①，并经整理得到

$$4r_1r_2r_3[(r_3+r_2\cos A)(r_1+r_3\cos B)(r_2+r_1\cos C)+(r_2+r_3\cos A)(r_3+r_1\cos B)(r_1+r_2\cos C)]\leqslant (r_2^2+r_3^2+2r_2r_3\cos A)(r_3^2+r_1^2+2r_3r_1\cos B)(r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos C)$$

展开并整理即得

$$\sum r_1^2(r_2^2-r_3^2)^2+2\sum r_2r_3(r_1^2-r_2^2)(r_1^2-r_3^2)\cos A\geqslant 0\Leftrightarrow [r_1(r_2^2-r_3^2)+r_2(r_3^2-r_1^2)\cos B+r_3(r_1^2-r_2^2)\cos C]^2+[r_2(r_3^2-r_1^2)\sin B-r_3(r_1^2-r_2^2)\sin C]^2\geqslant 0$$

故式(48)成立. 易知取等号条件.

注 1. 本题是重庆市合川太和中学沈毅老师于2008年4月10日向笔者提出的猜想，沈老师在同一天向笔者提出了一个几何不等式(见第八章“练习”题122)，为证这个几何不等式，他经等价变换得到了本题结论. 此后，他于2008年4月19日证明了他的猜想(上述证一).

2. 由以上证明可知，还可以得到以下更一般命题.

命题 设$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且$\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2,\gamma_1+\gamma_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$，$\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2+\gamma_1+\gamma_2=\pi$，则

$$\sin 2\alpha_1\sin 2\beta_1\sin 2\gamma_1+\sin 2\alpha_2\sin 2\beta_2\sin 2\gamma_2\leqslant 2\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\beta_1+\beta_2)\sin(\gamma_1+\gamma_2) \tag{49}$$

当且仅当$\alpha_1=\alpha_2,\beta_1=\beta_2,\gamma_1=\gamma_2$时，式(49)取等号.

3. 利用式(49)可以证明一个与垂足三角形有关的不等式：设P为非钝角$\triangle ABC$内任意一点，从P分别向三边BC,CA,AB引垂线，垂足分别为D,E,F，则

$$\triangle DEF\leqslant\frac{1}{4}\triangle ABC \tag{50}$$

当且仅当点P为$\triangle ABC$的外心时，式(50)取等号.

证法可参考第八章“练习”题123的解答，注意有$\frac{BD}{DC}=\frac{\cot\angle PBD}{\cot\angle PCD}$等.

第七章 其他不等式证明例子

例 1 （自创题，1983.01.02）设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}$，且 $\sum_{i=1}^{4}x_i=0$，则

$$\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right)^3\geqslant\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{4}x_i^3\right)^2=(x_2x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_3)^2\qquad(1)$$

当且仅当 x_1,x_2,x_3,x_4 中有 3 个相等时，式(1)取等号.

证

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{4}x_i^2\right)^3&=[x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_1+x_2+x_3)^2]^3=\\&[(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2+(x_1+x_2)^2]^3\geqslant\\&27(x_2+x_3)^2(x_3+x_1)^2(x_1+x_2)^2=\\&27[x_2x_3(x_1+x_2+x_3)+x_3x_1(x_1+x_2+x_3)+\\&x_1x_2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3]^2=\\&27(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)^2\end{aligned}$$

另

$$27[x_2x_3(x_1+x_2+x_3)+x_3x_1(x_1+x_2+x_3)+x_1x_2(x_1+x_2+x_3)-x_1x_2x_3]=$$
$$27[x_2x_3(x_2+x_3)+x_3x_1(x_3+x_1)+x_1x_2(x_1+x_2)+2x_1x_2x_3]=$$
$$9[(x_2+x_3+x_4)^3-x_1^3-x_2^3-x_3^3]=$$
$$-9(x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3)$$

例 2 （自创题，1980.01.09）设 $a_i(i=1,2,3,\cdots,n)$ 为 n 个实数，且 $|a_i|\leqslant 1(i=1,2,3,\cdots,n)$，则

$$a_1a_2\cdots a_n+n\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n+1 \qquad (2)$$

当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有 $n-1$ 个相等时，式(2)取等号.

证

$$n-1+a_1a_2\cdots a_n-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(1-a_1)(1-a_2a_3\cdots a_n)+$$
$$(1-a_2)(1-a_3a_4\cdots a_n)+(1-a_3)(1-a_4a_5\cdots a_n)+\cdots+$$
$$(1-a_n)(1-a_{n-1})\geqslant 0$$

例 3 （自创题，2000.07.26）设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$，则

$$\left(\sum\frac{x}{y+z}\right)\cdot\sum x^2(-x+y+z)\leqslant\frac{9}{2}xyz \qquad (3)$$

当且仅当 $x=y=z$ 时，式(3)取等号.

证

$$9xyz\prod(y+z)-2\left[\sum x^2(-x+y+z)\right]\left[\sum x(x+y)(x+z)\right]=$$
$$9xyz\sum yz(y+z)+18x^2y^2z^2-2\left\{\left[\sum x^2(y+z)\right]^2-\sum(x^3)^2\right\}-$$
$$6xyz\sum x^2(-x+y+z)=$$
$$2\left[\sum x^6+3x^2y^2z^2-\sum y^2z^2(y^2+z^2)\right]+$$
$$xyz\left[2\sum x^3-\sum yz(y+z)\right]\geqslant 0$$

例 4 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且方程 $ax^2+bx+c=0$ 有实根，求证：a,b,c 中至少有一个数不小于 $\frac{4}{9}(a+b+c)$.

证一 反证法

假设 a,b,c 均小于 $\frac{4}{9}(a+b+c)$，即有

$$5a<4(b+c) \qquad ①$$
$$5b<4(c+a) \qquad ②$$
$$5c<4(a+b) \qquad ③$$

又

$$b^2 - 4ac \geqslant 0 \quad ④$$

以下分两种情况讨论.

ⅰ) 若 b 不小于 a,c,即 $b \geqslant a, b \geqslant c$. 由式②知

$$b < 4(a-b) + 4c < 4c$$

于是,$(b-4c)(b-c) < 0$,即

$$b^2 - 5bc + 4c^2 < 0$$

所以

$$b^2 < 5bc - 4c^2 \quad ⑤$$

由式④、⑤得

$$4ac \leqslant b^2 < 5bc - 4c^2$$

所以 $$4(a+c) < 5b$$

与以上式②矛盾.

ⅱ) 若 b 不都大于 a,c,如 $b < a$,由式④有

$$4c \leqslant \frac{b^2}{a} < b \quad ⑥$$

再由式①得

$$4c > 5a - 4b > a > b$$

与式⑥矛盾.

综上可知,a,b,c 中必有一个数不小于$\frac{4}{9}(a+b+c)$.

证二 构造图形,仍用反证法证明.

假设:a,b,c 均小于$\frac{4}{9}(a+b+c)$,即有$5a < 4(b+c)$,$5b < 4(c+a)$,$5c < 4(a+b)$. 若记 $x = \frac{b}{a}$,$y = \frac{c}{a}$,则上述三式可写作

$$y > -x + \frac{5}{4} \quad ①$$

$$y > \frac{5}{4}x - 1 \quad ②$$

$$y < \frac{4}{5}x + \frac{4}{5} \quad ③$$

另一方面,由已知 $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$ 得

$$y \leqslant \frac{1}{4}x^2 \quad ④$$

我们应用作图方法证明,在式①,②,③条件下,式④不成立.

如图 1 知,满足式 ①,②,③ 条件的点必在 $\triangle ABC$ 的内部.

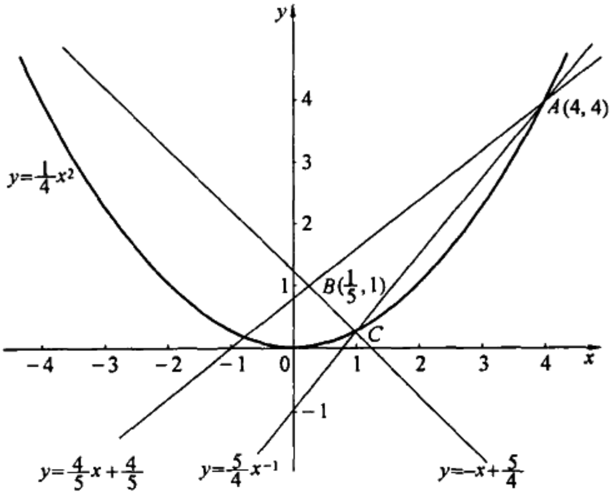


图 1

但,另一方面,由图知,凡满足式 ④ 的点,必在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 外部,而 $\triangle ABC$ 内部(含边界)的点都在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 内部(含焦点部分). 故假设不成立,由此可知,a,b,c 中至少有一个数不小于 $\frac{4}{9}(a + b + c)$.

证三 令 $\begin{cases} -5a + 4b + 4c = 3\alpha \\ 4a - 5b + 4c = 3\beta \\ 4a + 4b - 5c = 3\gamma \end{cases}$,则

$$\begin{cases} 9a = 4\sum \alpha - 3\alpha \\ 9b = 4\sum \alpha - 3\beta \\ 9c = 4\sum \alpha - 3\gamma \end{cases}$$

若 a,b,c 均小于 $\frac{4}{9}(a + b + c)$,则 $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{R}^+$. 于是

$$81(b^2 - 4ac) = (4\sum \alpha - 3\beta)^2 - 4(4\sum \alpha - 3\alpha)(4\sum \alpha - 3\gamma) = \\ -72\beta^2 - 48\alpha\beta - 48\beta\gamma - 36\alpha\gamma < 0$$

这与方程 $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ 有实根,即 $b^2 - 4ac \geqslant 0$ 矛盾. 故 a,b,c 中至少有一个数不小于 $\frac{4}{9}(a + b + c)$.

例 5 (自创题,1997.03.03) 设 $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$,$x_1,x_2,x_3$ 为

复数,且不全相等,记

$$\lambda = \frac{|a(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)|}{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|}$$

则 $|f(x_1)|$,$|f(x_2)|$,$|f(x_3)|$ 中必有一个不小于 λ.

证 应用反证法,同时应用绝对值不等式性质.

假设 $|f(x_1)|$,$|f(x_2)|$,$|f(x_3)|$ 均小于 λ,则

$$|(x_2 - x_3)\cdot f(x_1)| + |(x_3 - x_1)\cdot f(x_2)| + |(x_1 - x_2)\cdot f(x_3)| <$$
$$\lambda(|x_2 - x_3| + |x_3 - x_1| + |x_1 - x_2|) =$$
$$|a(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)|$$

但另一方面,有

$$|(x_2 - x_3)\cdot f(x_1)| + |(x_3 - x_1)\cdot f(x_2)| + |(x_1 - x_2)\cdot f(x_3)| \geqslant$$
$$|(x_2 - x_3)\cdot f(x_1) + (x_3 - x_1)\cdot f(x_2) + (x_1 - x_2)\cdot f(x_3)| =$$
$$|(x_2 - x_3)\cdot(ax_1^2 + bx_1 + c) + (x_3 - x_1)(ax_2^2 + bx_2 + c) +$$
$$(x_1 - x_2)(ax_3^2 + bx_3 + c)| =$$
$$|a(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)|$$

与以上所得相矛盾. 故原命题成立.

注 类似证法有以下命题.

命题 设 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a,b 不全为0),x_1,x_2,x_3 为复数,且不全相等,记

$$\lambda = \frac{|a(x_1 + x_2 + x_3) + b||(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)|}{|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_1|}$$

则 $|f(x_1)|$,$|f(x_2)|$,$|f(x_3)|$ 中必有一个不小于 λ.

例 6 设 $a,b,c,d \in \overline{\mathbf{R}^{-}}$,则

$$\frac{(1 + a^3)(1 + b^3)(1 + c^3)(1 + d^3)}{(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)(1 + d^2)} \geqslant \frac{1 + abcd}{2} \tag{4}$$

当且仅当 $a = b = c = d = 1$ 时,式(4) 取等号.

证 因为

$$2(1 + a^3)^4 - (1 + a^2)^4(1 + a^4) =$$
$$(1 - a)^2(1 + 2a - a^2 + 4a^3 + 2a^4 + 2a^6 + 4a^7 - a^8 + 2a^9 + a^{10}) \geqslant$$
$$0$$

所以

$$2(1 + a^3)^4 \geqslant (1 + a^2)^4(1 + a^4)$$

同理有

$$2(1 + b^3)^4 \geqslant (1 + b^2)^4(1 + b^4)$$
$$2(1 + c^3)^4 \geqslant (1 + c^2)^4(1 + c^4)$$
$$2(1 + d^3)^4 \geqslant (1 + d^2)^4(1 + d^4)$$

将以上四式左右两边分别相乘,并应用赫尔德不等式即得原式.

注 1. 本题参见第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter8题11.

2. 猜想:当 $a\geqslant 0$,n 为大于 1 的正整数时,有

$$2(1+a^n)^{n+1}\geqslant(1+a^{n+1})(1+a^{n-1})^{n+1}$$

或者,当 $a,b\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$n$ 为大于 1 的正整数时,有

$$2(a^n+b^n)^{n+1}\geqslant(a^{n+1}+b^{n+1})(a^{n-1}+b^{n-1})^{n+1}$$

3. 更广些猜想:设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}(i=1,2,\cdots,m)$,$m,n$ 为正整数,且 $n\geqslant m\geqslant 2$ 时,有

$$m(\sum_{i=1}^{m}a_i^n)^{n+1}\geqslant\sum_{i=1}^{m}a_i^{n+1}\cdot(\sum_{i=1}^{n-1}a_i^{n-1})^{n+1}\qquad(5)$$

4. 若上述猜想成立,则对于任意非负数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,n+1,j=1,2,\cdots,m)$,有

$$m\prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^n\geqslant\prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}^{n-1}\cdot\sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n+1}a_{ij}\qquad(6)$$

例 7 (自创题,1993.08.07)设 $\lambda_i,a_i,b_i(i=1,2,3)\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\begin{aligned}&[\lambda_1(a_2b_3+a_3b_2)+\lambda_2(a_3b_1+a_1b_3)+\lambda_3(a_1b_2+a_2b_1)]^2\geqslant\\&4(\lambda_1a_2a_3+\lambda_2a_3a_1+\lambda_3a_1a_2)(\lambda_1b_2b_3+\lambda_2b_3b_1+\lambda_3b_1b_2)\end{aligned}\qquad(7)$$

当且仅当 $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$ 时,式(7)取等号.

证一 构造函数

$$\begin{aligned}f(x)=&(\lambda_1a_2a_3+\lambda_2a_3a_1+\lambda_1a_1a_2)x^2-\\&[\lambda_1(a_2b_3+a_3b_2)+\lambda_2(a_3b_1+a_1b_3)+\lambda_3(a_1b_2+a_2b_1)]x+\\&(\lambda_1b_2b_3+\lambda_2b_3b_1+\lambda_1b_1b_2)=\\&\lambda_1a_2a_3(x-\frac{b_2}{a_2})(x-\frac{b_3}{a_3})+\lambda_2a_3a_1(x-\frac{b_3}{a_3})(x-\frac{b_1}{a_1})+\\&\lambda_3a_1a_2(x-\frac{b_1}{a_1})(x-\frac{b_2}{a_2})\end{aligned}$$

不妨设 $\frac{b_1}{a_1}\geqslant\frac{b_2}{a_2}\geqslant\frac{b_3}{a_3}$,则易证 $f(\frac{b_1}{a_1})$,$f(\frac{b_2}{a_2})$,$f(\frac{b_3}{a_3})$ 中必有一个不为正,另一个不为负.因此,函数 $f(x)$ 图象与 x 轴有交点,$\Delta\geqslant 0$,即得式(7).

证二 $[\sum\frac{a_1}{\lambda_1}(\frac{b_2}{\lambda_2}+\frac{b_3}{\lambda_3})]^2\geqslant 4\sum\frac{a_2a_3}{\lambda_2\lambda_3}\cdot\sum\frac{b_2b_3}{\lambda_2\lambda_3}$(据第一章"等价变换法证明不等式"例 1 中的式(2)),经整理即得.

例 8 (改编题,1989.07.04)设 $x_i\in\overline{\mathbf{R}^-}(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$,且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=$

λ(常数) $\leqslant n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i+\frac{1}{x_i})^{-1}\leqslant n(\frac{\lambda}{n}+\frac{n}{\lambda})^{-1} \tag{8}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{\lambda}{n}$ 时,式(8) 取等号.

证 用反向归纳法证明.

当 $n=2$ 时,比较式(8) 右边式子减去左边式子所得的差. 经通分后易知分母为正,其分子为

$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2(3-x_1x_2)\geqslant(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2[3-(\frac{x_1+x_2}{2})^2]\geqslant$$
$$(x_1+x_2)(x_1-x_2)^2\cdot 2\geqslant 0$$

即 $n=2$ 时,式(8) 成立.

假设当 $n=2^k$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_{2^k}$ 及 $x_{2^k+1}+x_{x^k+2}+\cdots+x_{2^{k+1}}$ 均不大于 2^k 时,式(8) 成立,且同时有

$$\sum_{i=1}^{2^k}(x_i+\frac{1}{x_i})^{-1}\leqslant 2^k(\frac{\sum_{i=1}^{2^k}x_i}{2^k}+\frac{2^k}{\sum_{i=1}^{2^k}x_i})^{-1} \tag{①}$$

$$\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}(x_i+\frac{1}{x_i})^{-1}\leqslant 2^k(\frac{\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i}{2^k}+\frac{2^k}{\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i})^{-1} \tag{②}$$

将以上 ①、② 两式左右两边式子分别相加,同时对所得的右边式子,应用以上已证过的式(8) 中 $n=2$ 时的情况,便得到

$$\sum_{i=1}^{2^{k+1}}(x_i+\frac{1}{x_i})^{-1}\leqslant 2^{k+1}(\frac{\sum_{i=1}^{2^{k+1}}x_i}{2^{k+1}}+\frac{2^{k+1}}{\sum_{i=1}^{2^{k+1}}x_i})^{-1}$$

此时 $x_1+x_2+\cdots+x_{2^{k+1}}\leqslant 2^{k+1}$.

这就证明了,当 $n=2^{k+1}$ 时,式(8) 也成立. 由此可知,当 $n=2^p$(p 为任意正整数) 时,式(8) 都成立.

现在来完成反向归纳法第二步. 假设当 $n=k+1$,且 $x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant k$ 时,$x_1+x_2+\cdots+x_k+\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}\leqslant k+1$,那么便有

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i+\frac{1}{x_i})^{-1}+(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}+\frac{k}{\sum_{i=1}^{k}x_i})^{-1}\leqslant$$

$$(k+1)(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}}{k+1}+\frac{k+1}{\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}})^{-1}=$$

$$(k+1)(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}+\frac{k}{\sum_{i=1}^{k}x_i})^{-1}$$

即

$$\sum_{i=1}^{k}(x_i+\frac{1}{x_i})^{-1}\leqslant k(\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i}{k}+\frac{k}{\sum_{i=1}^{k}x_i})^{-1}$$

这里 $x_1+x_2+\cdots+x_k\leqslant k$. 由此,反向归纳法第二步完成.

综上可知,对于任意大于等于 2 的正整数 n,式(8) 都成立.

注 式(8) 可参见《中学数学》,1993 年第 11 期,杨学枝文:"一个代数不等式的加强".

例 9 (自创题,2002.08.23)P 为 $\triangle ABC$ 内部任意一点,$\angle PAB=\alpha$, $\angle PBC=\beta$, $\angle PCA=\gamma$,则

$$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma\geqslant 2\sqrt{3}+\sum\cot A \tag{9}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形,且 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{6}$ 时,式(9) 取等号.

证 易证有

$$\frac{\sin(A-\alpha)\sin(B-\beta)\sin(C-\gamma)}{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}=1\Leftrightarrow$$

$$(\sin A\cdot\cot\alpha-\cos A)(\sin B\cdot\cot\beta-\cos B)(\sin C\cdot\cot\gamma-\cos C)=1\Leftrightarrow$$

$$(\cot\alpha-\cot A)(\cot\beta-\cot B)(\cot\gamma-\cot C)=\frac{1}{\prod\sin A}$$

所以

$$\frac{1}{\prod\sin A}\leqslant(\frac{\sum\cot\alpha-\sum\cot A}{3})^3$$

所以 $$\sum\cot\alpha \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\prod\sin A}}+\sum\cot A \geqslant 2\sqrt{3}+\sum\cot A$$

例 10 a,b,c 为正数,且 $a+b\leqslant c+1, b+c\leqslant a+1, c+a\leqslant b+1$,求证不等式

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 2abc+1 \tag{10}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(10) 取等号.

证一 由已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b\leqslant c+1, b+c\leqslant a+1, c+a\leqslant b+1$ 可知 $a,b,c\in(0,1]$. 不妨设 $a\geqslant b$,则

$$1-c\geqslant a-b\geqslant 0 \tag{①}$$

$$1+c-2ab\geqslant 1+c-2b\geqslant a-b\geqslant 0 \tag{②}$$

由式 ① × ② 得

$$(1-c)(1+c-2ab)-(a-b)^2\geqslant 0$$

展开即得

$$2abc+1-a^2-b^2-c^2\geqslant 0$$

证二 设 $-a+b+c=1-\alpha, a-b+c=1-\beta, a+b-c=1-\gamma, \alpha,\beta,\gamma\geqslant 0$,则

$$1+2abc-\sum a^2=\sum\beta\gamma-\frac{1}{4}\prod(\beta+\gamma)\geqslant\sum\beta\gamma-\frac{1}{4}\sum\alpha\sum\beta\gamma=$$
$$\frac{1}{4}\sum\beta\gamma\left(4-\sum\alpha\right)\geqslant 0$$

(注意到 $4-\sum\alpha=\sum a>0$).

注 由此证明知有不等式

$$1+2abc-\sum a^2\geqslant\frac{1}{4}\sum(1-a+b-c)(1-a-b+c)\cdot\sum a$$

条件同例 10.

例 11 a,b,c 为正数,且 $a^4+b^4+c^4=3$,证明

$$\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}+\frac{1}{4-ab}\leqslant 1 \tag{11}$$

证一 注意到式(11) 左边各分母均大于零,于是,将式(11) 去分母,并整理得到其等价式

$$8\sum bc+a^2b^2c^2-3abc\sum a-16\leqslant 0$$

又由于

$$a^2b^2c^2\leqslant\frac{1}{9}abc\sum a\cdot\sqrt{3\sum a^4}=\frac{1}{3}abc\sum a$$

故只需证

$$8\sum bc+\frac{1}{3}abc\sum a-3abc\sum a-16\leqslant 0$$

即

$$3\sum bc-abc\sum a-6\leqslant 0 \qquad (※)$$

但

$$3\sum bc-abc\sum a-6=3\sum bc-\frac{1}{2}(\sum bc)^2+\frac{1}{2}\sum b^2c^2-6=$$

$$-\frac{1}{2}(\sum bc-3)^2+\frac{1}{2}(\sum b^2c^2-3)\leqslant 0$$

（注意 $\sum b^2c^2\leqslant\sum a^4=3$）故式（※）成立.

证二 $\sum\frac{1}{4-bc}\leqslant\frac{1}{2}\sum(\frac{1}{4-b^2}+\frac{1}{4-c^2})=\sum\frac{1}{4-a^2}\leqslant\sum(\frac{1}{18}a^4+\frac{5}{18})=1$（注意到 $a,b,c<2$）.

例 12 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$，且 $abcd=1$，证明

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant 1 \qquad (12)$$

当且仅当 $a=b=c=d$ 时，式(12)取等号.

证一 令 $a=\frac{yz}{x^2},b=\frac{zw}{y^2},c=\frac{wx}{z^2},d=\frac{xy}{w^2}$，于是所证不等式(12)可变为

$$\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zw)^2}+\frac{z^4}{(z^2+wx)^2}+\frac{w^4}{(w^2+xy)^2}\geqslant 1 \qquad (※)$$

应用柯西不等式，有

$$[(x^2+yz)^2+(y^2+zw)^2+(z^2+wx)^2+(w^2+xy)^2]\cdot$$
$$[\frac{x^4}{(x^2+yz)^2}+\frac{y^4}{(y^2+zw)^2}+\frac{x^4}{(z^2+wx)^2}+\frac{x^4}{(w^2+xy)^2}]\geqslant$$
$$(x^2+y^2+z^2+w^2)^2$$

由此知，我们只需证

$$(x^2+y^2+z^2+w^2)^2\geqslant(x^2+yz)^2+(y^2+zw)^2+(z^2+wx)^2+(w^2+xy)^2\Leftrightarrow$$
$$x^2(y-z)^2+y^2(z-w)^2+z^2(w-x)^2+$$
$$w^2(x-y)^2\geqslant 0$$

证二 先证

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\geqslant\frac{1}{1+ab} \qquad (※)$$

式（※）$\Leftrightarrow(1+ab)[(1+a)^2+(1+b)^2]-(1+a)^2(1+b)^2\geqslant 0$

上式左边 $=(1+ab)(2+2a+2b+a^2+b^2)-(1+a+b+ab)^2=$

$$(1+ab)(2+2a+2b+a^2+b^2)-$$
$$[(1+ab)^2+2(1+ab)(a+b)+(a+b)^2]=$$
$$(1+ab)(a^2+b^2+1-ab)-(a+b)^2=$$
$$ab(a^2+b^2)+1-a^2b^2-2ab=$$
$$ab(a-b)^2+(1-ab)^2\geqslant 0$$

今证式(12). 由式(※)知,也有

$$\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant\frac{1}{1+cd}$$

所以

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\geqslant\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}=$$
$$\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+\frac{1}{ab}}=1$$

注 1. 本例只需 $abcd\geqslant 1$,式(12)成立.

2. 式(12)较第三章"放缩法证明不等式"例 16 中式(23)要弱.

例 13 设非负数 x,y,z,满足 $\sum yz=1$,则

$$\sum\frac{1}{yz+x}\geqslant 3 \tag{13}$$

当且仅当 x,y,z 中有一个为零,另外两个都等于 1 时,式(13)取等号.

证 分以下两种情况证明.

i)若 $\sum x\leqslant 2$,由柯西不等式,有

$$\sum(yz+x)\cdot\sum\frac{1}{yz+x}\geqslant 9$$

因此,只要证

$$\sum(yz+x)\leqslant 3\Leftrightarrow\sum x\leqslant 2 \qquad ①$$

由假设知式①成立,故式(13)成立,易证此时仅当 x,y,z 中有一个为零,其余两个都等于 1 时取等号.

ii)若 $\sum x\geqslant 2$,则原式经去分母整理得到

$$1+\sum x\cdot\sum yz+xyz\sum x-3xyz\geqslant$$
$$3xyz+3\sum y^2z^2+3xyz\sum x^2+3(xyz)^2\Leftrightarrow$$
$$-2+\sum x+7xyz\sum x-3xyz(\sum x)^2-3(xyz)^2\geqslant 0$$
$$(\text{注意到}\sum yz=1)\Leftrightarrow$$

$$(\sum x-2)(1-3xyz\sum x)+xyz(\sum x-3xyz)\geqslant 0 \quad ②$$

由于$\sum x-2\geqslant 0,1-3xyz\sum x=(\sum yz)^2-3xyz\sum x\geqslant 0,\ \sum x-3xyz=\sum x\cdot\sum yz-3xyz\geqslant 0$，因此式②成立，易知仅当$x,y,z$中有一个为零，其余两个都等于1时，式②取等号.

综上，式(13)获证.

注 原题于2008年1月9日由陈计老师发布于"东方热线论坛－教育－数学"网站上，无解答.

例14 （自创题，2002.07.15）设$x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$(\sum x)^4\geqslant 16\sum y^2z^2+11xyz\sum x \quad (14)$$

当且仅当$x=y=z$时，或x,y,z中一个为零另外两个相等时，式(14)取等号.

证一 不妨设$x\geqslant y\geqslant z$. 以下分两种情况证明.

ⅰ）若$x>y+z$，则

$(\sum x)^4-16\sum y^2z^2-11xyz\sum x=(\sum x)^4-16(\sum yz)^2+21xyz\sum x=$

$[(\sum x)^2-4\sum yz][(\sum x)^2+4\sum yz]+21xyz\sum x=$

$21xyz\sum x+[(x-y-z)^2-4yz][(\sum x)^2+4\sum yz]\geqslant$

$21xyz\sum x-4yz[(\sum x)^2+4\sum yz]\geqslant$

$\frac{21}{2}yz(\sum x)^2-4yz[(\sum x)^2+4xyz]=$

（注意有$x\geqslant\frac{1}{2}\sum x$）

$\frac{1}{2}yz[13(\sum x)^2-32\sum yz]\geqslant 0$

ⅱ）若$x\leqslant y+z$. 则

$$(\sum x)^4-16(\sum yz)^2+21xyz\sum x=$$

$$[(\sum x)^4-9(\sum yz)^2]-7[(\sum yz)^2-3xyz\sum x]=$$

$$\frac{1}{2}[(\sum x)^2+3\sum yz]\sum(y-z)^2-\frac{7}{2}\sum x^2(y-z)^2=$$

$$\frac{1}{2}\sum[(\sum x)^2+3\sum yz-7x^2](y-z)^2$$

因为 $$x\geqslant y\geqslant z$$

所以 $$(\sum x)^2+3\sum yz-7y^2\geqslant x^2+y^2+5xy-7y^2\geqslant 0$$

又 $$(\sum x)^2+3\sum yz-7z^2\geqslant 0$$

所以只需证$(\sum x)^2+3\sum yz-7x^2\geqslant 0$(在$x\leqslant y+z$条件下),但

$$\begin{aligned}(\sum x)^2+3\sum yz-7x^2&=x^2+2x(y+z)+(y+z)^2+\\&3x(y+z)-7x^2+3yz\geqslant\\&x^2+2x^2+x^2+3x^2-7x^2+3yz=3yz\geqslant 0\end{aligned}$$

由上 i)、ii)知,式(14)成立.

注 以上证法在证明某些不等式时值的注意.

证二 式(14)也可用以下两个更强式证之.

i) $(\sum x)^3-4\sum x\sum yz+9xyz\geqslant 0$.

见第一章"等价变换法证明不等式"例14中式(27),取$n=3$即得.或由$(\sum x)^3-4\sum x\sum yz+9xyz=xyz-\prod(-x+y+z)\geqslant 0$得到.

ii) $s_1^2s_2+3s_1s_3-4s_2^2\geqslant 0$.

因为$s_1^2s_2+3s_1s_3-4s_2^2=\sum xy(x-y)^2\geqslant 0$(其中$s_1=\sum x,s_2=\sum yz$,$s_3=xyz$),即得上式.于是,式(14)可由以下得到

$$(\sum x)^4\geqslant 4(\sum x)^2\sum yz-9xyz\sum x\geqslant 16(\sum yz)^2-21xyz\sum x$$

例15 设$x,y,x_1,y_1\in[0,1]$,且$x+x_1=1,y+y_1=1$,又$m>1$,则

$$\sqrt[m]{x^m+y^m}+\sqrt[m]{x_1^m+y^m}+\sqrt[m]{x^m+y_1^m}+\sqrt[m]{x_1^m+y_1^m}\leqslant 2+\sqrt[m]{2}\qquad(15)$$

证 先证以下引理.

引理 设$x\in[0,1],t\geqslant 0,m>1$,则

$$\sqrt[m]{x^m+t^m}+\sqrt[m]{(1-x)^m+t^m}\leqslant t+\sqrt[m]{1+t^m}\qquad(16)$$

当且仅当$x=0$或$x=1$时,式(16)取等号.

设$f(x)=\sqrt[m]{x^m+t^m}+\sqrt[m]{(1-x)^m+t^m}$,则

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{x^{m-1}}{(x^m+t^m)^{\frac{m-1}{m}}}-\frac{(1-x)^{m-1}}{[(1-x)^m+t^m]^{\frac{m-1}{m}}}=\\&\frac{[x^m(1-x)^m+x^mt^m]^{\frac{m-1}{m}}-[x^m(1-x)^m+(1-x)^mt^m]^{\frac{m-1}{m}}}{(x^m+t^m)^{\frac{m-1}{m}}\cdot[(1-x)^m+t^m]^{\frac{m-1}{m}}}\end{aligned}$$

因为$m>1$,所以$\frac{m-1}{m}>0$,于是有,当$0\leqslant x<\frac{1}{2},f'(x)<0$,当$\frac{1}{2}<x\leqslant 1$时,$f'(x)>0$,故$f(x)_{\max}=\max\{f(0),f(1)\}$.但$f(0)=f(1)=t+\sqrt[m]{1+t^m}$,故式(16)成立.

由引理,有

$$\sqrt[m]{x^m+y^m}+\sqrt[m]{x_1^m+y^m}\leqslant y+\sqrt[m]{1+y^m}$$
$$\sqrt[m]{x^m+y_1^m}+\sqrt[m]{x_1^m+y_1^m}\leqslant y_1+\sqrt[m]{1+y_1^m}$$

$$\sqrt[m]{y^m+1}+\sqrt[m]{y_1^m+1}\leqslant 1+\sqrt[m]{2}$$

以上三式左右分别相加,并注意到 $y+y_1=1$,即得式(15).

例 16 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\sum x\sqrt{y+z}\geqslant 2\sum\frac{yz}{\sqrt{y+z}}\tag{17}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,式(17) 取等号.

证一 令 $\sqrt{y+z}=a,\sqrt{z+x}=b,\sqrt{x+y}=c$

则 a,b,c 可作为 $\triangle ABC$ 三边长. 于是式(17) 可化为

$$\sum\cos A\geqslant 2\sum\cos B\cos C\Leftrightarrow$$

$$\sum\cos A\geqslant 2\sum\cos(B+C)+2\sum\sin B\sin C\Leftrightarrow$$

$$3\sum\cos A\geqslant 2\sum\sin B\sin C\Leftrightarrow$$

$$3\cdot\frac{R+r}{R}\geqslant 2\cdot\frac{\sum bc}{4R^2}\Leftrightarrow$$

$$6R(R+r)\geqslant\sum bc\Leftrightarrow$$

$$6R(R+r)\geqslant 27s^2+4Rr+r^2$$

此处 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

上式易由 $27s^2\leqslant 4R^2+4Rr+3r^2$ 推证得到.

证二 (杨学校,2005.01.07 提供)

$$\text{式(17) 左边右边}=\sum\left(x\sqrt{y+z}-\frac{2yz}{\sqrt{y+z}}\right)=\sum\frac{(zx-yz)-(yz-xy)}{\sqrt{y+z}}=$$

$$\sum\left(\frac{zx-yz}{\sqrt{y+z}}-\frac{zx-yz}{\sqrt{z+x}}\right)=$$

$$\sum z(x+y)\left(\frac{1}{\sqrt{y+z}}-\frac{1}{\sqrt{z+x}}\right)=$$

$$\sum\frac{z(x-y)^2}{\sqrt{y+z}\sqrt{z+x}(\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})}\geqslant 0$$

例 17 (自创题,2003.08.19) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$n$ 为大于或等于 2 的正整数,求证

$$2^{n+1}(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})^2\geqslant 3\sum(y^2+z^2)^{n+1}\tag{18}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,式(18) 取等号.

证 为证式(18),先证下面引理.

引理 设 n 为大于或等于 2 的正整数，$a,b\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$2^n(a^{2n+2}+b^{2n+2})+2^{n+2}a^{n+1}b^{n+1}\geqslant 3(a^2+b^2)^{n+1} \tag{19}$$

当且仅当 $a=b$ 时，式(19) 取等号.

应用数学归纳法证明式(19). 当 $n=2$ 时，式(19) 左边减去右边式子为

$$\begin{aligned}&4(a^6+b^6)+16a^3b^3-3(a^2+b^2)^3=\\&4(a^6+b^6)-(a^2+b^2)^3-2[(a^2+b^2)^3-8a^3b^3]=\\&3(a^2-b^2)(a^4-b^4)-2[(a^3-b^3)^2+3a^2b^2(a-b)^2]=\\&[(a+b)^2+2ab](a-b)^4\geqslant 0\end{aligned}$$

即当 $n=2$ 时，式(19) 成立.

假设当 $n=k$ 时式(19) 成立，即

$$2^k(a^{2k+2}+b^{2k+2})+2^{k+2}a^{k+1}b^{k+1}\geqslant 3(a^2+b^2)^{k+1}$$

当 $n=k+1$ 时，若 a,b 不全为零($a=b=0$ 时是显然的)，则只需证

$$\begin{aligned}&\frac{2^{k+1}(a^{2k+4}+b^{2k+4})+2^{k+3}a^{k+2}b^{k+2}}{2^k(a^{2k+2}+b^{2k+2})+2^{k+2}a^{k+1}b^{k+1}}\geqslant a^2+b^2\Leftrightarrow\\&2(a^{2k+4}+b^{2k+4})+8a^{k+2}b^{k+2}\geqslant(a^2+b^2)[(a^{2k+2}+b^{2k+2})4a^{k+1}b^{k+1}]\Leftrightarrow\\&(a^2-b^2)(a^{2k+2}-b^{2k+2})\geqslant 4a^{k+1}b^{k+1}(a-b)^2\Leftrightarrow\\&[(a+b)(a^{2k+1}+a^{2k}b+\cdots+b^{2k+1})-4a^{k+1}b^{k+1}](a-b)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

由平均值不等式，有

$$(a+b)(a^{2k+1}+a^{2k}b+\cdots+b^{2k+1})\geqslant 2(k+1)a^{k+1}b^{k+1}\geqslant 4a^{k+1}b^{k+1}$$

因此上式成立. 即当 $n=k+1$ 时，式(19) 也成立. 由数学归纳法原理知，式(19) 对于 $n\geqslant 2$ 的正整数都成立.

由引理，易证式(18) 成立. 这是因为

$$\begin{aligned}&2^{n+1}(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})^2-3\sum(y^2+z^2)^{n+1}=\\&\sum[2^n(x^{2n+2}+y^{2n+2})+2^{n+2}x^{n+1}y^{n+1}-3(x^2+y^2)^{n+1}]\geqslant 0\end{aligned}$$

例 18 (自创题，2004.03.22) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，$n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$，则

$$\sum\frac{x^n}{(x+y)^n+(x+z)^n}\geqslant\frac{3}{2^{n+1}} \tag{20}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时式(20) 取等号.

证 应用柯西不等式，有

$$\begin{aligned}\sum\frac{x^n}{(x+y)^n+(x+z)^n}&=\sum\frac{x^{n+1}}{x(x+y)^n+x(x+z)^n}\geqslant\\&\frac{(\sum x^{\frac{n+1}{2}})^2}{\sum[x(x+y)^n+x(x+z)^n]}=\\&\frac{(\sum x^{\frac{n+1}{2}})^2}{\sum(y+z)^{n+1}}\geqslant\end{aligned}$$

$$\frac{3}{2^{n+1}}$$

（据以上例 17 中式(18)）式(20) 获证.

例 19 设 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum yz \cdot \sum \frac{1}{(y+z)^2} \geqslant \frac{9}{4} \tag{21}$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 x,y,z 中一个为零.其余两个相等时,式(21) 取等号.

证

$$\sum yz \cdot \sum \frac{1}{(y+z)^2} - \frac{9}{4} = \sum \frac{yz}{(y+z)^2} - \frac{3}{4} + \sum \frac{x}{y+z} - \frac{3}{2} =$$

$$-\sum \frac{(y-z)^2}{4(y+z)} + \frac{2\sum x^3 - \sum x^2(y+z)}{2\prod(y+z)} =$$

$$\sum \frac{(y-z)^2}{2(x+z)(x+y)} - \sum \frac{(y-z)^2}{4(y+z)^2} = \tag{※}$$

$$\sum \left[\frac{2(y+z)^2 - x^2 - \sum yz}{4\prod(y+z)} \cdot \frac{(y-z)^2}{y+z}\right]$$

由对称性,不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$,则有

$$\frac{(x-z)^2}{x+z} \geqslant \frac{(y-z)^2}{y+z}$$

以及

$$2(x+z)^2 - y^2 - \sum yz = 2x^2 + 2z^2 + 3xz - y^2 - yz - xy \geqslant 0$$

$$2(x+y)^2 - z^2 - \sum yz = 2x^2 + 2y^2 + 3xy - z^2 - xz - yz \geqslant 0$$

所以

$$\sum \left[\frac{2(y+z)^2 - x^2 - \sum yz}{4\prod(y+z)} \cdot \frac{(y-z)^2}{y+z}\right] \geqslant$$

$$\frac{2(y+z)^2 - x^2 - \sum yz}{4\prod(y+z)} \cdot \frac{(y-z)^2}{y+z} + \frac{2(x+z)^2 - y^2 - \sum yz}{4\prod(y+z)} \cdot \frac{(x-z)^2}{x+z} \geqslant$$

$$\frac{2(y+z)^2 - x^2 - \sum yz + 2(x+z)^2 - y^2 - \sum yz}{4\prod(y+z)} \cdot \frac{(y-z)^2}{y+z} =$$

$$\frac{4z^2 + 2yz + 2xz + (x-y)^2}{4\prod(y+z)} \cdot \frac{(y-z)^2}{y+z} \geqslant 0$$

因此,式(21) 成立.

注 由上证明中式(※) 知,当 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$ 时,有与式(21) 的等价式

$$\sum \frac{(y-z)^2}{(x+y)(x+z)} \geqslant \frac{1}{2} \cdot \sum \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} \tag{22}$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 x,y,z 中有一个为零,其余两个相等时,式(22) 取等号.

例 20 (江西刘健提出) 设 $x,y,z,u,v,w \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum \frac{1}{(y+z)(v+w)} \geqslant \frac{9}{2\sum x(v+w)} \tag{23}$$

当且仅当 $x=y=z,u=v=w$,或 $y=z,x=0,v=w,u=0$,或 $z=x,y=0,w=u,v=0$,或 $x=y,z=0,u=v,w=0$ 时式(23) 取等号.

证

$$2\sum \frac{1}{(y+z)(v+w)} \cdot \sum x(v+w) - 9 =$$

$$2\sum \frac{x}{y+z} + 2\sum \frac{y(w+u)+z(u+v)}{(y+z)(v+w)} - 9 =$$

$$2\sum \frac{x}{y+z} + 2\sum \frac{u(y+z)+yw+zv}{(y+z)(v+w)} - 9 =$$

$$2\sum \frac{x}{y+z} + 2\sum \frac{u}{v+w} + 2\sum \frac{yw+zv}{(y+z)(v+w)} - 9 =$$

$$\left(2\sum \frac{x}{y+z} - 3\right) + \left(2\sum \frac{u}{v+w} - 3\right) + 2\sum \frac{yw+zv}{(y+z)(v+w)} - 3 =$$

$$\sum \frac{(y-z)^2}{(x+y)(x+z)} + \sum \frac{(v-w)^2}{(u+v)(u+w)} +$$

$$\sum \left[\frac{2(yw+zv)}{(y+z)(v+w)} - 1\right] =$$

$$\sum \frac{(y-z)^2}{(x+y)(x+z)} + \sum \frac{(v-w)^2}{(u+v)(u+w)} - \sum \frac{(y-z)(v-w)}{(y+z)(v+w)} \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum \frac{(y-z)^2}{(y+z)^2} + \frac{1}{2}\sum \frac{(v-w)^2}{(v+w)^2} - \sum \frac{(y-z)(v-w)}{(y+z)(v+w)} =$$

(据以上式(22))

$$\frac{1}{2}\sum \left(\frac{y-z}{y+z} - \frac{v-w}{v+w}\right)^2 \geqslant 0$$

由上证明知,当且仅当 $x=y=z,u=v=w$,或 $x=y,z=0,u=v,w=0$,或 $y=z,x=0,v=w,u=0$,或 $z=x,y=0,w=u,v=0$ 时式(23) 取等号.

注 1. 式(23) 证明可参考《不等式研究》(杨学枝主编,西藏人民出版社. 2006 年 6 月出版)P538 ~ 539. 杨学枝对刘健先生提出的 shc73 的证明(即在 $\triangle ABC$ 中,有 $\sum \frac{h_a}{r_2+r_3} \geqslant \frac{9}{2}$,其中 h_a,h_b,h_c 为 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上的高,r_1,r_2,r_3 为 $\triangle ABC$ 内任意一点 P 到边 BC,CA,AB 的距离).

2. 式(21) 是式(23) 的特例.

3. 由式(21) 可证 2003 年国家集训队选拔测试题.

设 $x,y,z \in \mathbf{R}^{+}$,且 $\sum yz = 1$,求证

$$\sum \frac{1}{y+z} > \frac{5}{2} \tag{24}$$

证一

$$式(24) \Leftrightarrow \sum yz \cdot \left(\sum \frac{1}{y+z}\right)^2 > \frac{25}{4}$$

但

$$\sum yz \cdot \left(\sum \frac{1}{y+z}\right)^2 - \frac{25}{4} =$$

$$\sum yz \cdot \left[\frac{1}{(y+z)^2} + 2\sum yz \cdot \sum \frac{1}{(x+y)(x+z)} - \frac{25}{4}\right] \geqslant$$

$$\frac{9}{4} + \frac{4\sum x \cdot \sum yz}{\prod (y+z)} - \frac{25}{4} =$$

$$\frac{9}{4} + 4 + \frac{4xyz}{\prod (y+z)} - \frac{25}{4} =$$

$$\frac{4xyz}{\prod (y+z)} > 0$$

(以上应用了式(21)) 由此知式(24) 成立.

式(24) 还可有以下证明.

证二 设 $x = -a+b+c, y = a-b+c, z = a+b-c$,则 a,b,c 可视为 $\triangle ABC$ 三边长,又设此三角形半周长,外接圆半径,内切圆半径分别为 s,R,r,此时,式(24) 等价于

$$\sqrt{2\sum bc - \sum a^2} \cdot \frac{\sum bc}{abc} > 5$$

由

$$2\sum bc - \sum a^2 = 4r(4R+r)$$

$$\frac{\sum bc}{abc} = \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{4Rrs}$$

可知,上式又等价于

$$\sqrt{4r(4R+r)} \cdot \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{4Rrs} \geqslant 5 \tag{※}$$

由于

$$\frac{s^2+4Rr+r^2}{s}-\frac{(16R-5r)r+4Rr+r^2}{\sqrt{(16R-5r)r}}=$$

$$(s-\sqrt{(16R-5r)r})-(4Rr+r^2)\frac{s-\sqrt{(16R-5r)r}}{s\sqrt{(16R-5r)r}}=$$

$$\frac{s-\sqrt{(16R-5r)r}}{s\sqrt{(16R-5r)r}}[s\sqrt{(16R-5r)r}-(4Rr+r^2)]>0$$

由此知,要证式(※),只要证$\frac{(4R+r)(5R-r)^2}{R^2(6R-5r)}\geqslant\frac{25}{4}$.此式易证.

4. 由以上(21)、(23)两式的证明过程可知有以下等式和不等式

$$[x(v+w)+y(w+u)+z(u+v)]\cdot[\frac{1}{(y+z)(v+w)}+\frac{1}{(z+x)(w+u)}+$$
$$\frac{1}{(x+y)(u+v)}]=(yz+zx+xy)[\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}]+$$
$$(vw+wu+uv)[\frac{1}{(v+w)^2}+\frac{1}{(w+u)^2}+\frac{1}{(u+v)^2}]+$$
$$\frac{1}{4}[(\frac{y-z}{y+z}-\frac{v-w}{v+w})^2+(\frac{z-x}{z+x}-\frac{w-u}{w+u})^2+(\frac{x-y}{x+y}-\frac{u-v}{u+v})^2]\geqslant$$
$$(yz+zx+xy)[\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}+\frac{1}{(x+y)^2}]+$$
$$(vw+wu+uv)[\frac{1}{(v+w)^2}+\frac{1}{(w+u)^2}+\frac{1}{(u+v)^2}]$$

当且仅当$\frac{y-z}{y+z}=\frac{v-w}{v+w},\frac{z-x}{z+x}=\frac{w-u}{w+u},\frac{x-y}{x+y}=\frac{u-v}{u+v}$时取等号,以上$x,y,z,u,v,w\in\mathbf{R}$.

例 21 (2003 年国家集训队选拔试题) 设$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证

$$(\sum x)^2\cdot\sum\frac{1}{y^2+z^2}>10 \tag{25}$$

证 前面已证$(\sum x)^4\geqslant 16\sum y^2z^2+11xyz\sum x$(式(14)),于是有

$$(\sum x)^2\geqslant 4\sqrt{\sum y^2z^2}$$

所以要证式(24),只需证

$$\sqrt{\sum y^2z^2}\cdot\sum\frac{1}{y^2+z^2}\geqslant\frac{5}{2}$$

此式可由上面式(24)得到.

例 22 (改编题,2003.07.07) 设$x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且$x^2+y^2+z^2\geqslant 1$,则

$$\sum\frac{x^2}{x+yz}\geqslant 1 \tag{26}$$

当且仅当 x,y,z 中,有一个为 1,其余两个均为零时,式(26) 取等号.

证 因为

$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{1+x^2+y^2+z^2}{2}=\frac{1+x^2}{2}+\frac{y^2+z^2}{2}\geqslant x+yz$$

所以
$$\left(\sum x^2\right)\cdot\frac{x^2}{x+yz}\geqslant x^2$$

即
$$\frac{x^2}{x+yz}\geqslant\frac{x^2}{\sum x^2}$$

类似还有两式,将所得三式左右两边分别相加,即得式(26).

例 23 (自创题,2004.06.23) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$,则

$$\sum\frac{x}{1+yz}\leqslant\sqrt{2} \tag{27}$$

当且仅当 x,y,z 中有一个为零,其余两个均为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,式(27) 取等号.

证 作变换 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\lambda,y=\frac{\sqrt{2}}{2}u,z=\frac{\sqrt{2}}{2}v$,则式(27) 等价于

$$\sum\frac{\lambda}{2+uv}\leqslant 1 \tag{28}$$

其中 $\lambda^2+u^2+v^2\leqslant 2$. 当且仅当 λ,u,v 中一个为零,其余两个均等于 1 时,式(28) 取等号.

以下分两种情况证明.

i) 当 $0\leqslant\sum\lambda\leqslant 2$ 时,易证

$$\frac{\lambda}{2+\mu\nu}\leqslant\frac{\lambda}{\sum\lambda},\ \frac{\mu}{2+\nu\lambda}\leqslant\frac{\mu}{\sum\lambda},\ \frac{\nu}{2+\lambda\mu}\leqslant\frac{\nu}{\sum\lambda}$$

将以上三式左右两边分别相加,即得式(28).

ii) 当 $2\leqslant\sum\lambda\leqslant\sqrt{6}$(注意到 $\lambda^2+u^2+v^2\leqslant 2$) 时

式(28)$\Leftrightarrow\prod(2+uv)-\sum\lambda(2+\lambda u)(2+v\lambda)\geqslant 0\Leftrightarrow$

$$8+4\sum uv+2\lambda uv\sum\lambda+4\lambda uv+(\lambda uv)^2-4\sum\lambda-2\sum\lambda\sum uv\geqslant 0$$

因为
$$(\lambda uv)^2\geqslant 0$$

所以只要证

$$8+4\sum uv+2\lambda uv\left(\sum\lambda+2\right)-4\sum\lambda-2\sum\lambda\sum uv\geqslant 0 \quad ①$$

因为
$$\sum\lambda^2\leqslant 2$$

所以 λ,u,v 中至多有一个不大于 1.

这时,我们将证明

$$1+2\lambda uv \geqslant \sum uv \qquad ②$$

若 λ,u,v 均不大于 1,则

$$\lambda(1-u)(1-v)+(1-\lambda)(1-uv)\geqslant 0$$

展开即得

$$1+2\lambda uv \geqslant \sum uv$$

即得式 ②.

若 λ,u,v 中有一个不小于 1,如 $\lambda \geqslant 1$,其余两个均不大于 1,则

$$(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)\leqslant 0$$

由此得

$$\lambda\mu\nu \geqslant 1-\lambda+\sum \mu\nu$$

于是要证式 ② 成立,只要证

$$1+2(1-\sum\lambda+\sum\mu\nu)\geqslant \sum\mu\nu \Leftrightarrow$$
$$3-2\sum\lambda+\sum\mu\nu\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$3-2\sum\lambda+\frac{(\sum\lambda)^2-\sum\lambda^2}{2}\geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{2}(\lambda-2)^2+(2-\sum\lambda^2)\geqslant 0$$

所以此式成立,故式 ② 成立. 由

$$\begin{aligned}
\text{式①左边} &\geqslant 8+4\sum uv+(\sum uv-1)(\sum\lambda+2)-4\sum\lambda-2\sum\lambda\sum uv=\\
&6+6\sum uv-\sum\lambda\sum uv-5\sum\lambda=\\
&6+(6-\sum\lambda)\frac{(\sum\lambda)^2-\sum\lambda^2}{2}-5\sum\lambda\geqslant\\
&6+(6-\sum\lambda)\frac{(\sum\lambda)^2-2}{2}-5\sum\lambda=\\
&\frac{1}{2}(\sum\lambda)(2-\sum\lambda)(\sum\lambda-4)\geqslant 0
\end{aligned}$$

注意到 $2\leqslant\sum\lambda\leqslant\sqrt{6}<4$,式 ① 得证.

例 24 (2007.01.14“奥数之家”网站,Mathsfan 提出)设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum\frac{bc}{b+c+2a}\leqslant\frac{1}{4}\sum a \qquad (29)$$

当且仅当 $a=b=c$,或 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时,式(29)取等号.

证

$$\frac{bc}{b+c+2a}=\frac{bc}{(b+a)+(c+a)}\leqslant\frac{bc}{4}\left(\frac{1}{b+a}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\frac{ca}{c+a+2b}\leqslant\frac{ca}{4}\left(\frac{1}{c+b}+\frac{1}{a+b}\right)$$

$$\frac{ab}{a+b+2c}\leqslant\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

将以上三式左右两边分别相加即得.

例 25 （来自“数学驿站论坛——南方学科网论坛”中“不等式专版”，2006 年 12 月 23 日，hanjingjun 提出）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$\sum\frac{a^2}{b+c}+\sum a\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3\sum a^2}\tag{30}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时，式(30) 取等号.

证 由于

$$4\sum\frac{a^2}{b+c}=4\sum a-\sum(b+c)+\sum\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}=$$

$$2\sum a+\sum\frac{(2a-b-c)^2}{b+c}\geqslant$$

$$2\sum a+\frac{\left(\sum|2a-b-c|\right)^2}{\sum(b+c)}\geqslant$$

$$2\sum a+\frac{6\left(\sum a^2-\sum bc\right)}{\sum a}$$

因此，只需证

$$2\sum a+\frac{6\left(\sum a^2-\sum bc\right)}{\sum a}\geqslant 6\sqrt{3\sum a^2}-4\sum a\Leftrightarrow$$

$$2\sum a^2+\sum bc\geqslant\sum a\cdot\sqrt{3\sum a^2}\Leftrightarrow$$

$$4\left(\sum a^2\right)^2+\left(\sum bc\right)^2+4\sum a^2\cdot\sum bc\geqslant 3\left(\sum a^2+2\sum bc\right)\cdot\sum a^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\sum a^2-\sum bc\right)^2\geqslant 0$$

即得式(30).

例 26 （第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题）设正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，求证

$$(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\left(\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\right)\geqslant\frac{n}{n+1}\tag{31}$$

证一 分两种情况证明.

i)若 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1\geqslant\frac{1}{n}$,则只需证

$$\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\geqslant\frac{n^2}{n+1} \qquad ①$$

由算术 - 几何平均值不等式,即得

$$式①左边\geqslant n\cdot\sqrt[n]{\frac{a_1}{a_2^2+a_2}\cdot\frac{a_2}{a_3^2+a_3}\cdots\frac{a_n}{a_1^2+a_1}}=$$

$$n\sqrt[n]{\frac{1}{(a_2+1)(a_3+1)\cdots(a_1+1)}}\geqslant$$

$$n\cdot\frac{n}{\sum(a_1+1)}=\frac{n^2}{n+1}$$

即得式①.

ii)若 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1\leqslant\frac{1}{n}$,由柯西不等式有

$$(a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1)\left(\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\right)\geqslant$$

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2+1}}+\frac{a_2}{\sqrt{a_3+1}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{a_1+1}}\right)^2$$

于是,只需证

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_2+1}}+\frac{a_2}{\sqrt{a_3+1}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{a_1+1}}\geqslant\sqrt{\frac{n}{n+1}} \qquad ②$$

今证式②,由柯西不等式有

$$(a_1\sqrt{a_2+1}+a_2\sqrt{a_3+1}+\cdots+a_n\sqrt{a_1+1})$$

$$\left(\frac{a_1}{\sqrt{a_2+1}}+\frac{a_2}{\sqrt{a_3+1}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt{a_1+1}}\right)\geqslant$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=1$$

因此,要证式②成立,又只需证

$$a_1\sqrt{a_2+1}+a_2\sqrt{a_3+1}+\cdots+a_n\sqrt{a_1+1}\leqslant\sqrt{\frac{n+1}{n}} \qquad ③$$

又由柯西不等式,可得

式③左边 $\leqslant$

$$\sqrt{(a_1+a_2+\cdots+a_n)[(a_1a_2+a_1)+(a_2a_3+a_2)+\cdots+(a_na_1+a_n)]}=$$

$$\sqrt{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1+1}\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{1}{n}+1}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

即得式③.

综上,原式获证. 由上述证明过程可知,当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时,式(31)取等号.

证二 (命题组提供)首先由 Cauchy 不等式易得下述引理.

引理 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是正数,则

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\frac{a_n^2}{x_n}\geqslant\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{x_1+x_2+\cdots+x_n}$$

由引理及题设得

$$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n^2}{x_1}=\frac{a_1^2}{a_1a_2}+\frac{a_2^2}{a_2a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_na_1}\geqslant\frac{1}{a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_1}$$

因而只须证明

$$\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}\geqslant\frac{n}{n+1}\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right) \quad ①$$

由引理得

$$\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1^2+a_1}=\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}{a_1+\frac{a_1}{a_2}}+\frac{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)^2}{a_2+\frac{a_2}{a_3}}+\cdots+\frac{\left(\frac{a_n}{a_1}\right)^2}{a_n+\frac{a_n}{a_1}}\geqslant$$

$$\frac{\left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}\right)^2}{1+\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}} \quad ②$$

令 $t=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n}{a_1}$,则 $t\geqslant n$,从而只须证

$$\frac{t^2}{1+t}\geqslant\frac{nt}{n+1}$$

而此式等价于 $t\geqslant n$. 证毕.

例 27 设 $a,b,c,d\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a^2+b^2+c^2+d^2=1$,求证

$$\sqrt{1-ab}+\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-cd}+\sqrt{1-da}\geqslant 2\sqrt{3} \quad (32)$$

当且仅当 $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ 时,式(32)取等号.

证 因为

$$2\sqrt{\left(\sum a^2\right)-ab}\cdot\sqrt{\left(\sum a^2\right)-cd}=$$

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+c^2+d^2+(a-b)^2}\cdot$$
$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+b^2+a^2+(c-d)^2}\geqslant$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2+bc+da+|a-b|\cdot|c-d|$$

所以

$$\sqrt{(\sum a^2)-ab}+\sqrt{(\sum a^2)-cd}\geqslant$$
$$\sqrt{3\sum a^2-ab-cd+bc+da+|a-b|\cdot|c-d|}=$$
$$\sqrt{3\sum a^2-(a-c)(b-d)+|a-b|\cdot|c-d|} \quad ①$$

同理可得

$$\sqrt{(\sum a^2)-bc}+\sqrt{(\sum a^2)-da}\geqslant$$
$$\sqrt{3\sum a^2+(a-c)(b-d)+|b-c|\cdot|d-a|} \quad ②$$

由式①、②知，要证式(32)，只需证

$$\sqrt{3\sum a^2-(a-c)(b-d)+|a-b|\cdot|c-d|}+$$
$$\sqrt{3\sum a^2+(a-c)(b-d)+|b-c|\cdot|d-a|}\geqslant$$
$$2\sqrt{3\sum a^2}\Leftrightarrow|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|+$$
$$2\sqrt{3\sum a^2-(a-c)(b-d)+|a-b|\cdot|c-d|}\cdot$$
$$\sqrt{3\sum a^2+(a-c)(b-d)+|b-c|\cdot|d-a|}\geqslant 6\sum a^2\Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{3\sum a^2-(a-c)(b-d)+|a-b|\cdot|c-d|}\cdot$$
$$\sqrt{3\sum a^2+(a-c)(b-d)+|b-c|\cdot|d-a|}\geqslant$$
$$6\sum a^2-|a-b|\cdot|c-d|-|b-c|\cdot|d-a|$$

将上式两边平方，经整理，则又等价于

$$24(\sum a^2)\cdot(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)+$$
$$4[-(a-c)(b-d)+|a-b|\cdot|c-d|]\cdot$$
$$[(a-c)(b-d)+|b-c|\cdot|d-a|]\geqslant$$
$$(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)^2 \quad ③$$

因为

$$\sum a^2\geqslant\frac{1}{2}(a-b)^2+\frac{1}{2}(c-d)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2+\frac{1}{2}(d-a)^2\geqslant$$
$$|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|$$

所以

$$(\sum a^2)(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)\geqslant$$
$$(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)^2$$

又因为

$$24(\sum a^2)\cdot(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)+$$
$$4[-(a-c)(b-d)+|a-b|\cdot|c-d|]\cdot$$
$$[(a-c)(b-d)+|b-c|\cdot|d-a|]-$$
$$(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)^2=$$
$$24(\sum a^2)\cdot(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)-$$
$$[|a-b|\cdot|c-d|-|b-c|\cdot|d-a|-$$
$$2(a-c)(b-d)]^2=24(\sum a^2)(|a-b|\cdot$$
$$|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)-$$
$$\{|a-b|\cdot|c-d|-|b-c|\cdot|d-a|-$$
$$2[(a-b)(c-d)-(b-c)(d-a)]\}^2\geqslant$$
$$24(|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|)^2-$$
$$9[|a-b|\cdot|c-d|+|b-c|\cdot|d-a|]^2\geqslant 0$$

故式③成立,式(32)获证.

例 28 (自创题,2003.07.07)设 $x_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,3,4,5)$,则

$$\sum\frac{x_1^2}{x_2}\geqslant\sqrt{5\sum x_1^2}\qquad(33)$$

当且仅当 $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5$ 时,式(33)取等号.

证 因为 $$\sum\frac{x_1^2}{x_2}=\sum x_1+\sum\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}$$

所以

$$(\sum\frac{x_1^2}{x_2})^2-5\sum x_1^2=[\sum x_1+\sum\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}]^2-5\sum x_1^2=$$
$$[\sum\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}]^2+2\sum x_1\cdot\sum\frac{(x_1-x_2)^2}{x_2}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i-x_j)^2\geqslant$$
$$2(\sum|x_1-x_2|)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i-x_j)^2\geqslant$$
$$2\sum(x_1-x_2)^2+4|(x_1-x_2)(x_3-x_4)|+4|(x_2-x_3)(x_4-x_5)|+$$
$$4|(x_3-x_4)(x_5-x_1)|+4|(x_4-x_5)(x_1-x_2)|+$$
$$4|(x_5-x_1)(x_2-x_3)|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i-x_j)^2=$$
$$4|(x_1-x_2)(x_3-x_4)|+4|(x_2-x_3)(x_4-x_5)|+4|(x_3-x_4)(x_5-x_1)|+$$

$$4|(x_4-x_5)(x_1-x_2)|+4|(x_5-x_1)(x_2-x_3)|+2(x_1-x_2)(x_3-x_4)+$$
$$2(x_2-x_3)(x_4-x_5)+2(x_3-x_4)(x_5-x_1)+2(x_4-x_5)(x_1-x_2)+$$
$$2(x_5-x_1)(x_2-x_3)\geqslant 0$$

以上注意到

$$2\sum(x_1-x_2)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(x_i-x_j)^2=2(x_1-x_2)(x_3-x_4)+$$
$$2(x_2-x_3)(x_4-x_5)+2(x_3-x_4)(x_5-x_1)+$$
$$2(x_4-x_5)(x_1-x_2)+2(x_5-x_1)(x_2-x_3)$$

例 29 （伊朗第 20 届数学奥赛题）设 a,b,c 为正实数，且

$$a^2+b^2+c^2+abc=4$$

求证

$$a+b+c\leqslant 3 \tag{34}$$

证 由已知条件可知 a,b,c 不能都大于 1，也不能都小于 1，即 a,b,c 中有两个不小于 1 或者有两个不大于 1，不妨设这样的两个数为 a,b，则

$$(1-a)(1-b)\geqslant 0$$

即

$$ab\geqslant a+b-1 \quad ①$$

又因为 $$4=a^2+b^2+c^2+abc\geqslant 2ab+c^2+abc$$

所以 $$ab(2+c)\leqslant 4-c^2$$

所以

$$2-c\geqslant ab \quad ②$$

式 ① + ② 即得

$$a+b+c\leqslant 3$$

注 本例条件可放宽为 $a,b,c\in\mathbf{R}$，且 $a^2+b^2+c^2+abc\leqslant 4$，式(34) 仍成立.

例 30 （自创题，2006. 06. 23）设 $x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $xy\geqslant 1$，$m,n\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$\frac{1}{(1+x^{2m})(1+x^{2n})}+\frac{1}{(1+y^{2m})(1+y^{2n})}\geqslant\frac{1}{1+(xy)^{m+n}} \tag{35}$$

当且仅当 $x=y=1$ 时，式(35) 取等号.

证 由

$$[(1+x^{2m})(1+x^{2n})+(1+y^{2m})(1+y^{2n})][1+(xy)^{m+m}]-$$
$$(1+x^{2m})(1+x^{2n})(1+y^{2m})(1+y^{2n})=$$
$$1+2(xy)^{m+n}+(xy)^{m+n}(x^{2m}+y^{2m})+(xy)^{m+n}(x^{2n}+y^{2n})+$$
$$(xy)^{m+n}[x^{2(m+n)}+y^{2(m+n)}]-[(xy)^{2m}+(xy)^{2n}+(xy)^{2(m+n)}+$$
$$(xy)^{2m}(x^{2n}+y^{2n})+(xy)^{2n}(x^{2m}+y^{2m})+(xy)^{2m}(x^{2n-2m}+y^{2n-2m})]=$$
$$[1-(xy)^{2m}-(xy)^{2n}+(xy)^{2n+2m}]+$$

$$(xy)^{n+m}[x^{2n}+y^{2n}-(xy)^{n-m}(x^{2m}+y^{2m})]+$$
$$(xy)^{n+m}[x^{2(m+n)}+y^{2(n+m)}-2(xy)^{n+m}]-$$
$$(xy)^{2m}[x^{2n-2m}+y^{2n-2m}-2(xy)^{n-m}]-$$
$$(xy)^{2m}[x^{2n}+y^{2n}-(xy)^{n-m}(x^{2m}+y^{2m})]=$$
$$[1-(xy)^{2m}][1-(xy)^{2n}]+(xy)^{n+m}(x^{n-m}-y^{n-m})(x^{n+m}-y^{n+m})+$$
$$(xy)^{n+m}(x^{n+m}-y^{n+m})^2-(xy)^{2m}(x^{n-m}-y^{n-m})^2-$$
$$(xy)^{2m}(x^{n-m}-y^{n-m})(x^{n+m}-y^{n+m})=$$
$$[1-(xy)^{2m}][1-(xy)^{2n}]+(xy)^{n+m}(x^{n+m}-y^{n+m})\cdot$$
$$(x^{n+m}-y^{n+m}+x^{n-m}-y^{n-m})-(xy)^{2m}(x^{n-m}-y^{n-m})$$
$$(x^{n+m}-y^{n+m}+x^{n-m}-y^{n-m})$$

当 $x=y$ 或 $m=n$ 时,上式不小于零. 因此当 $x=y$ 或 $m=n$ 时,原式成立.

当 $x\neq y$ 且 $m\neq n$ 时,不妨设 $n>m\geqslant 0, x>y$,则

$$[1-(xy)^{2m}][1-(xy)^{2n}]+(xy)^{n+m}(x^{n+m}-y^{n+m})$$
$$(x^{n+m}-y^{n+m}+x^{n-m}-y^{n-m})-(xy)^{2m}$$
$$(x^{n-m}-y^{n-m})(x^{n+m}-y^{n+m}+x^{n-m}-y^{n-m})=$$
$$[1-(xy)^{2m}][1-(xy)^{2n}]-(xy)^{2m}(x^{n-m}-y^{n-m})^2$$
$$\left[1+\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}\right]\left[1-(xy)^{n-m}\cdot\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}\right]$$

因为
$$n>m\geqslant 0,\ x>y,\ xy\geqslant 1$$

所以
$$\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}-(xy)^m=\frac{(x^n+y^n)(x^m-y^m)}{x^{n-m}-y^{n-m}}\geqslant 0$$

即
$$\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}\geqslant (xy)^m$$

所以 $1-(xy)^{n-m}\cdot\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}\leqslant 1-(xy)^{n-m}\cdot(xy)^m=1-(xy)^n\leqslant 0$

所以
$$[1-(xy)^{2m}][1-(xy)^{2n}]-(xy)^{2m}(x^{n-m}-y^{n-m})^2\cdot\left[1+\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}\right]\cdot$$
$$\left[1-(xy)^{n-m}\frac{x^{n+m}-y^{n+m}}{x^{n-m}-y^{n-m}}\right]\geqslant 0$$

所以当 $xy\geqslant 1, x\neq y$,且 $m\neq n$ 时,式(35) 也成立. 由上证明知,当且仅当 $x=y=1$ 时,式(35) 取等号.

注 若 $n=2, m=1$,则不需要有条件"$xy\geqslant 1$". 可参见"第三章. 放缩法证明不等式" 中例 16.

例 31 (自创题,2006.06.23) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$,则

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^3)}+\frac{1}{(1+y)(1+y^3)}+\frac{1}{(1+z)(1+z^3)}\geqslant\frac{3}{4}\qquad(36)$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(36) 取等号.

证 由 $xyz=1$,且式(36) 为关于 x,y,z 的对称式,因此,不妨设 $xy\geqslant 1$,由上式(35) 有

$$\frac{1}{(1+x)(1+x^3)}+\frac{1}{(1+y)(1+y^3)}\geqslant\frac{1}{1+(xy)^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}=\frac{1}{1+(xy)^2}\qquad①$$

今证

$$\frac{1}{(1+z)(1+z^3)}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{1+z^2}\qquad②$$

$$式②\Leftrightarrow(5+z+z^3+z^4)(1+z^2)\geqslant 4(1+z)(1+z^3)$$

由于

$$\begin{aligned}&(5+z+z^3+z^4)(1+z^2)-4(1+z)(1+z^3)=\\&1-3z+5z^2-2z^3-3z^4+z^5+z^6=\\&(1-z)(1-2z+3z^2+z^3-2z^4-z^5)=\\&(1-z)(1-z)(1-z+2z^2+3z^3+z^4)\geqslant 0\end{aligned}$$

即式 ② 成立.

所以,由式 ① + ② 得

$$\begin{aligned}\sum\frac{1}{(1+x)(1+x^3)}&\geqslant\frac{1}{1+(xy)^2}+\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{4}=\\&\frac{1}{1+\frac{1}{z^2}}+\frac{1}{1+z^2}-\frac{1}{4}=\\&1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

即得式(36).

注 1. 易证 $\frac{1}{(1+x^2)^2}\geqslant\frac{1}{(1+x)(1+x^3)}$. 因此,由式(36) 可得:

设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$,则

$$\sum\frac{1}{(1+x^2)^2}\geqslant\frac{3}{4}$$

或

$$\sum\frac{1}{(1+x)^2}\geqslant\frac{3}{4}\qquad(37)$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(37) 取等号.

2. 同法可证:设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$,则

$$\sum \frac{1}{(1+x^3)(1+x^5)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{38}$$

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{39}$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(38)、(39) 取等号.

3.(自创题,2006.06.25) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+,m,n\in\mathbf{N}$,且 $xyz=1$ 及

$$(1-z^{2m})(1-z^{2n})\geqslant 2(z^m-z^n)^2$$

则

$$\sum \frac{1}{(1+x^m)(1+x^n)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{40}$$

证 先证

$$\frac{1}{(1+z^{2m})(1+z^{2n})}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{1+z^{m+n}} \tag{※}$$

而

式(※)$\Leftrightarrow 1-3z^{2m}-3z^{2n}-3z^{2(m+n)}+5z^{m+n}+z^{m+3n}+z^{n+3m}+z^{3(m+n)}\geqslant 0$

因为

$$z^{3m+n}+z^{m+3n}\geqslant 2z^{2(m+n)}$$
$$z^{m+n}+z^{3(m+n)}\geqslant 2z^{2(m+n)}$$

所以要证式(※),只要证 $1-3z^{2m}-3z^{2n}+z^{2(m+n)}+4z^{m+n}\geqslant 0$,即

$$(1-z^{2m})(1-z^{2n})\geqslant 2(z^m-z^n)^2$$

因此,当 $(1-z^{2m})(1-z^{2n})\geqslant 2(z^m-z^n)^2$ 时,式(※)成立.

于是,在式(35)中,由 $xyz=1$,可不妨设 $xy\geqslant 1$,则

$$\frac{1}{(1+x^m)(1+x^n)}+\frac{1}{(1+y^m)(1+y^n)}\geqslant\frac{1}{1+(xy)^{\frac{m+n}{2}}} \tag{①}$$

又

$$(1-z^{2m})(1-z^{2n})\geqslant 2(z^m-z^n)^2$$

$$\frac{1}{(1+z^m)(1+z^n)}+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{1+z^{\frac{m+n}{2}}}=\frac{(xy)^{\frac{m+n}{2}}}{1+(xy)^{\frac{m+n}{2}}} \tag{②}$$

式①+②即得式(40).

还有如 i)(自创题,2006.06.25)

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)(1+x^5)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{41}$$

其中,$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$.

ii)(自创题,2006.06.25)

$$\sum \frac{1}{(1+x^2)(1+x^7)} \geqslant \frac{3}{4} \tag{42}$$

其中,$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,$xyz=1$.

证 式(42)等价于

$$\sum\frac{1}{(1+x^4)(1+x^{14})}\geqslant\frac{3}{4}$$

于是只要证

$$(1-z^4)(1-z^{14})\geqslant 2(z^2-z^7)^2 \qquad ①$$

式①左边 - 右边 =

$(1-z)^2[(1+z+z^2+z^3)(1+z+z^2+\cdots+z^{13})-2z^4(1+z+z^2+z^3+z^4)^2]=$

$(1-z)^2[(1+2z)(1-2z^6+2z^{12})+3z^2(1-z^6)^2+(2z^3+z^4)(2-2z^6+z^{12})]\geqslant$

0

式①成立,故由式(40)知式(42)成立.

例 32 (自创题,2006.07.01)对于任意实数 a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,有

$$(b_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1^2+b_2^2+a_3^2)(a_1^2+a_2^2+b_3^2)\geqslant$$
$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2 \qquad (43)$$

当且仅当 $a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$ 时,式(43)取等号.

证 由于 $b_1^2-a_1^2,b_2^2-a_2^2,b_3^2-a_3^2$ 中必有两个都不大于零或都不小于零,即 $(b_2^2-a_2^2)(b_3^2-a_3^2)\geqslant 0,(b_1^2-a_1^2)(b_3^2-a_3^2)\geqslant 0$, $(b_1^2-a_1^2)(b_2^2-a_2^2)\geqslant 0$ 中必有一个成立.

不妨设 $(b_2^2-a_2^2)(b_3^2-a_3^2)\geqslant 0$,即 $b_2^2b_3^2\geqslant a_3^2b_2^2+a_2^2b_3^2-a_2^2a_3^2$,则

$$\begin{aligned}(b_2^2+a_1^2+a_3^2)(b_3^2+a_1^2+a_2^2)&\geqslant(a_3^2b_2^2+a_2^2b_3^2-a_2^2a_3^2)+(a_1^2+a_3^2)b_3^2+\\&\quad(a_1^2+a_2^2)b_2^2+(a_1^2+a_3^2)(a_1^2+a_2^2)=\\&\quad(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1^2+b_2^2+b_3^2)\end{aligned}$$

因此

$$(b_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1^2+b_2^2+a_3^2)(a_1^2+a_2^2+b_3^2)\geqslant$$
$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant$$
$$(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$$

由上证明易知,当且仅当 $a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$ 时,式(43)取等号.

例 33 (自创题,2006.08.02)设 $a_i,b_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,记 $a=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,则

$$\prod_{i=1}^{n}[a-(a_i-b_i)]\geqslant a^{n-2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2 \qquad (44)$$

当且仅当 $n=2$ 时,$a_1a_2=b_1b_2$,或 $n\geqslant 3$ 时,$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$,式(44)取等号.

为证式(44),先证以下引理.

引理 设 $a \geqslant a_i - b_i$，且 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,m,m \geqslant 2)$ 同号，$a \geqslant 0$，则

$$\prod_{i=1}^{m}[a-(a_i-b_i)] \geqslant a^{m-1}\cdot[a-\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)] \qquad (45)$$

当且仅当 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,m,m \geqslant 2)$ 中，有 $m-1(m \geqslant 2)$ 个为零时，式(45)取等号.

证 应用数学归纳法.

i）当 $m = 2$ 时，由于 $a_1 - b_1, a_2 - b_2$ 同号，因此

$$[a-(a_1-b_1)][a-(a_2-b_2)] - a[a-(a_1-b_1)-(a_2-b_2)] = (a_1-b_1)(a_2-b_2) \geqslant 0$$

即式(45)成立，当且仅当 $a_1 = b_1$ 或 $a_2 = b_2$ 时取等号.

ii）假设 $m = k(k \geqslant 2)$ 时，式(45)成立，即 $a \geqslant a_i - b_i$，且 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,k,k \geqslant 2)$ 同号，$a \geqslant 0$，有

$$\prod_{i=1}^{k}[a-(a_i-b_i)] \geqslant a^{k-1}\cdot[a-\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)]$$

当且仅当 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,k,k \geqslant 2)$ 中，有 $k-1$ 个为零时取等号.

当 $m = k+1(k \geqslant 2)$ 时，即 $a \geqslant a_i - b_i$，且 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,k+1,k \geqslant 2)$ 同号，$a \geqslant 0$，这时

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{k+1}[a-(a_i-b_i)] &= \prod_{i=1}^{k}[a-(a_i-b_i)]\cdot[a-(a_{k+1}-b_{k+1})] \geqslant \\ &a^{k-1}\cdot[a-\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)]\cdot[a-(a_{k+1}-b_{k+1})] = \\ &a^{k}\cdot[a-\sum_{i=1}^{k+1}(a_i-b_i)] + a^{k-1}\cdot[\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)]\cdot \\ &(a_{k+1}-b_{k+1}) \geqslant \\ &a^{k}\cdot[a-\sum_{i=1}^{k+1}(a_i-b_i)]\end{aligned}$$

注意由 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,k+1,k \geqslant 2)$ 同号知

$$\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)\cdot(a_{k+1}-b_{k+1}) \geqslant 0$$

由此知，当 $m = k+1$ 时，式(45)也成立，当且仅当 $a_i - b_i (i = 1,2,\cdots,k+1,k \geqslant 2)$ 中，有 $k(k \geqslant 2)$ 个为零时，上式取等号.

根据归纳法原理，由 i）、ii）知引理成立.

下面来证明式(44).

当 $n = 2$ 时，有

$$(b_1+a_2)(a_1+b_2) \geqslant (\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2})^2$$

式(44)成立，当且仅当 $a_1a_2 = b_1b_2$ 时取等号.

当 $n \geqslant 3$ 时,在 $a_i - b_i(i = 1,2,\cdots,n,n \geqslant 3)$ 中,若全部同号,则由引理有

$$\prod_{i=1}^{k}[a-(a_i-b_i)] \geqslant a^{n-1}\cdot[a-\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)] =$$

$$a^{n-2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}a_i)(\sum_{i=1}^{n}b_i) \geqslant$$

$$a^{n-2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$$

即式(44) 成立.

若 $a_i - b_i(i = 1,2,\cdots,n,n \geqslant 3)$ 不全为同号,则其中必有 $k(k \geqslant 2)$ 个同号,余下的 $n-k$ $(k = 2,3,\cdots,n-1,n \geqslant k+1)$ 个也同号(视1个为自我同号),不妨设 $a_i - b_i(i = 1,2,\cdots,k,k \geqslant 2)$ 同号,另外 $a_{k+j} - b_{k+j}(j = 1,2,\cdots,n-k,2 \leqslant k \leqslant n)$ 也同号,由引理,有

$$\prod_{i=1}^{k}[a-(a_i-b_i)] \geqslant a^{k-1}\cdot[a-\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)] \qquad ①$$

$$\prod_{i=1}^{n-k}[a-(a_{k+i}-b_{k+i})] \geqslant a^{n-k-1}\cdot[a-\sum_{i=1}^{n-k}(a_{k+i}-b_{k+i})] \qquad ②$$

于是,将式 ①、② 两边分别相乘,得到

$$\prod_{i=1}^{n}[a-(a_i-b_i)] \geqslant a^{n-2}\cdot[a-\sum_{i=1}^{k}(a_i-b_i)]\cdot[a-\sum_{i=1}^{n-k}(a_{k+i}-b_{k+i})] \geqslant$$

$$a^{n-2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_ib_i})^2$$

即得式(44). 由以上证明过程及式(45) 中取等号条件可知式(44) 的取等号条件.

注 1. 例 32 中式(43) 只是式(44) 中 $n = 3$ 的特例.

2. 式(44) 等价于:$x_i,y_i \in \mathbf{R},i = 1,2,\cdots,n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}[\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(x_i^2-y_i^2)] \geqslant (\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^{n-2}\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^2 \qquad (46)$$

当且仅当 $n = 2$ 时,$x_1x_2 = y_1y_2$,或 $n \geqslant 3$ 时,$x_i = y_i(i = 1,2,\cdots,n)$,式(46) 取等号.

3. 式(44) 是一个应用广泛的不等式,如由式(44) 可得到:

i) 设 $x_i \in \overline{\mathbf{R}^-},i = 1,2,\cdots,k,a \in \overline{\mathbf{R}^-}$,$n$ 为正整数,且 $n \geqslant k \geqslant 2$,则

$$\prod_{i=1}^{k}(a+x_i^2) \geqslant (\frac{n}{n-1}a)^{k-2}\cdot[\sqrt{\frac{a}{n-1}}\cdot\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{n-k}{n-1}a]^2 \qquad (47)$$

当且仅当 $n = k = 2$ 时,$x_1x_2 = a$,或 $n \geqslant k > 2$ 时,$x_1 = x_2 = \cdots = x_k = \sqrt{\frac{a}{n-1}}$,式(47) 取等号.

证

$$\prod_{i=1}^{k}(a+x_i^2)=\prod_{i=1}^{k}(x_i^2+\underbrace{\frac{a}{n-1}+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1}}_{(n-1)个})=$$

$$(x_1^2+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1})(\frac{a}{n-1}+x_2^2+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1})\cdots$$

$$(\frac{a}{n-1}+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1}+x_k^2+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1})\cdot$$

$$(\underbrace{\frac{a}{n-1}+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1}}_{n个})^{n-k}\geqslant(\underbrace{\frac{a}{n-1}+\frac{a}{n-1}+\cdots+\frac{a}{n-1}}_{n个})^{n-2}\cdot$$

$$(\sqrt{\frac{a}{n-1}}\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{n-k}{n-1}a)^2=$$

$$(\frac{n}{n-1}a)^{n-2}\cdot[\sqrt{\frac{a}{n-1}}\sum_{i=1}^{k}x_i+\frac{n-k}{n-1}a]^2$$

取 $n=k$ 得

$$\prod_{i=1}^{n}(a+x_i^2)\geqslant\frac{n^{n-2}}{(n-1)^{n-1}}a^{n-1}\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\tag{48}$$

式(48)取等号条件同式(47).

若取 $n=3$,得

$$\prod_{i=1}^{3}(a+x_i^2)\geqslant\frac{3}{4}a^2\cdot(\sum_{i=1}^{3}x_i)^2$$

此式即为第一章"等价变换法证明不等式"例7中的式(14).

ii)在式(48)中,将 n 换成 $2n$,并令 $x_{n+1}=x_1,x_{n+2}=x_2,\cdots,x_{2n}=x_n$,则得到

$$\prod_{i=1}^{2n}(a+x_i^2)=\prod_{i=1}^{n}(a+x_i^2)^2\geqslant\frac{(2n)^{2n-2}}{(2n-1)^{2n-1}}\cdot a^{2n-1}\cdot(\sum_{i=1}^{2n}x_i)^2=$$

$$\frac{(2n)^{2n-2}}{(2n-1)^{2n-1}}\cdot a^{2n-1}\cdot 2^2\cdot(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$$

由此有

$$\prod_{i=1}^{n}(a+x_i^2)\geqslant\frac{2^n n^{n-1}a^{n-\frac{1}{2}}}{(2n-1)^{n-\frac{1}{2}}}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i\tag{49}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=\sqrt{\frac{a}{2n-1}}$ 时,式(49)取等号.

在式(49)中再取 $n=3$,即得

$$\prod_{i=1}^{3}(a+x_i^2)\geqslant 72\cdot(\frac{a}{5})^{\frac{5}{2}}\cdot\sum_{i=1}^{3}x_i$$

此式即为第一章"等价变换法证明不等式"例7中的式(15).

4. 用类似的方法,可以得到

$$\prod_{i=1}^{n}(a+x_i^2) \geqslant \frac{k^n \cdot n^{n-\frac{2}{k}} \cdot a^{n-\frac{1}{k}}}{(kn-1)^{n-\frac{1}{k}}}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{2}{k}} \tag{50}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \sqrt{\frac{a}{kn-1}}$ 时,式(50)取等号,以上 n,k 为正整数.

5. 由式(44)及加权平均值不等式

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^m}{n}\right)^k \geqslant \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^k}{n}\right)^m \quad (m \geqslant k,\ x_1,x_2,\cdots,x_n \in \overline{\mathbf{R}^-})$$

可得到下面命题.

命题 设 $a_i,b_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i=1,2,\cdots,n$, m 为正整数,且 $m \geqslant 2$,记 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^m = a$,则

$$n^{m-2} \cdot \prod_{i=1}^{n}[a-(a_i^m-b_i^m)] \geqslant a^{n-2} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^m \tag{51}$$

当切仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = b_1 = b_2 = \cdots = b_n$ 时,式(51)取等号.

例 34 设 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则有

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{x+y+z} \tag{52}$$

当且仅当 $x=3y, z=0$;或 $y=3z, x=0$;或 $z=3x, y=0$ 时,式(52)取等号.

证一 由于题目中的困难之处是分母中有根号,因此,用变量代换,消去分母中的根号是当务之急.引进三个正实数 a,b,c,使得

$$x+y=c^2,\ y+z=a^2,\ z+x=b^2$$

从上式,有

$$x+y+z=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),\ x=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)$$

$$y=\frac{1}{2}(a^2+c^2-b^2),\ z=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2) \quad ①$$

由于题目中的不等式关于 x,y,z 是圆周对称的(在变换 $x \to y \to z \to x$ 下不变),不妨设 x 是 x,y,z 中的最小的一个非负数,于是,利用式①,a 为 a,b,c 三个正实数中最大的一个.

因而,问题转化为去证明

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2c} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2a} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} \leqslant \frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)} \quad ②$$

由于

$$2(a^2+b^2+c^2)-(a+\sqrt{b^2+c^2})^2=$$

$$2(a^2+b^2+c^2)-(a^2+2a\sqrt{b^2+c^2}+b^2+c^2)=$$
$$(a-\sqrt{b^2+c^2})^2\geqslant 0 \quad ③$$

所以有

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)}\geqslant\frac{1}{2}(a+\sqrt{b^2+c^2}) \quad ④$$

从式③和式④知,如果能证明

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{c}+\frac{c^2+a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}\leqslant\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2}) \quad ⑤$$

则式②成立,本题解决. 因为

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{c}+\frac{c^2+a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}=$$
$$c+\frac{b^2-a^2}{c}+a+\frac{c^2-b^2}{a}+b+\frac{a^2-c^2}{b}=$$
$$a+b+c+\frac{1}{abc}[ab(b^2-a^2)+bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)]$$

而

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)=$$
$$(a+b+c)(a^2-ab-ac+bc)(c-b)=$$
$$(a+b+c)(a^2c-ca^2+bc^2-b^2c+ab^2-a^2b)=$$
$$ab(b^2-a^2)+bc(c^2-b^2)+ca(a^2-c^2)$$

因此有

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{c}+\frac{c^2+a^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}=$$
$$\frac{a+b+c}{abc}[abc+(a-b)(b-c)(c-a)] \quad ⑥$$

从式⑤和式⑥知,我们必须证明

$$4(a+b+c)[abc+(a-b)(b-c)(c-a)]\leqslant 5abc(a+\sqrt{b^2+c^2}) \quad ⑦$$

这里 a,b,c 是正实数,且 a 为最大的一个. 视 a 为变量,b,c 为参数,令

$$f(a)=4(a+b+c)[abc+(a-b)(b-c)(c-a)]-5abc(a+\sqrt{b^2+c^2})=$$
$$4(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)+abc[4(b+c)-a-5\sqrt{b^2+c^2}] \quad ⑧$$

由于 $x>0$,从式①中第二式,有 $a<\sqrt{b^2+c^2}$.

当 $a>b$ 时,如果我们能证明了 $f(a)<0$,这表明当 $b\leqslant c\leqslant a<\sqrt{b^2+c^2}$ 时,式⑦成立,利用式⑧,有

$$abc[5\sqrt{b^2+c^2}+a-4(b+c)]>4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)\geqslant 0 \quad ⑨$$

当然如果能证明式⑨,则$f(a)<0$和不等式⑦成立. 现在我们说明只要在$c \geqslant b$条件下,证明式⑨就够了. 当$c<b$时,令$b^{*}=c, c^{*}=b, b^{*}<c^{*} \leqslant a<\sqrt{b^{2}+c^{2}}=\sqrt{b^{*2}+c^{*2}}$,如果式⑨成立,应当有

$$ab^{*}c^{*}[5\sqrt{b^{*2}+c^{*2}}+a-4(b^{*}+c^{*})]>0 \tag{10}$$

这里将式⑨中b用b^{*}代替,c用c^{*}代替,就能得到式⑩. 从式⑩及$a \geqslant b>c$,有

$$abc[5\sqrt{b^{2}+c^{2}}+a-4(b+c)]>0 \geqslant 4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \tag{11}$$

由⑧、⑨和⑪三式可以知道,始终有$f(a)<0$.

因此,问题转化为在$b \leqslant c \leqslant a<\sqrt{b^{2}+c^{2}}$条件下,证明式⑨成立,或证明等价的不等式$f(a)<0$.

当$b=c$时,$a<\sqrt{2}b$,利用式⑧,有

$$f(a)=ab^{2}(8b-a-5\sqrt{2}b)=ab^{2}[(7-5\sqrt{2})b-(a-b)]$$

明显地,$7-5\sqrt{2}<0, a-b \geqslant 0$,又$b>0$,所以$f(a)<0$.

当$c>b$时,$f(a)$是关于a的一个三次实系数多项式,首项系数是$4(c-b)>0$(式⑧). 常数项$f(0)=4(b+c)bc(c-b)>0$. 现在考虑$f(a)$的根的情况. 当$f(a)$是很大的负数时,$f(a)<0$,由于$f(0)>0$,所以在$(-\infty, 0)$内,$f(a)$必有一个实数根. 利用式⑧,有

$$f(c)=bc^{2}(4b+3c-5\sqrt{b^{2}+c^{2}}) \tag{12}$$

由于$c>b, 0<(4c-3b)^{2}$,则展开后,有

$$16c^{2}+9b^{2}>24bc \tag{13}$$

于是,有

$$\begin{aligned}(3c+4b)^{2}=9c^{2}+24bc+16b^{2}<\\ (9c^{2}+16b^{2})+(16c^{2}+9b^{2})=\\ 25(b^{2}+c^{2})\end{aligned}$$

上式两端开方,有

$$3c+4b<5\sqrt{b^{2}+c^{2}} \tag{14}$$

由式⑫和式⑭,有$f(c)<0$,这表明$f(a)$在$(0,c)$之间必有第二个实数根.

$$\begin{aligned}f(\sqrt{b^{2}+c^{2}})=&4(\sqrt{b^{2}+c^{2}}+b+c)(\sqrt{b^{2}+c^{2}}-b)+\\ &(\sqrt{b^{2}+c^{2}}-c)(c-b)+\\ &\sqrt{b^{2}+c^{2}}bc[4(b+c)-6\sqrt{b^{2}+c^{2}}]=\\ &4(c^{2}-bc+c\sqrt{b^{2}+c^{2}})(\sqrt{b^{2}+c^{2}}-c)(c-b)+\end{aligned}$$

$$2\sqrt{b^2+c^2}bc[2(b+c)-\sqrt{b^2+c^2}]=$$
$$[4c(b^2+c^2)(c-b)-4c(c^2-bc)(c-b)-6bc(b^2+c^2)]+$$
$$4[(c^2-bc)(c-b)-c^2(c-b)+bc(b+c)]\sqrt{b^2+c^2}=$$
$$-2bc(5b^2+c^2)+8b^2c\sqrt{b^2+c^2}=$$
$$-2bc(\sqrt{b^2+c^2}-2b)^2\leqslant$$
$$0$$

由于$f(a)$的首项系数为正,则a取很大的正实数时,$f(a)>0$,因此$f(a)$在区间$[\sqrt{b^2+c^2},+\infty)$内有第三个根.$f(a)$是a的一个实系数三次多项式,已知$f(a)$在$(-\infty,0)$,$(0,c)$,$[\sqrt{b^2+c^2},+\infty)$三个区间内有一个实数根,则$f(a)$无其他根了.于是$f(a)$在区间$[c,\sqrt{b^2+c^2})$内不改变符号(否则将产生一个新根,矛盾)那么对于$[c,\sqrt{b^2+c^2})$内任一正实数a,$f(a)$与$f(c)$同号,而前面已证$f(c)<0$,那么$f(a)<0$,这恰好是要证明的.

证二 (录自 THE LOVE MAKES US STRONGER, Jack Garfunkel 提供)

$$\left(\sum\frac{x}{\sqrt{x+y}}\right)^2\leqslant\sum\frac{x(3x+3y+z)}{x+y}\cdot\sum\frac{x}{3x+3y+z}=$$
$$\left[2\sum x+\sum\frac{x(x+y+z)}{x+y}\right]\cdot\sum\frac{x}{3x+3y+z}=$$
$$\sum x\cdot\left(2+\sum\frac{x}{x+y}\right)\cdot\sum\frac{x}{3x+3y+z}$$

因此,只要证

$$\left(2+\sum\frac{x}{x+y}\right)\cdot\sum\frac{x}{3x+3y+z}\leqslant\frac{25}{16}\qquad ①$$

记$A=\sum x^3$,$B=\sum x^2y$,$C=\sum xy^2$,$r=xyz$,则

$$\sum\frac{x}{3x+3y+z}=\frac{3A+19B+15C+36r}{9A+39B+39C+82r}$$
$$2+\sum\frac{x}{x+y}=\frac{4B+3C+5r}{B+C+2r}$$

将以上两式分别代入式①,并整理得到

$$1\,220r^2+(210A+176B+1\,072C)r+33AB+81AC+$$
$$255C^2-241B^2+78BC\geqslant 0\qquad ②$$
$$AB=\sum x^3\cdot\sum x^2y=\sum x^5y+\sum x^2y^4+Br$$
$$AC=\sum x^3\cdot\sum xy^2=\sum xy^5+\sum x^4y^2+Cr$$
$$B^2=\left(\sum x^2y\right)^2=\sum x^4y^2+2Cr$$

$$C^2 = (\sum xy^2)^2 = \sum x^2y^4 + 2Br$$

$$BC = \sum x^2y \cdot \sum xy^2 = \sum x^3y^3 + Ar + 3r^2$$

将以上各式分别代入式②左边,经计算并整理,得到

$$\text{式②左边} = \sum xy(11x+9y)(3x+y)(x-3y)^2 + (288A+719B+671C)r + 1454r^2 \geqslant 0$$

故式②成立,从而式①成立,式(52)获证. 由上述证明的最后一式的取等号条件可知式(52)的取等号条件.

注 1. 以上证明可参阅黄宣国著《数学奥林匹克大集 1994》,上海教育出版社,1997 年出版.

2. 式(52)曾被改编成"第 48 届 IMO 中国国家集训队测试题":

设 $a,b,c \in (0,1]$,且 $a^2+b^2+c^2=2$,求证

$$\frac{1-b^2}{a} + \frac{1-c^2}{b} + \frac{1-a^2}{c} \leqslant \frac{5}{4}$$

当且仅当 $a=1,b=\frac{1}{2},c=\frac{\sqrt{3}}{2}$;或 $b=1,c=\frac{1}{2},a=\frac{\sqrt{3}}{2}$;或 $c=1,a=\frac{1}{2}$,$b=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时原式取等号.

证三 (命题组提供)不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$. 由题设知 $a^2 \leqslant b^2+c^2$,则

$$\text{原式} \Leftrightarrow \frac{2-2b^2}{2a} + \frac{2-2c^2}{2b} + \frac{2-2a^2}{2c} \leqslant \frac{5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{2a} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2b} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} \leqslant \frac{5}{4}$$

而
$$\frac{5}{4} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)} \geqslant \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{2}(a+\sqrt{b^2+c^2})$$

所以只需证

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{a} + \frac{a^2+b^2-c^2}{b} + \frac{b^2+c^2-a^2}{c} \leqslant \frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2}) \Leftrightarrow \quad ①$$

$$\frac{bc(a^2+c^2-b^2)+ca(a^2+b^2-c^2)+ab(b^2+c^2-a^2)}{abc} \leqslant$$

$$\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2}) \Leftrightarrow$$

$$a+b+c+\frac{(a+c+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \leqslant \frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2}) \Leftrightarrow$$

$$4(a+b+c)[abc+(a-b)(b-c)(c-a)] \leqslant 5abc(a+\sqrt{b^2+c^2}) \Leftrightarrow$$

$4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)+abc[4(b+c)-a-5\sqrt{b^2+c^2}]\leqslant 0$

记$f(a)=4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)+abc[4(b+c)-a-5\sqrt{b^2+c^2}]$,于是:

i)若$b\leqslant c\leqslant a\leqslant\sqrt{b^2+c^2}$,当$b=c$时,$a\leqslant\sqrt{2}b$.此时

$$f(a)=ab^2(8b-a-5\sqrt{2}b)=ab^2[(7-5\sqrt{2})b+(b-a)]<0$$

当$b<c$时,$f(a)$为a的三次多项式,其首项系数为$4(c-b)>0$,故$\lim\limits_{a\to-\infty}f(a)<0$,$\lim\limits_{a\to+\infty}f(a)>0$,而

$$f(0)=4(b+c)bc(c-b)>0$$

$$\begin{aligned}f(c)=&bc^2[4(b+c)-c-5\sqrt{b^2+c^2})=\\&bc^2(4b+3c-5\sqrt{b^2+c^2})<\\&0(\Leftrightarrow 4b+3c<5\sqrt{b^2+c^2}\Leftrightarrow\\&16b^2+9c^2+24bc<25b^2+25c^2\Leftrightarrow\\&9b^2-24bc+16c^2>0\Leftrightarrow(3b-4c)^2>0)\end{aligned}$$

故$f(a)$在$(-\infty,0)$,$(0,c)$,$(c,+\infty)$上有三个实根.

考虑$f(\sqrt{b^2+c^2})$的符号,注意到$f(a)$与式①中左边减去右边的符号相同,只需考虑

$$\frac{a^2+c^2-b^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b}+\frac{b^2+c^2-a^2}{c}-\frac{5}{4}(a+\sqrt{b^2+c^2})\qquad ②$$

当$a=\sqrt{b^2+c^2}$时

$$\begin{aligned}式②=&\frac{2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{2b^2}{b}-\frac{5}{4}(\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2})=\\&\frac{2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}+2b-\frac{5}{2}\sqrt{b^2+c^2}=\\&\frac{1}{2\sqrt{b^2+c^2}}[(4c^2+4b\sqrt{b^2+c^2}-5(b^2+c^2)]=\\&\frac{1}{2\sqrt{b^2+c^2}}[4b\sqrt{b^2+c^2}-5b^2-c^2)\leqslant 0\\&(\Leftrightarrow 4b\sqrt{b^2+c^2}\leqslant 5b^2+c^2\Leftrightarrow 16b^4+16b^2c^2\leqslant\\&25b^4+c^4+10b^2c^2\Leftrightarrow 9b^4+c^4-6b^2c^2\geqslant\\&0\Leftrightarrow(3b^2-c^2)^2\geqslant 0)\end{aligned}$$

从上可知$f(\sqrt{b^2+c^2})\leqslant 0$.这说明:当$c\leqslant a\leqslant\sqrt{b^2+c^2}$时,$f(a)\leqslant 0$.

ⅱ)若 $c < b \leqslant a \leqslant \sqrt{b^2+c^2}$. 此时若存在 a_1 使得 $f(a_1) > 0$,令 $b_1 = c$, $c_1 = b$,则 $b_1 < c_1 \leqslant a_1 \leqslant \sqrt{b^2+c^2}$,由 ⅰ)知此时 $f(a_1) \leqslant 0$,即

$$4(a_1+b_1+c_1)(a_1-b_1)(a_1-c_1)(c_1-b_1)+$$
$$a_1b_1c_1[4(b_1+c_1)-a_1-5\sqrt{b^2+c^2}] \leqslant 0$$

即

$$4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(b-c)+$$
$$a_1bc[4(b+c)-a_1-5\sqrt{b^2+c^2}] \leqslant 0$$

又 $b > c$,所以

$$4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(b-c) \geqslant 0 \geqslant$$
$$4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(c-b)$$

因此

$$f(a_1) \leqslant 4(a_1+b+c)(a_1-c)(a_1-b)(b-c)+$$
$$a_1bc[4(b+c)-a_1-5\sqrt{b^2+c^2}] \leqslant 0$$

矛盾!($a=1, b=\frac{1}{2}, c=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立)

例 35 设 $x,y,z,w \in \mathbf{R}^+$,且 $x+y+z+w=1$,则

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+w}}+\frac{w}{\sqrt{w+x}} < \frac{3}{2} \tag{53}$$

证 由 $x+y+z+w=1$ 知,$x+z$ 与 $y+w$ 中必有一个不大于 $\frac{1}{2}$,若 $y+w \leqslant \frac{1}{2}$, 据例 34 中式(52),有

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+w}}+\frac{w}{\sqrt{w+x}}=$$
$$\left(\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}}\right)+\left(\frac{z}{\sqrt{z+w}}+\frac{w}{\sqrt{w+x}}+\frac{x}{\sqrt{x+z}}\right)-$$
$$\left(\frac{z}{\sqrt{z+x}}+\frac{x}{\sqrt{x+z}}\right) \leqslant \frac{5}{4}(\sqrt{x+y+z}+\sqrt{z+w+x})-\sqrt{x+z}=$$
$$\frac{5}{4}(\sqrt{1-w}+\sqrt{1-y})-\sqrt{x+z} \leqslant$$
$$\frac{5}{4}\sqrt{2(2-y-w)}-\sqrt{1-y-w}$$

令 $y+w=u \leqslant \frac{1}{2}$,于是只要证

$$\frac{5}{4}\sqrt{2(2-u)}-\sqrt{1-u} \leqslant \frac{3}{2}$$

即

$$5\sqrt{2(2-u)}-4\sqrt{1-u}\leqslant 6\Leftrightarrow$$
$$50(2-u)\leqslant(6+4\sqrt{1-u})^2=52-16u+48\sqrt{1-u}\Leftrightarrow$$
$$24-24\sqrt{1-u}\leqslant 17u\Leftrightarrow$$
$$\frac{24u}{1+\sqrt{1-u}}\leqslant 17u\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{1-u}\geqslant\frac{7}{17}\Leftrightarrow$$
$$u\leqslant 1<(\frac{7}{17})^2 \qquad ①$$

因为
$$u\leqslant\frac{1}{2}<1-(\frac{7}{17})^2$$
所以式①成立.

若 $x+z\leqslant\frac{1}{2}$,则有

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+w}}+\frac{w}{\sqrt{w+x}}=(\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+w}}+\frac{w}{\sqrt{w+y}})+$$
$$(\frac{w}{\sqrt{w+x}}+\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+w}})-(\frac{y}{\sqrt{w+y}}+\frac{w}{\sqrt{y+w}})\leqslant$$
$$\frac{5}{4}(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-z})-\sqrt{y+w}$$

以下证法同上,从而式(53)获证.

例 36 (自创题,2006.12.2)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,则

$$(b+c)(c+a)(a+b)(a+b+c)\geqslant 3(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \qquad (54)$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(54)取等号.

证 将式(54)两边展开,并记 $s_1=a+b+c,s_2=bc+ca+ab$,注意到 $abc=1$,可得到

$$s_1^2s_2-3s_1^2-3s_2^2+5s_1+6s_2-6\geqslant 0 \qquad ①$$

于是,要证式(54)成立,只需要证式①成立.下面分两种情况证明式①.

i)若 $s_1\geqslant s_2$,则

式①左边 $\geqslant s_1^2s_2-3s_1^2-3s_2^2+11s_2-6=$
$(s_2-3)(s_1^2-3s_2+2)$(注意到 $s_2\geqslant 3,s_1^2\geqslant 3s_2$)$\geqslant$
0

此时,式(54)成立.

ii)若 $s_2\geqslant s_1$,则

$$式① \Leftrightarrow 3s_2^2-(s_1^2+6)s_2+(3s_1^2-5s_1+6)\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{s_1^2+6-\sqrt{\Delta}}{6}\leqslant s_2 \quad ②$$

$$s_2\leqslant \frac{s_1^2+6+\sqrt{\Delta}}{6} \quad ③$$

其中 $\Delta = s_1^4-24s_1^2+60s_1-36$.

由于

$$s_1^4-24s_1^2+60s_1-36-(s_1^2-2s_1)^2=$$
$$4s_1^3-28s_1^2+60s_1-36=$$
$$4(s_1-3)^2(s_1-1)(注意到 s_1\geqslant 3)\geqslant 0$$

得到 $\Delta\geqslant s_1^2-2s_1>0$,因此,要证式②、③成立,又只需证

$$\frac{s_1^2+6-(s_1^2-2s_1)}{6}\leqslant s_2\leqslant \frac{s_1^2+6+(s_1^2-2s_1)}{6}$$

即

$$\frac{s_1+3}{3}\leqslant s_2 \quad ④$$

$$s_2\leqslant \frac{s_1^2-s_1+3}{3} \quad ⑤$$

由 $s_2\geqslant s_1\geqslant 3$ 知式④成立,从而式②成立;下面证明式⑤成立,即证

$$s_1^2-s_1-3s_2+3\geqslant 0 \quad ⑥$$

由 $s_3=1$,$s_1^3-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$(见第一章"等价变换法证明不等式"例14),得到

$$s_2\leqslant \frac{s_1^3+9}{4s_1}$$

因此,要证式⑥只要证

$$\frac{s_1^2-s_1+3}{3}\geqslant \frac{s_1^3+9}{4s_1}\Leftrightarrow s_1^3-4s_1^2+12s_1-27\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(s_1-3)(s_1^2-s_1+9)\geqslant 0$$

由 $s_1\geqslant 3$ 易知上式成立,从而证得式⑥,故当 $s_2\geqslant s_1$ 时,式(54)也成立.

综上可知,式(54)成立,由证明过程中易知取等号条件.

注 若在式(54)中作置换:$a\to bc, b\to ca, c\to ab$,则得到

$$(b+c)(c+a)(a+b)(bc+ca+ab)\geqslant 3(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \quad (55)$$

其中,$a,b,c\in \mathbf{R}^+$,且 $abc=1$. 当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(55)取等号.

例37 (自创题,2009.04.08)在非钝角 $\triangle ABC$ 中,外接圆半径为 R,BC 为最小边,m_a,w_a,h_a 分别为 BC 边上的中线,角平分线,高线,则

$$m_aw_a+w_ah_a+m_ah_a\geqslant \frac{27}{4}R^2 \quad (56)$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时式(56)取等号.

证 设 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a, CA=b, AB=c$,面积为 Δ,则由第六章"三角几何不等式"中的式(20),有

$$m_a w_a \geqslant \frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)$$

因此

$$\begin{aligned}&m_a w_a + w_a h_a + m_a h_a \geqslant m_a w_a + 2\sqrt{m_a w_a}\cdot h_a \geqslant\\&\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c) + \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}\cdot\frac{2\Delta}{a} =\\&R^2[(\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A)+\\&4\sqrt{\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A}\cdot\sin B\sin C]\end{aligned}$$

由此可知,要证式(56),只要证

$$\begin{aligned}&4(\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A)+\\&16\sqrt{\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A}\cdot\sin B\sin C\geqslant 27\end{aligned} \quad ①$$

由于 BC 为最小边,即 $\angle A$ 最小,不妨设 $\angle C\geqslant\angle B\geqslant\angle A$,下面分两种情况来证明式①.

i)当 $\frac{\pi}{2}\geqslant\angle C\geqslant\angle B\geqslant\frac{\pi}{3}\geqslant\angle A$ 时,则有 $\sin C\geqslant\sin B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin A\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,于是

$$\begin{aligned}&4(\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A)+\\&16\sqrt{\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A}\cdot\sin B\sin C\geqslant\\&4\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]+\\&16\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=27\end{aligned}$$

故式①成立.

ii)当 $\frac{\pi}{2}\geqslant\angle C\geqslant\frac{\pi}{3}\geqslant\angle B\geqslant\angle A$ 时,由 $\frac{\pi}{2}\geqslant\angle C=\pi-\angle A-\angle B\geqslant\pi-2\angle B>0$,有 $\sin C\geqslant\sin 2B$, $\sin A\leqslant\sin B$,于是

$$\begin{aligned}&4(\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A)+\\&16\sqrt{\sin^2 B+\sin^2 C+2\sin B\sin C-\sin^2 A}\cdot\sin B\sin C\geqslant\\&4(\sin^2 2B+2\sin B\sin 2B)+16\sqrt{\sin^2 2B+2\sin B\sin 2B}\cdot\sin B\sin 2B\end{aligned}$$

由此可知,要证式(56)成立,只要证

$$4(\sin^2 2B + 2\sin B\sin 2B) + 16\sqrt{\sin^2 2B + 2\sin B\sin 2B}\cdot\sin B\sin 2B \geqslant 27 \quad ②$$

设 $\cos B = x$,则 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,这时,式②经移项、平方(去根号),并整理得到

$$-4\,096x^{10} - 4\,096x^9 + 12\,032x^8 + 11\,776x^7 - 12\,032x^6 - 11\,264x^5 + 3\,488x^4 + 2\,720x^3 + 608x^2 + 864x - 729 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$(2x-1)(-2\,048x^9 - 3\,072x^8 + 4\,480x^7 + 8\,128x^6 - 1\,952x^5 - 6\,608x^4 - 1\,560x^3 + 580x^2 + 594x + 729) \geqslant 0$$

由于 $2x-1\geqslant 0$,因此,要证式②成立,只要证当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

$$-2\,048x^9 - 3\,072x^8 + 4\,480x^7 + 8\,128x^6 - 1\,952x^5 - 6\,608x^4 - 1\,560x^3 + 580x^2 + 594x + 729 \geqslant 0 \quad ③$$

式③左边 $= 512x^5(-2x^2+1)(2x-1)^2(x+2) + 16x(-2x^2+1)^2(2x-1)(22x^2+103x+7) + 4(-2x^2+1)^2(2x-1)^2 + 2(-2x^2+1)(2x-1)(358x+271) + 121\sqrt{2}(-\sqrt{2}x+1)(2x-1) + (191-121\sqrt{2})(2x-1) \geqslant 0$

(注意到 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$) 因此,式③成立,故式②成立.

由 i)、ii)可知,式①成立,于是式(56)获证,由证明过程易知,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(56)取等号.

例 38 (自创题,2006.10.03)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$,则

$$2 + xyz \geqslant x^2y + y^2z + z^2x \quad (59)$$

当且仅当 $x=y=z=1$,或者 $x=0, y=\sqrt{2}z=\sqrt{2}$,或者 $y=0, z=\sqrt{2}x=\sqrt{2}$,或者 $z=0, x=\sqrt{2}y=\sqrt{2}$ 时,式(59)取等号.

证 因为当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时,有

$$x^2y + y^2z + z^2x - (xy^2 + yz^2 + zx^2) = (x-y)(y-z)(x-z) \geqslant 0$$

所以要证式(59),只需证在 $x\geqslant y\geqslant z$ 情况下成立即可.

又因为

$$\begin{aligned}2 + xyz - x^2y - y^2z - z^2x &= 2 - y(x^2+z^2) + xyz + y(x^2+z^2) - x^2y - y^2z - z^2x = \\ &2 - y(x^2+z^2) + z(x-y)(y-z) \geqslant \\ &2 - y(x^2+z^2)\end{aligned}$$

所以又只需证

$$2 \geqslant y(x^2 + z^2) \qquad ①$$

因为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3$$

所以要证式 ①,只需证

$$2 \geqslant y(3 - y^2) \Leftrightarrow y^3 - 3y + 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$(y-1)^2(y+2) \geqslant 0$$

由此可知,式 ① 成立,从而式(59) 获证. 由证明过程可知,当且仅当 $x = y = z = 1$,或者 $x = 0, y = \sqrt{2}z = \sqrt{2}$,或者 $y = 0, z = \sqrt{2}x = \sqrt{2}$,或者 $z = 0, x = \sqrt{2}y = \sqrt{2}$ 时,式(59) 取等号.

例 39 (自创题,2007. 09. 09) 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a + b + c = 2$,则

$$\sum b^3c^3 + \frac{537}{64}(abc)^3 \leqslant 1 \qquad (60)$$

当且仅当 a,b,c 中有一个为零,其余两个均等于 1 时,式(60) 取等号.

证 不妨设 c 最小,则 $0 \leqslant c \leqslant \frac{2}{3}$,则

$$1 - \sum b^3c^3 - \frac{537}{64}(abc)^3 = 1 - (ab)^3 - c^3(a^3 + b^3) - \frac{537}{64}(abc)^3 =$$

$$1 - (ab)^3 - c^3(a+b)^3 + 3abc^3(a+b) - \frac{537}{64}(abc)^3 =$$

$$1 - (ab)^3 - c^3(2-c)^3 - \frac{153}{128}abc^3(2-c) + \frac{537}{128}abc^3[(2-c) - 2(ab)^2] \geqslant$$

$$1 - (\frac{a+b}{2})^6 - c^3(2-c)^3 - \frac{153}{128} \cdot (\frac{a+b}{2})^2 \cdot c^3(2-c) +$$

$$\frac{537}{128}abc^3[(2-c) - \frac{(2-c)^4}{8}] \geqslant$$

$$1 - (1 - \frac{c}{2})^6 - c^3(2-c)^3 - \frac{153}{512}c^3(2-c)^3 =$$

(注意到 $2 - c \geqslant 0, 1 - \frac{(2-c)^3}{8} \geqslant 0$)

$$1 - (1 - \frac{c}{2})^6 - \frac{665}{512}c^3(2-c)^3 =$$

$$c(3 - \frac{15}{4}c - \frac{505}{64}c^2 + \frac{1\ 875}{128}c^3 - \frac{1\ 947}{256}c^4 + \frac{657}{512}c^5) =$$

$$c(1 - \frac{3}{2}c)(3 + \frac{3}{4}c - \frac{433}{64}c^2 + \frac{9}{2}c^3 - \frac{219}{256}c^4) =$$

$$c(1 - \frac{3}{2}c)^2(3 + \frac{21}{4}c + \frac{71}{64}c^2 + \frac{789}{128}c^3) + \frac{537}{64}c^5(1 - \frac{3}{2}c) \geqslant$$

$$0$$

故式(60)成立. 由上证明易知式(60)取等号条件.

由式(60)可推出:设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=2$,则

$$\sum\frac{1}{1+a^3}\leqslant 1$$

当且仅当 a,b,c 中有一个为零,其余两个均等于1时取等号.

这时很自然提出一个问题:设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=2$,求 λ 的最大值,使

$$\sum b^3c^3+\lambda(abc)^3\leqslant 1$$

成立.

例40 (自创题,2007.02.28)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$27\left(\sum x^3\right)^2\geqslant\left(\sum x\right)^4\cdot\sum(-x+y+z)^2\tag{61}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,(61)式取等号.

证

$$\begin{aligned}
&27\left(\sum x^3\right)^2-\left(\sum x\right)^4\cdot\sum(-x+y+z)^2=\\
&3\left(3\sum x^3-\sum x\cdot\sum x^2+\sum x\cdot\sum x^2\right)^2-\\
&\left(\sum x\right)^2\left(\sum x^2+2\sum yz\right)\cdot\left(3\sum x^2-2\sum yz\right)=\\
&3\left(3\sum x^3-\sum x\cdot\sum x^2\right)^2+6\sum x\cdot\sum x^2\cdot\left(3\sum x^3-\sum x\cdot\sum x^2\right)+\\
&3\left(\sum x\right)^2\cdot\left(\sum x^2\right)^2-\left(\sum x\right)^2\left(\sum x^2+2\sum yz\right)\left(3\sum x^2-2\sum yz\right)\geqslant\\
&6\sum x\cdot\sum x^2\cdot\sum(y+z)(y-z)^2-2\left(\sum x\right)^2\cdot\sum yz\cdot\sum(y-z)^2=\\
&2\sum x\cdot\sum\left[3(y+z)(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)(yz+zx+xy)\right](y-z)^2=\\
&2\sum x\cdot\sum\left[2(y+z)x^2-x(y+z)^2-xyz+3(y+z)(y^2+z^2)-yz(y+z)\right]\cdot\\
&(y-z)^2\geqslant\\
&2\sum x\cdot\sum\left[2(y+z)x^2-\frac{5}{4}x(y+z)^2+\frac{3}{2}(y+z)^3-\frac{1}{4}(y+z)^3\right](y-z)^2=\\
&2\sum x\cdot\sum(y+z)\left[2x^2-\frac{5}{4}x(y+z)+\frac{5}{4}(y+z)^2\right](y-z)^2\geqslant\\
&0
\end{aligned}$$

注 1. 在式(61)中,令 $x=\dfrac{b+c}{2},y=\dfrac{c+a}{2},z=\dfrac{a+b}{2}$,则得到下列命题.

命题1 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,且 $b+c,c+a,a+b\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$27\left[\sum(b+c)^3\right]^2\geqslant 64\sum a^2\cdot\left(\sum a\right)^4\tag{62}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时,式(62)取等号.

2. 在本章例 17 中,取 $n = 2$,有:

设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$8(\sum a^3)^2 \geqslant 3\sum (b^2 + c^2)^3 \tag{63}$$

因此,由(62)、(63) 两式即得下面命题.

命题 2 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$3(\sum a^3)^4 \geqslant \sum a^4 \cdot (\sum a^2)^4 \tag{64}$$

当且仅当 $a = b = c$ 时,式(64) 取等号.

3. 我们又一次有理由提出以下猜想.

猜想 设 $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-}(i = 1,2,3,\cdots,m)$,$m,n$ 为正整数,且 $n \geqslant m \geqslant 2$,则

$$m(\sum_{i=1}^{m} a_i^n)^{n+1} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^{n+1} \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_i^{n-1})^{n+1}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ 时取等号.

注 此猜想在本章例 6 中已给出,即式(5).

例 41 设 $0 \leqslant a,b,c \leqslant 1$,则

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} + (1-a)(1-b)(1-c) \geqslant \frac{7}{8} \tag{65}$$

当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{2}$ 时,式(65) 取等号.

题源:2006 年 12 月 5 日于晓强(大学生) 电邮笔者时提出的问题.

以下解答由“天涯黎建平” 于 2007 年 2 月 26 日在“中国不等式研究小组网站” 上“竞赛不等式” 专栏中提供的思路,本人作了详细解答.

证

式(65) 左边 - 右边 $= \sum \frac{a}{b+c+1} + 1 - \sum a + \sum bc - abc - \frac{7}{8} =$

$(\frac{1}{2}\sum bc - \frac{3}{4}\sum a + \sum \frac{a}{b+c+1}) + (\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\sum a + \frac{1}{2}\sum bc - abc) =$

$[\frac{1}{4}\sum a(b+c+1) - \sum a + \sum \frac{a}{b+c+1}] + (\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c) =$

$\sum \frac{a(b+c+1-2)^2}{4(b+c+1)} + (\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c) =$

$\sum \frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)} + (\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)$

由此知,要证式(65) 成立,只需证

$$\sum \frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)} + (\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c) \geqslant 0 \quad ①$$

下面分两种情况证明.

i）若$(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)\geqslant 0$，则式①显然成立，当且仅当$a=b=c=\frac{1}{2}$时取等号.

ii）若$(\frac{1}{2}-a)(\frac{1}{2}-b)(\frac{1}{2}-c)<0$，即$(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})>0$，由对称性，不妨设$\frac{1}{2}-a\leqslant\frac{1}{2}-b\leqslant\frac{1}{2}-c$，下面再分两种情况证之.

i）若$a-\frac{1}{2}\geqslant b-\frac{1}{2}\geqslant c-\frac{1}{2}>0$，则

$$a\geqslant 2(a-\frac{1}{2})\geqslant 0,\ (b+c-1)^2\geqslant 4(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})>0$$

所以
$$\frac{a(b+c-1)^2}{4}\geqslant 2(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

又
$$b+c+1\leqslant 3$$

所以
$$\frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)}\geqslant\frac{2}{3}(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

注意到以上诸式取等号条件可知，上式等号不可能取到，因此

$$\frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)}>\frac{2}{3}(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

同理还可以得到另外两式，将此三式左右分别相加，得到

$$\sum\frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)}>2(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})\geqslant (a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

即得式①.

ii）若$a-\frac{1}{2}>0>b-\frac{1}{2}\geqslant c-\frac{1}{2}$，则

$$a\geqslant 2(a-\frac{1}{2}),\ (b+c-1)^2\geqslant 4(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

又
$$b+c+1\leqslant 2$$

所以
$$\frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)}>(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

因此
$$\sum\frac{a(b+c-1)^2}{4(b+c+1)}>(a-\frac{1}{2})(b-\frac{1}{2})(c-\frac{1}{2})$$

也得到式①.

综上，式(65)获证，当且仅当$a=b=c=\frac{1}{2}$时取等号.

注 福建陈胜利老师提出:条件可放宽为 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $abc\leqslant 1$,式(65)仍成立,但未给出证明.

例 42 (自创题,2007.02.10) 设 $a,b,c\in[m,M](M>m>0)$,则

$$\prod(b+c)\geqslant\frac{(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}\cdot\left|\prod(b-c)\right| \tag{66}$$

当且仅当 a,b,c(可任意排列) 分别取 $M,\sqrt{Mm},m$ 时,式(66) 取等号.

证 当 a,b,c 中有两个相等时,式(66) 显然成立. 今设 a,b,c 互不相等,由于式(66) 为对称不等式,不妨设 $m\leqslant c<b<a\leqslant M$,记

$$\lambda=\frac{(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}$$

则式(66) 可改写为

$$f(c)=[(a+b)-\lambda(a-b)]c^2+[(a+b)^2+\lambda(a^2-b^2)]c+ab[(a+b)-\lambda(a-b)]\geqslant 0 \quad ①$$

下面分两种情况证明式 ① 成立.

ⅰ) 若 $a+b>\lambda(a-b)$(由已知条件可知,$a+b\neq\lambda(a-b)$),式 ① 显然成立.

ⅱ) 若 $\lambda(a-b)>a+b$,即 $(\lambda-1)a>(\lambda+1)b$,则 $f(c)$ 可视为 c 的二次函数. 由于此二次函数的二次项系数小于零,其图象为开口向下的抛物线;又 $m\leqslant c\leqslant b\leqslant a\leqslant M$,因此,如果我们能证明 $f(m)\geqslant 0$,且 $f(M)\geqslant 0$,则式 ① 成立.

先证 $f(m)\geqslant 0$,这时

$$\begin{aligned}f(m)&=[(a+b)-\lambda(a-b)]m^2+[(a+b)^2+\lambda(a^2-b^2)]m+\\&\quad ab[(a+b)-\lambda(a-b)]=[(\lambda+1)a-(\lambda-1)m]b^2-\\&\quad[(\lambda-1)a^2-2ma-(\lambda+1)m^2]b+\\&\quad ma[(\lambda+1)a-(\lambda-1)m]\end{aligned}$$

上式又可看做是关于 b 的二次三项式,由 $a>m,\lambda>0$ 知

$$(\lambda+1)a-(\lambda-1)m>0$$

因此,要证 $f(m)\geqslant 0$,只要证关于 b 的二次三项式的判别式 $\Delta_b\leqslant 0$,这时

$$\begin{aligned}\Delta_b&=[(\lambda-1)a^2-2ma-(\lambda+1)m^2]^2-4ma[(\lambda+1)a-(\lambda-1)m]^2=\\&\quad[(\lambda-1)a^2-2ma-(\lambda+1)m^2+2(\lambda+1)\sqrt{ma}a-2(\lambda-1)\sqrt{ma}m]\cdot\\&\quad[(\lambda-1)a^2-2ma-(\lambda+1)m^2-2(\lambda+1)\sqrt{ma}a+2(\lambda-1)\sqrt{ma}m]=\\&\quad\{[(\lambda-1)a-(\lambda+1)m](\sqrt{a}-\sqrt{m})^2+4\lambda\sqrt{ma}(a-m)\}\cdot\\&\quad[\lambda(a-m)(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2-(a+m)(\sqrt{a}+\sqrt{m})^2]\end{aligned}$$

因为

$$(\lambda-1)a>(\lambda+1)b>(\lambda+1)m$$

所以 $$(\lambda-1)a-(\lambda+1)m>0$$
又 $$a-m>0$$
所以 $[(\lambda-1)a-(\lambda+1)m](\sqrt{a}-\sqrt{m})^2+4\lambda\sqrt{ma}(a-m)>0$

因此,要证 $\Delta_b\leqslant 0$,只需证

$$\lambda(a-m)(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2-(a+m)(\sqrt{a}+\sqrt{m})^2\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}\cdot(a-m)(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2-(a+m)(\sqrt{a}+\sqrt{m})^2\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(a+m)(\sqrt{a}+\sqrt{m})^2\cdot(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2-(a-m)(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2\cdot(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2\geqslant 0 \quad ②$$

式②左边 $=[(aM-m^2)+m(M-a)](\sqrt{a}+\sqrt{m})^2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2-$
$[(aM-m^2)-m(M-a)](\sqrt{M}+\sqrt{m})^2(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2=$
$(aM-m^2)[(\sqrt{a}+\sqrt{m})^2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2-$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2]+$
$m(M-a)[(\sqrt{a}+\sqrt{m})^2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2+$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2(\sqrt{a}-\sqrt{m})^2]\geqslant$
$(aM-m^2)[(\sqrt{a}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{m})+$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{a}-\sqrt{m})]\cdot$
$[(\sqrt{a}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{m})-(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{a}-\sqrt{m})]$
(注意 $M-a\geqslant 0$) $=$
$2\sqrt{m}(aM-m^2)(\sqrt{M}-\sqrt{a})\cdot[(\sqrt{a}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{m})+$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{m})]\geqslant 0$

(注意到 $a>m,M>m,M\geqslant a$) 因此式②成立,$\Delta_b\leqslant 0$,从而有 $f(m)\geqslant 0$.

再证 $f(M)\geqslant 0$. 同上方法,有

$f(M)=[(a+b)-\lambda(a-b)]M^2+[(a+b)^2+\lambda(a^2-b^2)]M+$
$ab[(a+b)-\lambda(a-b)]=$
$[(\lambda+1)M-(\lambda-1)b]a^2-[(\lambda-1)M^2-2bM-(\lambda+1)b^2]a+$
$bM[(\lambda+1)M-(\lambda-1)b]$

上式又可看做是关于 a 的二次三项式,由 $M>b$,知 $(\lambda+1)M-(\lambda-1)b>0$,因此,要证 $f(M)\geqslant 0$,只要证关于 a 的二次三项式的判别式 $\Delta_a\leqslant 0$. 这时

$\Delta_a=[(\lambda-1)M^2-2bM-(\lambda+1)b^2]^2-4bM[(\lambda+1)M-(\lambda-1)b]^2=$
$[(\lambda-1)M^2-2bM-(\lambda+1)b^2+2(\lambda+1)\sqrt{bM}M-2(\lambda-1)\sqrt{bM}b]\cdot$
$[(\lambda-1)M^2-2bM-(\lambda+1)b^2-2(\lambda+1)\sqrt{bM}M+2(\lambda-1)\sqrt{bM}b]=$

$$\{[(\lambda-1)M-(\lambda+1)b]\cdot(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2+4\lambda\sqrt{Mb}(M-b)\}\cdot$$
$$[\lambda(M-b)(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2-(M+b)(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2]$$

因为
$$(\lambda-1)M\geqslant(\lambda-1)a>(\lambda+1)b$$
所以
$$(\lambda-1)M-(\lambda+1)b>0$$
又
$$M-b>0$$
所以$[(\lambda-1)M\cdot(\lambda+1)b]\cdot(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2+4\lambda\sqrt{Mb}(M-b)>0$,因此,要证$\Delta_a\leqslant 0$,只需证

$$\lambda(M-b)(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2-(M+b)(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\frac{(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}\cdot(M-b)(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2-(M+b)(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2\leqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(M+b)(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2\cdot(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2-(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2\cdot$$
$$(M-b)(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2\geqslant 0 \qquad ③$$

式③左边 $=[(M^2-bm)+M(b-m)]\cdot(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2-$
$[(M^2-bm)-M(b-m)]\cdot(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2=$
$(M^2-bm)[(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2-$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2]+$
$M(b-m)[(\sqrt{M}+\sqrt{b})^2(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2+$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2(\sqrt{M}-\sqrt{b})^2]\geqslant$
$(M^2-bm)[(\sqrt{M}+\sqrt{b})(\sqrt{M}-\sqrt{m})+$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{b})]\cdot$
$[(\sqrt{M}+\sqrt{b})(\sqrt{M}-\sqrt{m})-(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{b})]$
(注意到$b>m$) $=$
$2\sqrt{M}(M^2-bm)(\sqrt{b}-\sqrt{m})\cdot[(\sqrt{M}+\sqrt{b})(\sqrt{M}-\sqrt{m})+$
$(\sqrt{M}+\sqrt{m})(\sqrt{M}-\sqrt{b})]>0$

(注意到$b>m,M>m,M>b$)因此式③成立,$\Delta_a<0$,从而有$f(M)>0$.

综上,得到$f(c)\geqslant 0$,即式①成立.从而式(66)获证,由上证明中知,式②当且仅当$a=M$时取等号,这时$\Delta_b=0$,由$f(c)=f(m)=0$得到$b=\sqrt{Mm}$,因此,当且仅当$a=M,b=\sqrt{Mm},c=m$时,式(66)取等号.

例43 (自创题,2007.03.05)设$a,b,c,d\in\mathbf{R}^-$,且$a^4+b^4+c^4+d^4=4$,则

$$(bcd)^5+(acd)^5+(abd)^5+(abc)^5\leqslant 4 \qquad (67)$$

当且仅当$a=b=c=d=1$时,式(67)取等号.

证 令 $a^4=x,b^4=y,c^4=z,d^4=w$,且 $x+y+z+w=4$,则

$$4\sum(bcd)^5=4\sum(yzw\cdot y^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}w^{\frac{1}{4}})\leqslant\sum yzw(y+z+w+1)=$$
$$\sum x\cdot\sum yzw-4xyzw+\sum yzw=$$
$$\sum x\cdot\sum yzw-4xyzw+\frac{1}{4}\sum x\cdot\sum yzw=$$
$$\frac{5}{4}\sum x\cdot\sum yzw-4xyzw$$

因此,要证式(67)成立,只要证

$$\frac{5}{4}\sum x\cdot\sum yzw-4xyz\leqslant\frac{1}{16}(\sum x)^4$$

即

$$(\sum x)^4-20\sum x\cdot\sum yzw+64xyzw\geqslant0 \qquad ①$$

由于$(\sum yz)^2-3\sum x\cdot\sum yzw+12xyzw\geqslant0$(见《中学数学教学》(安徽),2007 年第 2 期,杨学校文:"从一道不等式题谈起"),因此

$$(\sum x)^4-20\sum x\cdot\sum yzw+64xyzw\geqslant$$
$$(\sum x)^4-20\sum x\cdot\sum yzw+\frac{16[-(\sum yz)^2+3\sum x\cdot\sum yzw]}{3}=$$
$$\frac{1}{3}[3(\sum x)^4-12\sum x\cdot\sum yzw-16(\sum yz)^2]=$$
$$\frac{1}{3}[\frac{3}{4}(\sum x)^4-12\sum x\cdot\sum yzw]+\frac{1}{3}[\frac{9}{4}(\sum x)^4-16(\sum yz)^2]=$$
$$\frac{1}{4}[(\sum x)^4-16\sum x\cdot\sum yzw]+\frac{1}{3}[\frac{3}{2}(\sum x)^2+4\sum yz]\cdot$$
$$[\frac{3}{2}(\sum x)^2-4\sum yz]\geqslant0$$

故式①成立,从而式(67)获证.

注 由以上证法可得更一般的以下猜想.

猜想 1 设 $x_i\in\overline{\mathbf{R}^-},i=1,2,\cdots,n$,且 $\sum_{i=1}^{n}x_i^n=n$,则

$$(x_2x_3\cdots x_n)^{n+1}+(x_1x_3\cdots x_n)^{n+1}+\cdots+(x_1x_2\cdots x_{n-1})^{n+1}\leqslant n \qquad (68)$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,式(68)取等号.

猜想 2 设 $x_i\in\overline{\mathbf{R}^-},i=1,2,\cdots,2n$,且 $\sum_{i=1}^{2n}x_i^n=2n$,则

$$(x_2x_3\cdots x_{2n})^{n+1}+(x_1x_3\cdots x_{2n})^{n+1}+\cdots+(x_1x_2\cdots x_{2n-1})^{n+1}\leqslant 2n \qquad (69)$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_{2n}$ 时,式(69)取等号.

例 44 （自创题,07.03.03）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=3$,则

$$(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\geqslant 8 \tag{70}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,式(70) 取等号.

证 当 a,b,c 中有一数不小于2时,式(70) 显然成立. 因此我们只需讨论, a,b,c 均小于 2 时,式(70) 成立即可.

由已知 $a+b+c=3$,可设 $\frac{b+c}{2}\leqslant 1,1\leqslant a\leqslant 2$. 我们先证明

$$(1+b^3)(1+c^3)\geqslant [1+(\frac{b+c}{2})^3]^2 \tag{①}$$

又

式 ①$\Leftrightarrow 1+(b+c)^3-3bc(b+c)+(bc)^3\geqslant[1+(\frac{b+c}{2})^3]^2\Leftrightarrow$

$$(\frac{b+c}{2})^6-6(\frac{b+c}{2})^3+6bc\cdot\frac{b+c}{2}-(bc)^3\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$[(\frac{b+c}{2})^2-bc][(\frac{b+c}{2})^4+bc(\frac{b+c}{2})^2-6(\frac{b+c}{2})+(bc)^2]\leqslant 0 \tag{②}$$

因为

$$\frac{b+c}{2}\leqslant 1$$

所以

$$(\frac{b+c}{2})^4+bc(\frac{b+c}{2})^2-6(\frac{b+c}{2})+(bc)^2\leqslant$$

$$(\frac{b+c}{2})^4+(\frac{b+c}{2})^4-6(\frac{b+c}{2})+(\frac{b+c}{2})^4=$$

$$3\cdot\frac{b+c}{2}[(\frac{b+c}{2})^3-2]<0$$

即式 ② 成立,从而式 ① 成立.

于是,要证式(70) 成立,只需证在 $\frac{b+c}{2}\leqslant 1,1\leqslant a<2$ 情况下,有

$$(1+a^3)[1+(\frac{b+c}{2})^3]^2\geqslant 8 \tag{③}$$

为以下计算方便,设 $\frac{3-a}{2}=x$,由 $1\leqslant a<2$ 知 $\frac{1}{2}<x\leqslant 1$,于是

式 ③ 左边 - 右边 $=(1+a)^3[1+(\frac{b+c}{2})^3]-8=$

$[1+(3-2x)^3](1+x^3)^2-8=$

$-2(4x^9-18x^8+27x^7-6x^6-36x^5+54x^4-24x^3-18x^2+27x-10)=$

$-2(x-1)^2(4x^7-10x^6+3x^5+10x^4-19x^3+6x^2+7x-10)=$

$-2(x-1)^2[2x^5(x-1)(2x-1)-x^3(x-1)^2(4x+7)-3x^2(4x-1)+$

$(x-1)(3x+10)]\geqslant 0$

即式③成立,从而式(70)获证.

注 1. 实际上在对式③的证明时,x 只须满足 $0\leqslant x\leqslant 1$ 即可,因为有

$$4x^7-10x^6+3x^5+10x^4-19x^3+6x^2+7x-10=$$
$$(4x^7-10x^6)+(3x^5+10x^4-16x^3)-3x(x-1)^2+$$
$$10(x-1)\leqslant 0$$

2. 猜想:$a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,记 $\lambda=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\leqslant 1$,$m\geqslant n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^m)\geqslant(1+\lambda^m)^n \tag{71}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,式(71)取等号.

例 45 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=1$,则

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\geqslant 2 \tag{72}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时,式(72)取等号.

证一 因为

$$4(a+b+c)^2(bc+c^2+ca+a^2)(ca+a^2+ab+b^2)-$$
$$(2a^3+3a^2c+3c^2a+2a^2b+2bc^2+4ca^2+2ab^2+6abc)^2=$$
$$ab(c-a)^2(4a^2+4b^2+c^2+8ca+4ab)+$$
$$bc(a-b)^2(4b^2+3bc+11ca)+ca(b-c)^2$$
$$(4a^2+12b^2+4c^2+11bc+7ca+4ab)\geqslant 0$$

所以

$$2\sum\sqrt{bc+c^2+ca+a^2}\sqrt{ca+a^2+ab+b^2}\geqslant$$
$$\sum\frac{2a^3+3a^2c+3c^2a+2a^2b+3bc^2+4ca^2+2ab^2+6abc}{a+b+c}=$$
$$2\sum a^2+6\sum bc$$

所以 $(\sum\sqrt{a+b^2})^2=(\sum\sqrt{a^2+ab+ac+b^2})^2\geqslant 4(\sum a)^2$

即得式(72).(抄录自 http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=140387)

证二 在 a,b,c 中不妨设 c 最小,先证

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}\geqslant\sqrt{c+b^2}+1-c \tag{①}$$

$$\text{式①}\Leftrightarrow a+b^2+b+c^2+2\sqrt{a+b^2}\cdot\sqrt{b+c^2}\geqslant$$
$$c+b^2+1-2c+c^2+2(1-c)\sqrt{c+b^2}\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{a+b^2}\cdot\sqrt{b+c^2}\geqslant(1-c)\sqrt{c+b^2}\Leftrightarrow$$

$$(a^2+ab+ac+b^2)(ab+b^2+bc+c^2)\geqslant$$
$$(a+b)^2(ac+bc+c^2+b^2) \qquad ②$$

要证式①成立,只要证式②成立,即

$$\text{式②左边}-\text{右边}=(a^2+ab+ac+b^2)(ab+b^2+bc+c^2)-(a+b)^2(ac+bc+c^2+b^2)=a^3b+a^2b^2+ac^3-a^3c-a^2bc-ab^2c=a(a-c)(b-c)(a+b+c)\geqslant 0$$

(注意我们所设 a,b,c 中,c 最小)故式②成立,从而式①成立.再证

$$\sqrt{c+a^2}+\sqrt{c+b^2}\geqslant 1+c \qquad ③$$

$$\text{式③}\Leftrightarrow c+a^2+c+b^2+2\sqrt{c+a^2}\cdot\sqrt{c+b^2}\geqslant 1+2c+c^2\Leftrightarrow$$
$$a^2+b^2+2\sqrt{c+a^2}\cdot\sqrt{c+b^2}\geqslant(a+b+c)^2+c^2\Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{c+a^2}\cdot\sqrt{c+b^2}\geqslant 2(c^2+ac+bc+ab)\Leftrightarrow$$
$$(ac+bc+c^2+a^2)(ac+bc+c^2+b^2)\geqslant(c^2+ac+bc+ab)^2$$

由柯西不等式易证上式成立,事实上有

$$(c^2+ac+bc+a^2)(c^2+ac+bc+b^2)\geqslant(c^2+ac+bc+ab)^2$$

因此式③成立.

式①+③即得原式.(抄录自 http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?t=106782 上的解答)

注 1. 式③的另一证法

$$\text{式③}\Leftrightarrow c+a^2+c+b^2+2\sqrt{c+a^2}\cdot\sqrt{c+b^2}\geqslant 1+2c+c^2\Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{c+a^2}\cdot\sqrt{c+b^2}\geqslant 1+c^2-a^2-b^2=2(c+ab)$$

由柯西不等式易知上式成立,故式③成立.

2. 由上证一可得以下命题.

命题1 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=1$ 则

$$\sum\sqrt{b+c^2}\sqrt{c+a^2}\geqslant\sum(b+c)(c+a) \qquad (73)$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时,式(73)取等号.

3. 由证二分别得到了以下两式

$$\sqrt{a+b^2}\cdot\sqrt{b+c^2}\geqslant(1-c)\sqrt{c+b^2}$$
$$\sqrt{c+a^2}\cdot\sqrt{c+b^2}\geqslant(c+a)(c+b)$$

其中,$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=1$,于是可得以下命题.

命题2 设$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且$a+b+c=1$,则

$$(a+b^2)(b+c^2)(c+a^2)\geqslant(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2 \tag{74}$$

当且仅当$a=b=c$时,式(74)取等号.

4. 本题参见第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter8题69.

例46 (2007.05.10,福建陈胜利提出的猜想)设$a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$,则

$$\sum_{i=1}^n a_i\cdot\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\geqslant n^2+\frac{4(n-1)\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2}{(\sum\limits_{i=1}^n a_i)^2} \tag{75}$$

当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$,或$a_1,a_2,\cdots,a_n$中有一个等于$\frac{1}{2}$,其余$n-1$个都等于$\frac{1}{2(n-1)}$时,式(75)取等号.

证 由对称性,不妨设$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k$,记$s=\sum\limits_{i=1}^n a_i$,那么,式(75)等价于

$$s^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{(a_i-a_j)^2}{a_ia_j}-4(n-1)\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum_{1\leqslant t<k\leqslant n-1}[s^2\sum_{i=1}^t\frac{1}{a_i}\sum_{i=k+1}^n\frac{1}{a_i}-4t(n-1)(n-k)](a_t-a_{t+1})(a_k-a_{k+1})\geqslant 0 \quad ①$$

因此,要证式(75)成立,只要证式①成立.

由$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,易证式①中每一项均不小于零.事实上因为

$$s^2=(a_1+a_2+\cdots+a_t+a_{t+1}+\cdots+a_k+a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_n)^2\geqslant$$

$$(\sum_{i=1}^t a_i+\frac{n-t}{n-k}\sum_{i=k+1}^n a_i)^2\geqslant\frac{4(n-t)}{n-k}\sum_{i=1}^t a_i\sum_{i=k+1}^n a_i$$

(t,k为正整数,且$1\leqslant t\leqslant k\leqslant n-1$)所以

$$[s^2\sum_{i=1}^t\frac{1}{a_i}\sum_{i=k+1}^n\frac{1}{a_i}-4t(n-1)(n-k)](a_t-a_{t+1})(a_k-a_{k+1})\geqslant$$

$$[\frac{4(n-t)}{n-k}\sum_{i=1}^t a_i\sum_{i=k+1}^n a_i\cdot\sum_{i=1}^t\frac{1}{a_i}\sum_{i=k+1}^n\frac{1}{a_i}-4k(n-1)(n-k)]\cdot$$

$$(a_t-a_{t+1})(a_k-a_{k+1})\geqslant$$

$$[\frac{4(n-t)}{n-k}\cdot t^2\cdot(n-k)^2-4t(n-1)(n-k)](a_t-a_{t+1})(a_k-a_{k+1})=$$

$$4t(t-1)(n-k)(n-t-1)\geqslant 0$$

($t,k=1,2,\cdots,n-1,1\leqslant t\leqslant k\leqslant n-1$)故式①成立.式(75)获证.由以上证明过程易得取等号条件.

注　1. 由原命题得到：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+$，记 $s_1=\sum_{i=1}^{n}a_i,s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j,s_n=a_1a_2\cdots a_n$，则

$$\frac{s_1s_{n-1}}{s_n}+\frac{8n(n-1)s_2}{s_1^2}\geqslant 5n^2-8n+4 \tag{76}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，或 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有一个等于 $\frac{1}{2}$，其余 $n-1$ 个都等于 $\frac{1}{2(n-1)}$ 时，式(76)取等号.

2. 上式与第四章“应用基本不等式证明不等式”中例8中的 n 元推广式不分强弱.

例47　(2007年乌克兰竞赛题) 记 $a,b,c>0$，且 $abc\geqslant 1$，则

ⅰ)

$$\prod\left(a+\frac{1}{a+1}\right)\geqslant\frac{27}{8} \tag{77}$$

ⅱ)

$$27\prod(a^3+a^2+a+1)\geqslant 64\prod(a^2+a+1) \tag{78}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，以上(77)、(78)两式均取等号.

简证　ⅰ) 由于

$$2(a^2+a+1)^2-9a(a^2+1)=(a-1)^2(2a^2-a+2)\geqslant 0$$

另外还有类似两式，因此

$$\prod(a^2+a+1)^2\geqslant\left(\frac{9}{2}\right)^3abc\prod(a^2+1)\geqslant\left(\frac{9}{4}\right)^3\prod(a+1)^2$$

即

$$\prod(a^2+a+1)\geqslant\frac{27}{8}\prod(a+1)$$

即得式(77).

ⅱ) 由于

$$9(a^3+a^2+a+1)^2-16a(2a^2+1)(a^2+2)=$$
$$(a-1)^2(9a^4+4a^3+26a^2+4a+9)\geqslant 0$$

另外还有类似两式，因此

$$\begin{aligned}9^3\prod(a^3+a^2+a+1)^2&\geqslant 16^3abc\prod(2a^2+1)(a^2+2)\geqslant\\&16^3\prod(a^2+a^2+1)(a^2+1+1)\geqslant\\&16^3\prod(a^2+a+1)^2\end{aligned}$$

即得式(78).

注　可证对于任意正数 a，有

$$n(a^n+a^{n-1}+\cdots+a+1)\geqslant(n+1)\sqrt{a}(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)$$

由此,原题可推广为如下命题.

命题 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a_1a_2\cdots a_n\geqslant 1$,则

$$n^n\prod_{i=1}^{n}(a_i^n+a_i^{n-1}+\cdots+a_i+1)\geqslant(n+1)^n\prod_{i=1}^{n}(a_i^{n-1}+a_i^{n-2}+\cdots+a+1)$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号.

例 48 (改编题,2007.09.28) 设 $a_i,b_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n,n$ 为奇数,又 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leqslant\min\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^k,k=1,2,\cdots,n-1$,则

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leqslant\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$$

证 记$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的初等对称式(即在这 n 个数中,每次不重复地取出 $k(k=1,2,\cdots,n)$ 个乘积之和为 A_k,下同),$B_1,B_2,\cdots,B_n$ 为 b_1, $b_2,\cdots,b_n$ 的初等对称式,那么,由已知条件 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^k=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^k(k=1,2,\cdots,n-1)$,易知有 $A_i=B_i(i=1,2,\cdots,n-1)$. 另外,记

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a_i),g(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-b_i)$$

且不妨设 $a_1=\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,则当 x 为任意实数时,总有

$$f(x)-g(x)=-a_1a_2\cdots a_n+b_1b_2\cdots b_n\quad(n\text{ 为奇数})$$

因此,当 $k=2,3,\cdots,n$ 时,都有

$$g(a_1)-g(a_k)=f(a_1)-f(a_k)=0$$

即

$$\prod_{i=1}^{n}(a_1-b_i)-\prod_{i=1}^{n}(a_k-b_i)=0\quad(k=2,3,\cdots,n)$$

由 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leqslant\min\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$,$n$ 为奇数,可知

$$\prod_{i=1}^{n}(a_1-b_i)\leqslant 0$$

因此

$$\prod_{i=1}^{n}(a_k-b_i)\leqslant 0\quad(k=2,3,\cdots,n,i=1,2,\cdots,n)$$

故在 $a_k-b_i(k=2,3,\cdots,n,i=1,2,\cdots,n)$ 中必有一个不大于零,也就是,在 b_1, $b_2,\cdots,b_n$ 中至少有一个不小于 $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,由此,必然有

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\leqslant\max\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$$

证毕.

注 当 $n=3$ 时,由例 49 中 $a_1\leqslant b_1$,已证得 $a_3\leqslant b_3$,因此必有 $a_2\geqslant b_2$,于是,我们可得到以下命题.

命题 设 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbf{R}$,且 $a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3,a_1^2+$

$a_2^2+a_3^2=b_1^2+b_2^2+b_3^2$,若 $a_1\leqslant a_2\leqslant a_3$,$b_1\leqslant b_2\leqslant b_3$,则

ⅰ)$|a_2-b_2|\geqslant|a_1-b_1|$;

ⅱ)$|a_2-b_2|\geqslant|a_3-b_3|$.

提示:不妨设 $a_1\leqslant b_1$,则 $a_3\leqslant b_3$,于是有 $a_2\geqslant b_2$,因此

ⅰ)

$$|a_2-b_2|\geqslant|a_1-b_1|\Leftrightarrow a_2-b_2\geqslant b_1-a_1\Leftrightarrow a_1+a_2\geqslant b_1+b_2\Leftrightarrow b_3\geqslant a_3$$

ⅱ)

$$|a_2-b_2|\geqslant|a_3-b_3|\Leftrightarrow a_2-b_2\geqslant b_3-a_3\Leftrightarrow a_2+a_3\geqslant b_2+b_3\Leftrightarrow b_1\geqslant a_1$$

练　习

第八章

1. （自创题，1996.03.05）$\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c，则

$$\sum \frac{a}{b+c} \geqslant \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{a-c}{b}\right)^2$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，原式取等号.

2. 设 $\triangle ABC$ 三边为 $BC = a, CA = b, AB = c$，外接圆半径为 R，内接圆半径为 r，P 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上任意一点，点 P 到三顶点 A,B,C 的距离分别为 R_1,R_2,R_3，到三边 BC,CA,AB 距离分别为 r_1,r_2,r_3，则

$$\sum a^2 \geqslant \sum R_1^2 + \frac{4R}{r}\sum r_2 r_3$$

当且仅当

$$r_1 = \frac{(-a+b+c)r}{a}, r_2 = \frac{(a-b+c)r}{b}, r_3 = \frac{(a+b-c)r}{c}$$

时取等号.

3. （录自罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》，§3.4. Solutions 题 17）设 $a,b,c,d \in \mathbf{R}^+$，且 $abcd = 1$，则

$$\sum (a-1)(a-2) \geqslant 0$$

当且仅当 $a = b = c = d = 1$ 时取等号.

4. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+,\alpha\in\mathbf{R}$,则

$$abc(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)\geqslant a^{\alpha+2}(-a+b+c)+b^{\alpha+2}(a-b+c)+c^{\alpha+2}(a+b-c)$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

5. (自创题,1990. 12. 23) 设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbf{R}^+$,则

(1) $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{1}{2}(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_1+x_2})$;

(2) $\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\frac{x_3}{x_4+x_1}+\frac{x_4}{x_1+x_2}\geqslant\frac{1}{2}(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2})$.

6. (自创题,1987. 01. 26) P 为四面体 $ABCD$ 内一定点,过 P 作任意一平面划分四面体体积成两个部分,那么,可能划得最小体积的部分必为四面体;若 $V_{PBCD}=v_1,V_{PCDA}=v_2,V_{PDAB}=v_3,V_{PABC}=v_4$,且 $v_1\geqslant v_2,v_3,v_4$,则被划分的最小体积为

$$\delta=\frac{27v_2v_3v_4}{(v_1+v_2+v_3+v_4)^2}$$

7. (改编题,1995. 04. 25) 设 P,Q,R 分别位于 $\triangle ABC$ 的边上,且将 $\triangle ABC$ 的周长三等分,若记 $\triangle ABC$ 边长 $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle PQR$ 的面积分别为 s 和 s_0,则

$$s_0\geqslant(a+b+c)\cdot\frac{2\sum bc-\sum a^2}{36abc}s$$

当且仅当 P,Q,R 分别位于边 BC,CA,AB 上,且 $BP=\frac{1}{6}(3a+b-c)$, $CQ=\frac{1}{6}(3b+c-a)$, $AR=\frac{1}{6}(3c+a-b)$ 时取等号.

8. (自创题,2004. 07. 19) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant\sqrt[3]{9\sum x^3}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

9. (自创题,2000. 11. 11) 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\mathbf{R}^+,n\geqslant3$,记

$$A_1=1+a_1+a_1a_2+a_1a_2a_3+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}$$
$$A_2=1+a_2+a_2a_3+a_2a_3a_4+\cdots+a_2a_3\cdots a_n$$
$$A_3=1+a_3+a_3a_4+a_3a_4a_5+\cdots+a_3a_4\cdots a_na_1$$
$$\vdots$$
$$A_n=1+a_n+a_na_1+a_na_1a_2+\cdots+a_na_1a_2\cdots a_{n-2}$$

(1) 当 $a_1a_2\cdots a_n\geqslant1$ 时,证明:

① $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A_i}$;

② $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A_i} \leqslant 1$.

(2) 当 $a_1 a_2 \cdots a_n \leqslant 1$ 时,证明:

① $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A_i} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A_i}$;

② $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{A_i} \geqslant 1$.

10. (自创题,2000.11.11) 设 $p,q,r,x,y,z,x',y',z' \in \overline{\mathbf{R}^-}$, $\lambda,u,v \in \mathbf{R}^+$,且

$$\begin{cases} 2p \geqslant \frac{u}{\lambda}z + \frac{v}{\lambda}y \\ 2q \geqslant \frac{v}{u}x + \frac{\lambda}{u}z' \\ 2r \geqslant \frac{\lambda}{v}y' + \frac{u}{v}x' \end{cases}$$

则

(1) $\sum p \geqslant \sum \sqrt{xx'}$;

(2) $\sum qr \geqslant \sum \sqrt{yz \cdot y'z'}$;

(3) $pqr \geqslant \sqrt{xyzx'y'z'}$.

11. (2002 年 IMO 预选题) 设 $x_i \in \mathbf{R}(i = 1,2,\cdots,n)$,求证

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}$$

12. (改编题,2005.01.01) 若 $x,y,z \in \mathbf{R}$,且 $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2$,求证

(1) 当 x,y,z 中至少有一个不小于零时,有 $2xyz + 1 \geqslant \sum yz$;

(2) $\sum yz + 3 \geqslant 2\sum x$.

当且仅当 x,y,z 中,一个为 0,其余两个为 1 时以上两式均取等号.

13. (自创题,2007.02.03) 设 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 \in \overline{\mathbf{R}^-}$,求证

$$\prod_{i=1}^{5} \frac{1+a_i^3}{1+a_i^2} \geqslant \frac{1+a_1a_2a_3a_4a_5}{2}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ 取等号.

14. (自创题,2001.09.09) 设 $x,y,z,a,b,c \in \mathbf{R}^+$,且 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \lambda \leqslant 1$,

求证

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\leqslant 1+\frac{9\lambda^2-\lambda^3}{27}\cdot\frac{xyz}{abc}$$

15. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$, $n\geqslant 2$, 且 n 是正整数, 则

$$\sum\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}\geqslant 2$$

当且仅当 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时取等号.

16. 设 $a,b,c>1$, 且 $\sum\frac{1}{a^2-1}=1$, 则

$$\sum\frac{1}{a+1}\leqslant 1$$

当且仅当 $a=b=c=2$ 时取等号.

17. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$, 则

$$9a(a+b)(a+b+c)\geqslant 2(a+\sqrt{ab}+\sqrt[3]{abc})^3$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

18. 设 $x_i,y_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{n}y_i\geqslant 0$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\geqslant 0$, $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j\geqslant 0$, 记 $\sum y_1=y$, 则

$$\sum_{i=1}^{n}x_1(y-y_1)\geqslant\frac{\sum x_1}{\sum y_1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j+\frac{\sum y_1}{\sum x_1}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$$

当且仅当 $\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\cdots=\frac{x_n}{y_n}$ 时取等号.

19. (自创题,1997.08.17) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$, 求证

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant\frac{13}{4}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$$

20. (自创题,1997.08.18) 在 $\triangle ABC$ 中, 三边长为 a,b,c, 则

(1) 以 $\left|\frac{b^2-c^2}{a}\right|,\left|\frac{c^2-a^2}{b}\right|,\left|\frac{a^2-b^2}{c}\right|$ 为边可组成三角形三边;

(2) 以 $\frac{|b-c|}{\sqrt{a}},\frac{|c-a|}{\sqrt{b}},\frac{|a-b|}{\sqrt{c}}$ 为边可组成三角形三边.

21. 在 $\triangle ABC$ 中, BC,CA,AB 边上的高分别为 h_a,h_b,h_c, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 求证

$$\frac{9}{4}a^2\geqslant 2h_b^2+2h_c^2-h_a^2$$

22. 在 $\triangle ABC$ 中, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 其对应边上中线分别为 m_a,m_b, m_c, 则

$$abcm_am_bm_c \geqslant \frac{\Delta}{2}\sum b^2c^2$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时取等号.

23. (自创题,1998.04.10) 在 $\triangle ABC$ 中,$BC=a,CA=b,AB=c$,其对应边上中线分别为 m_a,m_b,m_c,求证

(1) $\sum am_a \geqslant \sqrt{\sum b^2c^2}+2\Delta$;

(2) $\sum \frac{1}{am_a} \geqslant \frac{1}{\sqrt{\sum b^2c^2}}+\frac{1}{2\Delta}$.

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时取等号.

24. (自创题,2000.10.13) 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边长,则

$$a^2b+b^2c+c^2a \leqslant \frac{1}{8}(\sum a)^3-\frac{3}{8}\prod(-a+b+c)$$

25. $\triangle ABC$ 三边长分别为 $BC=a,CA=b,AB=c$,BC 边上的中线为 m_a,$\angle B,\angle C$ 平分线分别为 t_b,t_c,则

$$m_a+t_b+t_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

26. (自创题,1989.07.16) 设 $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in\mathbf{R}$,且 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$. 在平面凸四边 $ABCD$ 中,有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{\sin\beta}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{\sin\gamma}{\sin\frac{C}{2}}+\frac{\sin\theta}{\sin\frac{D}{2}} \leqslant \cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{D}{2}$$

当且仅当 $\sin\alpha=\cos\frac{A}{2},\sin\beta=\cos\frac{B}{2},\sin\gamma=\cos\frac{C}{2},\sin\theta=\cos\frac{D}{2}$ 时取等号.

27. (自创题,1993.05.05) 在平面凸四边形 $ABCD$ 中,有

$$(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2})(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2})(\tan\frac{D}{2}+\tan\frac{A}{2}) \geqslant (\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2})^2$$

当且仅当四边形为矩形时取等号.

28. P,Q 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上任意两点,则

$$PA_1\cdot QA_1\sin A_1+PA_2\cdot QA_2\sin A_2+PA_3\cdot QA_3\sin A_3 \geqslant 2\Delta$$

或

$$PA_1\cdot QA_1\cdot a_1+PA_2\cdot QA_2\cdot a_2+PA_3\cdot QA_3\cdot a_3 \geqslant a_1a_2a_3$$

29. (自创题,1999.08.26) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,求证

(1) $$(\frac{1}{3}\sum x)^3 \geqslant xyz+\frac{1}{4}y(x-z)^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

(2) $$\left(\frac{1}{3}\sum x\right)^3 \geqslant xyz+\frac{xyz}{(x+y)(y+z)}(x-z)^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

(3) $$xy^3+yz^3+zx^3 \geqslant xyz\sum x+\frac{2xyz}{\sum x}\cdot\sum(y-z)^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

(4) $$x^3y+y^3z+z^3x+\left(\sum yz\right)^2 \leqslant \frac{4}{27}\left(\sum x\right)^4$$

当且仅当 $x=y=z$ 或 $x=0,y=2z$ 或 $y=0,z=2x$ 或 $z=0,x=2y$ 时取等号.

(5) $$\sum xy^2 \geqslant \frac{\left(\sum yz\right)^2}{\sum x}+\frac{2xyz}{\left(\sum x\right)^2}\cdot\sum(y-z)^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

30. (西藏刘保乾提出)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$-\frac{15}{4}xyz\sum x+\frac{9}{4}\sum y^2z^2+\frac{3}{2}(x^3y+y^3z+z^3x)\geqslant 0$$

当且仅当 $x=y=z$ 时,原式取等号.

31. (自创题,2000.06.17)$\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c,求证

$$\frac{23}{27}\left(\sum a\right)^3 \leqslant 8(a^2b+b^2c+c^2a)$$

32. (自创题,1985.03.16)设 $ABCD$ 和 $A'B'C'D'$ 是两个凸平面四边形,记 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,A'B'=a',B'C'=b',C'D'=c',D'A'=d'$ 面积分别为 F,F',记 $K=4(ab+cd)\cdot(a'b'+c'd')-(a^2+b^2-c^2-d^2)(a'^2+b'^2-c'^2-d'^2)$,求证 $K\geqslant 16FF'$.

33. (自创题,1987.01.05)设 $a,b,c,d\in\overline{\mathbf{R}^-}$,求证

$$\sum a\cdot\sum bcd \geqslant (s-2a)(s-2b)(s-2c)(s-2d)$$

这里 $s=a+b+c+d$. 当且仅当 $a=b=c=d$ 时取等号.

提示:可用增量比较法证之. 参见《数学教师》,1987 和第 2 期,杨学枝文:“关于平面四边形的一个不等式”.

34. (自创题,1991.10.02)设 $y_1,y_2,y_3,y_4\in\mathbf{R}$,且 $\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{1}{1+y_i}=2$,$\prod\limits_{i=1}^{4}(1+y_i)>0$,求证

$$2(y_1y_2+y_1y_3+y_1y_4+y_2y_3+y_2y_4+y_3y_4)\geqslant 3(y_1+y_2+y_3+y_4)$$

当且仅当 $y_1=y_2=y_3=y_4$ 时取等号.

35. (自创题,1992.04.11) 设 $a_i \in \mathbf{R}$,且 $|a_i| \leqslant 1(i=1,2,\cdots,n)$,用 s_k $(k \in \mathbf{N}, k \leqslant n)$ 表示在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数中,每 k 个数乘积之和,则

$$s_2+s_4+s_6+\cdots+\begin{cases}s_n(n\text{ 偶数})\\ s_{n-1}(n\text{ 奇数})\end{cases} \geqslant -1$$

36. (自创题,1993.10.01) 在 $\triangle ABC$ 中,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r, $\angle A,\angle B,\angle C$ 平分线分别为 w_a,w_b,w_c,则

$$\sum \frac{1}{w_a} \geqslant \frac{1}{R}+\frac{1}{2r}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

37. (自创题,1994.03.23) 设 $x,y,z \in \mathbf{R}$,且 $x+y+z=0$,n 为正整数,求证

$$2^{n-1}(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n}) \geqslant (x^2+y^2+z^2)^n$$

38. 设 F 是 $\triangle ABC$ 的费马点,点 F 到边 BC,CA,AB 的距离分别为 r_1,r_2,r_3, $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,面积为 Δ,则

(1) $r_1+r_2+r_3 \leqslant 3r$;

(2) (自创题,1997.09.14) $r_1+r_2+r_3 \geqslant \dfrac{2\Delta}{\sqrt{3}R}$.

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时式,(1) 取等号;当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形或者为一顶点为 120° 的三角形时,式(2) 取等号.

39. (自创题,1900.07.25) 设 $a,b,c,d \in \overline{\mathbf{R}^-}$,$a^2+b^2-kab=m^2$,$c^2+d^2-kcd=n^2$,则

$$(m-n)^2 \geqslant \frac{(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc)}{abcd}$$

当且仅当 $\dfrac{m}{ab}=\dfrac{n}{cd}$ 时,取等号.

40. (自创题,1990.10.09) 设 $a_1,a_2,b_1,b_2 \in \mathbf{R}$,且实数 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 满足

$$(a_1^2+a_2^2)x^2+(b_1^2+b_2^2)y^2+2(a_1b_1+a_2b_2)xy=1$$

则

$$|x_1x_2-y_1y_2| \leqslant \frac{|a_1b_2+a_2b_1|}{(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

41. (“奥数之家网站”,2007 年 3 月 31 日,slsh 提出,笔者作了修改) 设 P, A_1,A_2,A_3 为平面上任意四个点,则

$$A_2A_3 \cdot PA_1^2+A_3A_1 \cdot PA_2^2+A_1A_2 \cdot PA_3^2 \geqslant A_2A_3 \cdot A_3A_1 \cdot A_1A_2$$

当且仅当由 A_1,A_2,A_3 组成的三角形为正三角形,且点 P 为其中心时取等号.

42. (自创题,1988.11.28) 设 $\alpha_i,\beta_i \in (0,\pi)$,$i=1,2,3,4$,$\alpha_i,\beta_i(i=1,2,$

3,4),中至多只有一个为零,且$\sum_{i=1}^{4}\alpha_i=\sum_{i=1}^{4}\beta_i=\pi$,则

$$\sum_{i=1}^{4}\sin\alpha_i\cos\beta_i\geqslant\frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i\right)\left(\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

当且仅当$\alpha_i=\beta_i(i=1,2,3,4)$时取等号.

43. (自创题,1992.07.23)设$x,y,a,b\in\mathbf{R}$,且$x^2+y^2\leqslant1$,求证

$$|ax^2+bxy+cy^2|\leqslant\left|\frac{a+c}{2}\right|+\sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

44. (自创题,2006.06.08)设$x,y,z\in\mathbf{R}$,则

$$6\sum(x-y+z)x^3\geqslant3\sum y^2z^2+\left(\sum yz\right)^2$$

45. (自创题,2008.01.11)已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a\geqslant b>0)$,直线$BD$过左焦点,交椭圆于$B,D$两点,直线$AC$过右焦点,交椭圆于$A,C$两点,直线$AB$与$CD$成角为$\alpha(0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2})$,则

$$|AC|\cdot|BD|\leqslant\frac{4b^2}{\sin^2\alpha}$$

当且仅当$k_2-k_1=(1-\frac{b^2}{a^2})\tan\alpha$,且$k_2k_1=-\frac{b^2}{a^2}$时,原式取等号,其中$k_1,k_2$分别为直线$BD,AC$的斜率.

46. (录自罗马尼亚Vasile Cirtoaje主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》,§3.4. Applications题30)设$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且$x+y+z=3$,则

$$8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+9\geqslant10(x^2+y^2+z^2)$$

当且仅当x,y,z中有一个等于2,其余两个都等于$\frac{1}{2}$时原式取等号.

47. 设$x,y,z\in[0,1]$,求证不等式

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geqslant\sqrt{8(y+z)(z+x)(x+y)}$$

当且仅当x,y,z有两个为1时取等号.

48. 设$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,求证

$$\left(x^2+\frac{3}{4}\right)\left(y^2+\frac{3}{4}\right)\left(z^2+\frac{3}{4}\right)\geqslant\sqrt{\prod(y+z)}$$

当且仅当$x=y=z=\frac{1}{2}$时取等号.

49. $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且$abc=1$,求证

$$\frac{a}{(a+1)(b+1)}+\frac{b}{(b+1)(c+1)}+\frac{c}{(c+1)(a+1)}\geqslant\frac{3}{4}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

50. a,b,c 为正数,证明

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

当且仅当 $a>c>b$,且 $\frac{a}{a-c}=\frac{b}{a-b}=\frac{c}{c-b}$,即 $a>c>b$ 且 $b^3+c^3=2b^2c$ 时取等号.

51. (自创题,1988.12.13) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x^2+y^2+z^2\leqslant 3$,则

$$27+36xyz\geqslant 7\sum x\sum yz$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时取等号.

52. 设 $a,b,c>0$,且 $a+b+c=1$,求证

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}\leqslant\frac{3}{2}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

53. 正数 x,y,z 满足 $x+y+z+x^2+y^2+z^2=6$,求证

$$x^2y+y^2z+z^2x\leqslant 3$$

54. (自创题,2007.07.08) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,求证

$$\sum bc+2+2\sqrt{3}\geqslant\frac{5+2\sqrt{3}}{3}\cdot\sum a$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

55. 在 $\triangle ABC$ 中,$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,其对应的旁切圆半径分别为 r_a,r_b,r_c 则

$$\left(\frac{r_a}{a}\right)^2+\left(\frac{r_b}{b}\right)^2+\left(\frac{r_c}{c}\right)^2\geqslant\frac{9}{4}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

56. (1996年第47届波兰奥赛题) 实数 a,b,c 满足 $\sum a=1$,$a,b,c\geqslant-\frac{3}{4}$,则

$$\sum\frac{a}{a^2+1}\leqslant\frac{9}{10}$$

57. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\geqslant\sqrt[4]{27\sum x^4}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

58. 设 $a,b,c \in \mathbf{C}$,则

$$\sum |a| - \sum |b+c| + |\sum a| \geqslant 0$$

59. 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,求证

$$\sum a + 3\sqrt[3]{abc} \geqslant 2\sum \sqrt{bc}$$

当且仅当 $a=b=c$ 或 a,b,c 中一个为零,另外两个相等时取等号.

60. 已知 $a,b \in \mathbf{R}^+$,满足 $a^2+ab+b^2>3$,求证:a^2+ab 和 b^2+ab 中至少有一个大于2.

61. 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$,求证

$$\sum \frac{a^2}{a+b} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{3\sum a^2}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

62. 设 $a_1,a_2,a_3,a_4 \in \mathbf{R}^+$,则

$$\sum \frac{a_2^2+a_3^2+a_4^2}{a_2+a_3+a_4} \geqslant 2\sqrt{\sum a_1^2}$$

当且仅当 $a_1=a_2=a_3=a_4$ 时取等号.

63. (自创题,2007.02.21)$\triangle ABC$ 为非等腰三角形,三边长为 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,则

$$\left|\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}+\frac{a+b}{a-b}\right| > \frac{17}{3}$$

64. 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c+abc=4$,求证:

(1)(自创题,2006.08.25)$\sum a \geqslant \sum bc$,当且仅当 $a=b=c=1$ 或 a,b,c 中一个为零,另外两个均等于2时取等号.

(2) $\sum \frac{a}{\sqrt{b+c}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum a$,当且仅当 $a=b=c=1$ 或 a,b,c 中一个为零,另外两个均等于2时取等号.

65. (第48届国际数学奥林匹克中国国家集训队测试题,2007年3月)设正实数 u,v,w 满足 $u+v+w+\sqrt{uvw}=4$,求证

$$\sqrt{\frac{vw}{u}}+\sqrt{\frac{uw}{v}}+\sqrt{\frac{uv}{w}} \geqslant u+v+w$$

66. (自创题,2006.08.25)设 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x^2+y^2+z^2+2xyz \leqslant 1$,则

$$1+4xyz \geqslant 2\sum yz$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{1}{2}$,或 x,y,z 中一个为零,另外两个均等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.

67. (自创题,2006.08.26) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum x^2\leqslant 3xyz$,则

(1) $3\sum yz\geqslant 3\sum x+(m+2)\dfrac{\sum(y-z)^2}{\sum x}$,其中 $m=2+\sqrt{3}$;

(2) $3\sum yz\geqslant 3\sum x+(n+2)\dfrac{\sum(y-z)^2}{\sum x}$,其中 $n=\dfrac{(\sum x)^2}{\sum yz}$;

(3) $(2m+7)s_2\geqslant(4m+11)s_1-(6m+12)$,其中 $s_1=\sum x,s_2=\sum yz$,$m=2+\sqrt{3}$.

上式即为

$$109s_2\geqslant(185+6\sqrt{3})s_1-(228+18\sqrt{3})$$

以上诸式当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

68. (自创题,2006.08.31) 设 $x,y,z,u,v\in\mathbf{R}^+$,且 $3(u+v)xyz\geqslant u\sum x^2+v\sum yz$,则

$$(57u+9v)\sum x\leqslant 3(11u+3v)\sum yz+72u$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时取等号.

69. (自创题,2006.08.31) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,u,v 为正常数,则

$$\frac{(ub+vc)^2}{a}+\frac{(uc+va)^2}{b}+\frac{(ua+vb)^2}{c}\geqslant(u+v)^2\cdot\sqrt{3\sum a^2}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

70. (自创题,2006.08.31) 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

(1) $$a^3b+b^3c+c^3a\leqslant abc\sum a+\frac{2}{3}\sum bc\cdot\sum(b-c)^2$$

或 $$a^3b+b^3c+c^3a\leqslant abc\sum a+\frac{4}{3}(\sum a)^2\cdot\sum bc-4(\sum bc)^2$$

当且仅当 $a=b=c$ 或 $a=2b,c=0$ 或 $b=2c,a=0$ 或 $c=2a,b=0$ 时取等号.

(2) $$\sum a^2b\leqslant\frac{\sum bc\cdot[4(\sum a)^2-9\sum bc]}{3\sum a}$$

当且仅当 $a=b=c$ 或 $a=2b,c=0$ 或 $b=2c,a=0$ 或 $c=2a,b=0$ 时取等号.

71. (来自:http://www.matlinks.ro/forum/viewtopic.php?t=125432) 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}^+$,且 $abcd=1$,求证

$$\frac{1}{(3a-1)^2}+\frac{1}{(3b-1)^2}+\frac{1}{(3c-1)^2}+\frac{1}{(3d-1)^2}\geqslant 1$$

72.（"奥数之家",2005. 12. 26,scpajmb 提出）设 a,b,c 为正数,求证

$$(a^2+b^2+c^2)^3 \geqslant [a^3+b^3+c^3+3(\sqrt{3}-1)abc]^2$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

73. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则

$$\sum\frac{a}{b+c}\geqslant\frac{3}{2}+\frac{\sum(b-c)^2}{(\sum a)^2}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

74.（自创题,2002. 03. 08）$\triangle ABC$ 为逆时针方旋转的三角形,$BC=a$, $CA=b$,$AB=c$,面积为 Δ,a',b',c' 为非负实数,P 为 $\triangle ABC$ 所在平面上任意一点.

(1) 若 a',b',c' 中,有一个不小于另外两个之和,不妨设 $a'\geqslant b'+c'$,则

$$a'PA+b'PB+c'PC\geqslant b'c+c'b$$

当且仅当点 P 与 A 重合时取等号.

(2) 若 a',b',c' 中任意一个均小于另外两个之和,这时 a',b',c' 可组成某三角形三边,设 $\triangle A'B'C'$ 三边为 $B'C'=a'$,$C'A'=b'$,$A'B'=c'$,其面积为 Δ'.

① 当 $A+A'$,$B+B'$,$C+C'$ 均小于 $180°$ 时,有

$$a'PA+b'PB+c'PC\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}\sum a'^2(-a^2+b^2+c^2)+8\Delta'\Delta}$$

若记射线 PB 到 PC,PC 到 PA,PA 到 PB 的有向角分别为 α,β,γ,那么,当且仅当点 P 位于 $\triangle ABC$ 内部或边界上,且 $\alpha+A'=\beta+B'=\gamma+C'=180°$ 时取等号.

② 当 $A+A'$,$B+B'$,$C+C'$ 中有一个不小于 $180°$ 时,不妨设 $A+A'\geqslant180°$,则

$$a'PA+b'PB+c'PC\geqslant b'c+c'b$$

当且仅当点 P 与 A 重合时取等号.

75.（自创题,1997. 08. 08）设 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,外接圆半径为 R,内切圆半径为 r,实数 $u\in[-1,1]$.

(1) 若 $\triangle ABC$ 最大顶角不大于 $\varphi(\frac{\pi}{3}\leqslant\varphi<\pi)$,则

$$\begin{aligned}(\frac{1}{2}\sum a)^2\geqslant{}&2(1+\cos\varphi+tu\sin^2\varphi)R^2+\\&4[2-\cos\varphi-tu(\sin^2\varphi+\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})]Rr+\\&[3+8tu(\sin^2\frac{\varphi}{2}+\sin\frac{\varphi}{2})]r^2\end{aligned}$$

其中 $t=\min\{(\sin\frac{\varphi}{2}-\cos\varphi)^{-1},2-(2\sin^2\frac{\varphi}{2})^{-1}\}$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角

形或者为最大顶角等于 φ 的等腰三角形时取等号.

(2) 若 $\triangle ABC$ 最小顶角不小于 $\theta(0<\theta\leqslant\frac{\pi}{3})$,则

$$\left(\frac{1}{2}\sum a\right)^2\leqslant 2(1+\cos\theta+tu\sin^2\theta)R^2+$$
$$4\left[2-\cos\theta-tu\left(\sin^2\theta+\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]Rr+$$
$$\left[3+8tu\left(\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]r^2$$

其中 $t=\min\{(\cos\theta-\sin\frac{\theta}{2})^{-1},(2\sin^2\frac{\theta}{2})^{-1}-2\}$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形或者为最小顶角等于 θ 的等腰三角形时取等号.

76. (1) 在任意 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}\geqslant\frac{1}{2}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

(2) 在非钝角 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{\cos^2 A}{1+\cos A}\leqslant 2-\sqrt{2}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形时取等号.

77. (自创题,1994.10.22) 设 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 三边 BC,CA,AB 上的点,记 $\triangle EAF,\triangle FBD,\triangle DCE,\triangle DEF$ 的面积分别为为 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\Delta_0,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,则

$$\frac{\lambda_1^2}{\Delta_1}+\frac{\lambda_2^2}{\Delta_2}+\frac{\lambda_3^2}{\Delta_3}\geqslant\frac{2\sum\lambda_2\lambda_3-\sum\lambda_1^2}{\Delta_0}$$

当且仅当

$$\lambda_1\cdot\frac{BD}{BC}=\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)$$
$$\lambda_2\cdot\frac{CE}{CA}=\frac{1}{2}(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$$
$$\lambda_3\cdot\frac{AF}{AB}=\frac{1}{2}(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)$$

同时成立时,原式取等号.

78. (湖北省荆州中学魏烈斌老师提出) 若 a,b,c 是正数,且 $a+b+c=1$,则有

(1) $\left(\frac{1}{b+c}-a\right)\left(\frac{1}{c+a}-b\right)\left(\frac{1}{a+b}-c\right)\geqslant\left(\frac{7}{6}\right)^3$;

(2) $\left(\frac{1}{b+c}+a\right)\left(\frac{1}{c+a}+b\right)\left(\frac{1}{a+b}+c\right) \geqslant \left(\frac{11}{6}\right)^3$;

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时,以上两式均取等号.

79.（自创题,2006.08.18）设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $abc=1$,则

$$2(b+c)(c+a)(a+b) \geqslant 9(a+b+c)-11$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

80.（第 40 届 IMO 试题）设 n 是一个固定的整数,$n \geqslant 2$.

（1）确定最小常数 c,使得不等式

$$\sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant c\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i\right)^4$$

对所有的非负数 $x_1,\cdots,x_n \geqslant 0$ 都成立;

（2）对于这个常数 c,确定等号成立的充要条件.

81.（自创题,2007.05.13）设 $a,b,c \in \mathbf{R}$,且 $\sum a^2 = 1$,则

$$\sum \sqrt{1-bc} \geqslant \sqrt{7-\sum bc}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

82.（自创题,2007.04.20）设 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$xyz - \prod(-x+y+z) \geqslant \sqrt{2}\left|\prod(y-z)\right|$$

当且仅当 $x=y=z$,或 x,y,z 中有一个为零,其余两个相等时取等号.

83.（Ivan Borsenco Moldova 提供）设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

（1）$(a^3+b^3+c^3)^2 \geqslant (a^4+b^4+c^4)(bc+ca+ab)$;

（2）$9(a^4+b^4+c^4)^2 \geqslant (a^5+b^5+c^5)(a+b+c)^3$;

当且仅当 $a=b=c$ 时,以上两式均取等号.

84.（Dr. Titu Andreescu USA 提供）设 $a,b,c \in \mathbf{R}$,则

$$3\prod(b^2-bc+c^2) \geqslant \sum b^3c^3$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

85.（Dr. Titu Andreescu USA）设 $a,b,c,d \in \mathbf{R}$,证明

$$3(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2) \geqslant 2(a^2c^2-abcd+b^2d^2)$$

当且仅当 $a=\frac{3+\sqrt{5}}{2}b, c=\frac{3+\sqrt{5}}{2}d$;或 $b=\frac{3+\sqrt{5}}{2}a, d=\frac{3+\sqrt{5}}{2}c$ 时取等号.

86.（Vasile Cartoaje Romania 提供）设 $a,b,c,d \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a^2+b^2+c^2+d^2=4$,则

$$\sqrt{2}(4-ab-bc-cd-da) \geqslant (\sqrt{2}+1)(4-a-b-c-d)$$

87. 设 $a,b,c \in \mathbf{R}^+$,则

$$\frac{1}{\sum a}\cdot\sum\frac{1}{b+c}\geqslant\frac{1}{\sum bc}+\frac{1}{2\sum a^2}$$

当且仅当 $a=b=c$ 或 a,b,c 中一个为零,另外两个相等时取等号.

88. (Pham kim kung 提供) 设 $a,b,c,d\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c+d=4$,则

$$16+2abcd\geqslant 3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

当且仅当 $a=b=c=d=1$,或 a,b,c,d 中一个为零,其他三个均等于 $\frac{4}{3}$ 时取等号.

89. (自创题,2007.05.27) 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=3$,则

$$\sum\frac{(1+b)(1+c)}{(1+b^2)(1+c^2)}\leqslant 3$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

90. (自创题,2007.05.28) 设 $a,b\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\frac{a+b}{2}\leqslant 1$,则

$$\frac{1+a}{1+a^2}+\frac{1+b}{1+b^2}\leqslant\frac{2\left[1+\frac{a+b}{2}\right]}{1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}$$

当且仅当 $a=b$ 时取等号.

91. (罗马尼亚,Vasile,Cirtoaje 提供) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,则

$$\sum a^2-3\geqslant 18\left(\sum a-\sum bc\right)$$

当且仅当 $a=b=c=1$,或 a,b,c 中有一个等于 4,另外两个都等于 $\frac{1}{2}$ 时取等号.

92. (Vasile Cartoage Romania) 若 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum x^4(y+z)\leqslant\frac{1}{12}\left(\sum x\right)^5$$

当且仅当 $x=y=z=0$,或 x,y,z 中有一个为零,另外二个分别等于 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}$,$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时取等号.

93. (Ho Phu Thai Vietman 提供) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,则

$$\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}\leqslant\frac{\sum a}{\sqrt{\sum bc}}$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

94. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^{+}$,且 $x+y+z=1$,则

$$\sum\frac{x}{y^{2}+y}\geqslant\frac{3}{4\sum yz}$$

95. 设 x,y,z 为正数,且 $xyz\geqslant 1$,则

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\tag{1}$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,式(1)取等号.

96.(自创题,1986.03.20)设 $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in[0,\pi]$,$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in\mathbf{R}$ 且 $\sum\beta_1=\sum\varphi_1=\pi$,则

$$\sum\sin\varphi_1(-\sin\beta_1+\sin\beta_2+\sin\beta_3)\leqslant 2(1+\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3}{2})\leqslant\frac{9}{4}$$

当且仅当 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\frac{\pi}{3}$,或 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(90°,90°,0°)$,且 $(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)=(\varphi_1,\varphi_2,90°)(\varphi_1+\varphi_2=90°)$,或其轮换式时,前一个不等式取等号;当且仅当 $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\frac{\pi}{3}$ 时,后一个不等式取等号.

97.(Pham Kim Hung 提供)a,b,c 为非负数,且 $a+b+c=3$,则

$$a^{4}+b^{4}+c^{4}-3abc\geqslant 6\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a)$$

当且仅当 $a=b=c$;或 $a=\frac{3(1-\sqrt{5})}{2}$,$b=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$,$c=0$;或 $b=\frac{3(1-\sqrt{5})}{2}$,$c=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$,$a=0$;或 $c=\frac{3(1-\sqrt{5})}{2}$,$a=\frac{3(\sqrt{5}-1)}{2}$,$b=0$ 时取等号.

98.(自创题,2006.02.05)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^{-}}$,且 $x^{2}+y^{2}+z^{2}\leqslant 3$,则

$$xyz\geqslant\sum yz-2\geqslant 3\sum x-8$$

当且仅当 $x=y=z=1$ 时,以上两式均取等号.

99.(自创题,2006.02.05)设 $x,y,z,w\in\overline{\mathbf{R}^{-}}$,且 $x^{2}+y^{2}+z^{2}+w^{2}\leqslant 4$,则

$$6xyzw\geqslant 3\sum yzw-6\geqslant 5(xy+xz+xw+yz+yw+zw)-24\geqslant$$
$$20\sum x-74$$

当且仅当 $x=y=z=w=1$ 时,以上诸式均取等号.

100.(自创题,2006.02.12)设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\overline{\mathbf{R}^{-}}$,且 $x_1^{2}+x_2^{2}+x_3^{2}+x_4^{2}\leqslant 3$,则

$$3x_1x_2x_3x_4\geqslant\sum x_2x_3x_4-1\geqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j-3\geqslant$$

$$3\sum x_1 - 9$$

当且仅当 x_1,x_2,x_3,x_4 中有一个为0,其余三个都等于1时,以上诸式均取等号.

101. (自创题,2007.12.20) 设 $a_i \in \mathbf{R}^+$, $i=1,2,\cdots,n$, m,k 为正整数,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+k}}{a_{i+1}^{m}} \geqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m}}{a_{i+1}^{m-k}}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号.

102. (自创题,2007.12.28) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum bc=1$,则

$$\sum\frac{1}{4a^2-bc+2}\geqslant 1$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号.

103. 设 x,y,z 为非负数,且满足

$$2\sum yz-\sum x^2=2xyz$$

则
$$(1-x)(1-y)(1-z)\leqslant 1$$

当且仅当 x,y,z 中有一个为零,其余两个都等于2时原式取等号.

104. (改编题,2005.11.15) 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $xyz=1$,则

$$\sum\frac{x^2}{x+y+y^3z}\geqslant\frac{1}{3}\sum x$$

当且仅当 $x=y=z$ 时原式取等号.

105. (自创题,2007.12.21) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$(x^2-y^2-xy)^2+(y^2-z^2-yz)^2+(z^2-x^2-zx)^2\geqslant y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

106. 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$x^3y+y^3z+z^3x+xyz(x+y+z)\leqslant\frac{27}{256}(x+y+z)^4$$

当且仅当 $x=0,y=3z$;或 $y=0,z=3x$;或 $z=0,x=3y$ 时取等号.

107. 设 $x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $\sum x\geqslant\frac{yz}{x},\frac{zx}{y},\frac{xy}{z}$,则

$$\sum x\cdot\sum\frac{1}{(y+z)^4}\geqslant\frac{9}{16xyz}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

108. (自创题,1988.11.10) 设 $a,b,c,d,x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$,则

$$x(-a+b+c+d)+y(a-b+c+d)+$$
$$z(a+b-c+d)+w(a+b+c-d)\leqslant$$

$$\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}\cdot$$
$$\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}$$

当且仅当

$$x(-bcd+acd+abd+abc)=y(bcd-acd+abd+abc)=$$
$$z(bcd+acd-abd+abc)=$$
$$w(bcd+acd+abd-abc)$$

时取等号.

109.（陈计,2007.12.20 提供）设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且满足 $x+y+z=2$,则

$$\sum\sqrt{9-8yz}\geqslant 7$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{2}{3}$,或 x,y,z 中有一个为零,其余两个都等于 1 时取等号.

110.（自创题,1990.01.14）设 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a,CA=b,AB=c$,且 $\angle A\geqslant\frac{\pi}{3}$,则

$$(b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 4+\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$$

当且仅当 $b=c$ 时取等号.

111.（自创题,2007.01.27）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $abc=1$,则

$$15\sum bc+2\sum a\cdot\sum bc\geqslant 21\sum a$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

112.（"奥数之家"网站,2007.08.07 提供）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc=1$,则

$$\sum\sqrt{3a^2+4}\leqslant\sqrt{7}\cdot\sum a$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

113.（"奥数之家"网站,2008.02.28）设 $a,b,c,d\in\overline{\mathbf{R}^+}$,且 $\sum\frac{1}{a}=4$,则

$$\sum\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}}\leqslant 2\sum a-\frac{9}{4}$$

当且仅当 $a=b=c=d=1$ 时取等号.

114. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$\sum\frac{\sqrt{bc+4a(b+c)}}{b+c}\geqslant\frac{9}{2}$$

当且仅当 $a=b=c$,或 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时取等号.

115.（录自罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》，§3.4. Applications 题 16）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc=1$，则

$$1+a+b+c\geqslant 2\sqrt{1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时，原式取等号.

116. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbf{R}^+$，则

$$\sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2+\lambda_3}}+\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_3+\lambda_1}}+\sqrt{\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2}}\geqslant(6-3\sqrt{3})\sqrt{\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)}}+\sqrt{\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^3}{(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1)(\lambda_1+\lambda_2)}}$$

仅当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$ 时取等号.

117.（录自罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》，§3.4. Applications 题 10）设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}}\geqslant 15$$

当且仅当 $x=y=z$，或 x,y,z 中有一个为零，另外两个相等时取等号.

118.（宋庆老师在《中学数学研究》（广东），2008 年第 1 期，文“两个优美的无理不等式”中提出的猜想）若 $a,b,c>0$，满足 $a=b=c=1$，则

$$\sqrt{a^{-1}-a}+\sqrt{b^{-1}-b}+\sqrt{c^{-1}-c}\geqslant 2\sqrt{6}$$

119. 设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$\sum\frac{1}{4b^2+4c^2-bc}\geqslant\frac{9}{7\sum a^2}$$

当且仅当 $a=b=c$，或 a,b,c 中有一个为零，其余两个相等时取等号.

120. P 为四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 内任意一点，直线 A_1P 与过 P,A_2,A_3,A_4 所确定的球面交于点 B_1，直线 A_2P 与过 P,A_1,A_3,A_4 所确定的球面交于点 B_2，直线 A_3P 与过 P,A_1,A_2,A_4 所确定的球面交于点 B_3，直线 A_4P 与过 P,A_1,A_2,A_3 所确定的球面交于点 B_4，则

$$81A_1P\cdot A_2P\cdot A_3P\cdot A_4P\leqslant PB_1\cdot PB_2\cdot PB_3\cdot PB_4$$

当且仅当 $v_1PA_1^2=v_2PA_2^2=v_3PA_3^2=v_4PA_4^2$ 时原式取等号.

121.（自创题，1987.08.24）设

$$x,y,z\in[0,1],D=\begin{vmatrix}0 & x & 1-x\\ 1-y & 0 & y\\ z & 1-z & 0\end{vmatrix}$$

则 $x(1-y),y(1-z),z(1-x)$ 中必有一个其值不大于 D.

122. （"奥数之家"网站，2008.04.14，polynasia 提供）设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，且 $abc=1$，则

$$\sum\frac{1}{a^2+2b^2+3}\leqslant\frac{1}{2}$$

123. （沈毅，2008.04.10 提出）设 P 为非钝角 $\triangle ABC$ 内任意一点，直线 AP 交 $\triangle ABC$ 外接圆于另一点 A_1，从 A_1 作 $A_1A_2\perp BC$ 于 A_2，类似有 B_2,C_2，则 $\triangle A_2B_2C_2$ 面积不大于 $\triangle ABC$ 面积的 $\frac{1}{4}$.

124. 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，则

$$\sum\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}\geqslant\frac{1}{3}\sum a$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

125. （"东方热线"论坛，2008.04.14 提供）设 O 为 $\triangle ABC$ 内任意一点，直线 AO,BO,CO 与 BC,CA,AB 三边分别交于 P,Q,R，若 $BC=a$ 为最大边，则

$$|OP|+|OQ|+|OR|<a$$

126. （2008 年，Serbian 数学奥林匹克试题）已知 a,b,c 是正数，且 $a+b+c=1$，证明

$$\sum\frac{1}{bc+a+\frac{1}{a}}\leqslant\frac{27}{31}$$

127. （孙文彩猜想，2006.09 提出）设 $x_i>0,i=1,2,\cdots,n,\lambda>0$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，证明或否定

$$\sum\sqrt{x_1}\cdot\sum\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda x_1}}\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}}$$

128. 设 $a,b,c\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}$，则

$$\left[\sum(b+c)(b-c)^n\right]^2\geqslant4\left[\sum(b-c)^2\right]\left[\sum bc(b-c)^n\right]$$

129. （自创题，2005.05.11）在非钝角 $\triangle ABC$ 中，$BC=a,CA=b,AB=c$，且 a 为最小边，R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径，则

$$4bc-a^2\geqslant9R^2$$

当且仅当 $a=b=c$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形时取等号.

130. （自创题，2008.05.07）设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且 $a+b+c=1$，求使

$$(b^2+c^2+\lambda bc)(c^2+a^2+\lambda ca)(a^2+b^2+\lambda ab)\geqslant(\lambda+2)^3abc$$

成立的最大正数 λ 的值.

131. 对于正数 x,y,z，求证

$$\frac{(y+z)(z+x)(x+y)}{xyz}+\frac{2\sqrt{2}(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2}\geqslant 8+6\sqrt{2}$$

当且仅当 $x=\sqrt{2}, y=z=1$;或 $y=\sqrt{2}, z=x=1$;或 $z=\sqrt{2}, x=y=1$ 时取等号.

132. ("奥数之家"网站,网名"你猜"2008.08.04 提供,shfdfzhjj 自编题) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}$,则

$$\sum\frac{3a^4+a^2b^2}{a^3+b^3}\geqslant 2\sum a$$

当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

133. (上海叶中豪提出) $\triangle ABC$ 的 BC 边上有一点 D,过 D 分别作 AC,AB 平行线交 AB,AC 于点 E,F,记 $\triangle BDE$,平行四边形 $AEDF$,$\triangle DCF$,$\triangle ABC$ 面积分别为 S_1,S_2,S_3,S. 求证:S_1,S_2,S_3 中必有一个不小于 $\frac{4}{9}S$.

134. (自创题,2008.04.05) 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且 $abc\leqslant m$,则

$$\sum\frac{1}{m+a^2(b+c)}\leqslant\frac{3}{m+2abc}$$

当且仅当 $abc=m$,或 $a=b=c$ 时取等号.

135. (自创题,2008.12.21) 设 $x_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,记 $s_1=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$,$s_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$,$s_3=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{s_1-x_i}}\geqslant\sqrt{\frac{s_1^3}{s_1s_2-3s_3}}$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时取等号.

136. 设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,则

$$a^2c^2+a^2d^2+b^2d^2+b^2c^2+4a^2b^2\geqslant 4a^2bd+4ab^2c$$

137. 对正数 a,b,c,d 及 $k\geqslant 0$,有

$$\frac{a}{b+kd}+\frac{b}{c+ka}+\frac{c}{d+kb}+\frac{d}{a+kc}\geqslant\frac{4}{1+k}$$

当且仅当 $a=b=c=d$,或 $k=1$,且 $a+c=b+d$ 时,原式取等号.

138. (2008.06.20,"不等式研究网站",stlb197 提出) 在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum\frac{1}{3\cot^2A+8}\leqslant\frac{1}{3}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

139. (自创题,2007.12.21) 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$(x^2-y^2-xy)^2+(y^2-z^2-yz)^2+(z^2-x^2-zx)^2\geqslant y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

140. (自创题,2008.08.03)已知正数 a,b,c 满足 $\sum bc=1$,求证

$$\sum \sqrt{a+a^4} > \sqrt{(\sqrt{3}+1)\sum a}$$

141. 设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且满足 $x+y+z=2$,则

$$\sum \sqrt{9-8yz}\geqslant 7$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{2}{3}$,或 x,y,z 中有一个为零,其余两个都等于1时取等号.

142. (自创题,2008.08.30)设 $a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbf{R}$,且 $a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2=m^2$,则

$$\frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1)-m^2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)-m^2}\geqslant\frac{(a_1+b_1+a_2+b_2)^2}{4(a_1+b_1)(a_2+b_2)}$$

当且仅当 $a_1^2-b_1^2=m^2,a_1=a_2,b_1=b_2$ 时取等号.

143. ("奥数之家"网站,2009.01.19"ppppqqqq"提供)设 $x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x^2+y^2+z^2=1$,则

$$\sum\frac{1}{1-yz}\leqslant\frac{4\sum x\sum yz}{(y+z)(z+x)(x+y)}$$

当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,或 x,y,z 中,有一个为零,其余两个都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$时取等号.

144. (自创题,2006.02.05)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant n$,证明或否定

$$2+(n-2)x_1x_2\cdots x_n\geqslant\sum x_2x_3\cdots x_n$$

当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,上式取等号. $\sum x_2x_3\cdots x_n$ 为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每 $n-1$ 个乘积之和.

本题原为笔者提出的猜想,也可参见《中学数学教学》(安徽)杨学枝文:"从一道不等式谈起"(《中学数学教学》(安徽)2007年第2期).

145. 设 $\triangle ABC$ 三边长为 a,b,c,$\max\{a,b,c\}=a$,且 $\angle A\geqslant\frac{2\pi}{3}$,$P$ 为 $\triangle ABC$ 内部或边界上任意一点,记 $PA=R_1,PB=R_2,PC=R_3$,则

$$(R_2+R_3)(R_3+R_1)(R_1+R_2)\geqslant bc(b+c)$$

当且仅当点 P 重合于点 A 时取等号.

本题是刘健老师在《不等式研究通讯》(中国不等式研究小组主办),2009年第一期(总第61期)上的文章"涉及三角形与点的一些几何不等式"中提出的猜想.

附:第八章练习提示与参考答案

1. 提示:应用增量比较法证明.

2. 注:这是褚小光先生提出并证明了的不等式.可参见《湖南理工大学学报》,2003 年 12 月,16 卷 4 期,褚小光与肖振纲文:“若干几何不等式猜想的证明”.

另证:

由 $a=\frac{a}{2\Delta}\sum ar_1$ 等,及 $R_1^2=\frac{c^2(br_2)^2+b^2(cr_3)^2}{4\Delta^2}+\frac{br_2\cdot cr_3(-a^2+b^2+c^2)}{4\Delta^2}$ 等代入原式并经整理得

$$\sum a^2x^2\geqslant\sum(2ab+2ac-a^2-b^2-c^2)yz$$

$$(\text{其中 } x=ar_1,y=br_2,z=cr_3)\Leftrightarrow$$

$$\left(\sum ax\right)^2\geqslant\left(2\sum bc-\sum a^2\right)\cdot\sum yz$$

此式可由 $\left[\sum(y+z)x'\right]^2\geqslant4\sum yz\cdot\sum y'z'$(见第一章“等价变换法证明不等式”例 1 中式(2))得到.

3. 简证:记 $s_1=a+b+c+d,s_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd,s_3=bcd+acd+abd+abc,s_4=abcd=1$,则有

$$s_1^4-4s_1^2s_2+9s_1s_3-16s_4\geqslant0$$

(参见第一章“等价变换法证明不等式”中例 14)及

$$s_2^2-3s_1s_3+12s_4\geqslant0$$

(参见《中学数学教学》(安徽),2007 第 4 期,杨学枝文:“从一道不等式题谈起”)得到

$$s_1^4-4s_1^2s_2+3s_2^2+20s_4\geqslant0\Leftrightarrow$$

$$(2s_1^2-3s_2+\sqrt{s_1^4-60})(2s_1^2-3s_2-\sqrt{s_1^4-60})\geqslant0$$

由于

$$2s_1^2-3s_2+\sqrt{s_1^4-60}>0$$

因此

$$2s_1^2-3s_2-\sqrt{s_1^4-60}\geqslant0$$

即

$$s_2\leqslant\frac{2s_1^2-\sqrt{s_1^4-60}}{3}\qquad①$$

另外,原式等价于

$$s_1^2-3s_1-2s_2+8\geqslant0$$

因此，只需证

$$s_1^2-3s_1-2\cdot\frac{2s_1^2-\sqrt{s_1^4-60}}{3}+8\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{s_1^4-60}\geqslant s_1^2+9s_1-24\Leftrightarrow$$
$$4(s_1^4-60)\geqslant(s_1^2+9s_1-24)^2\Leftrightarrow$$
$$s_1^4-6s_1^3-11s_1^2+144s_1-272\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(s_1-4)^3(s_1+6)+(s_1-4)(13s_1-28)\geqslant 0$$

由 $s_1\geqslant 4$ 知上式成立，故原式成立，由以上证明易知取等号条件.

4. 简证：不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则

原式左 - 右 $=a^{\alpha+1}(a-b)^2+(a-b)(b-c)(a^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}+c^{\alpha+1})+c^{\alpha+1}(b-c)^2\geqslant(a-b)(b-c)(a^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}+c^{\alpha+1})$

若 $1+\alpha\geqslant 0$，则 $a^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}\geqslant 0$；

若 $1+\alpha<0$，则 $c^{\alpha+1}-b^{\alpha+1}\geqslant 0$.

故原式成立.

注：本题可参见《中学数学》(湖北)1991 年第 2 期，杨学枝文："一个三角形不等式的发现".

5. 简证：

(1) $2\left(\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\right)-\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_1+x_2}\right)=$

$\sum\frac{x_1-x_2}{x_2+x_3}=\sum\left(\frac{x_1-x_2}{x_2+x_3}+1\right)-3=\sum\frac{x_3+x_1}{x_2+x_3}\geqslant 3-3=0.$

(2) 设左边式子 $=u$，则

$$\begin{aligned}2u+4=&\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)+\\&\left(\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_4}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_1}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_2}{x_1+x_2}\right)=\\&\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)+\\&\left[\left(\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_3+x_1}{x_4+x_1}\right)+\left(\frac{x_2+x_4}{x_3+x_4}+\frac{x_4+x_2}{x_1+x_2}\right)\right]=\\&\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)+\\&\left[\frac{(x_1+x_3)\sum x_1}{(x_2+x_3)(x_4+x_1)}+\frac{(x_2+x_4)\sum x_1}{(x_3+x_4)(x_1+x_2)}\right]\geqslant\\&\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_3+x_4}+\frac{x_3+x_4}{x_4+x_1}+\frac{x_4+x_1}{x_1+x_2}\right)+4\end{aligned}$$

(分母用 $ab \leqslant (\frac{a+b}{2})^2$) 即得.

猜想:当 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \mathbf{R}^+$,$n=5,6,7,\cdots,13$ 以及 15,17,19,21,23 时有

$$\sum \frac{x_1}{x_2+x_3} \geqslant \frac{1}{2}\sum \frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}$$

注:可参阅《福建中学数学》1991 年第二期,杨学枝文:"循环不等式的证明及推广".

6. 证明参见《成都大学自然科学学报(季刊)》1991 年第一期杨学枝文:"一个划分四面体体积的问题".

主要用到文中引理 3,即

$$\frac{27v_1v_2v_3}{v^2} \leqslant v_D \leqslant \frac{v_1 v}{v-v_2-v_3}$$

其中,v 为四面体 $ABCD$ 体积,$v_D = v_{DA'B'C'}$,A',B',C' 为过点 P 平面与 AD,BD,CD 的交点,且设 $v_1 \geqslant v_2, v_1 \geqslant v_3$.

7. 简证:P,Q,R 分布有两种情况.

当 P,Q,R 分别位于边 BC,CA,AB 上,且记 $\triangle QAP,\triangle RBP,\triangle PCQ$ 的面积分别为 s_1,s_2,s_3,$\frac{1}{3}(a+b+c)=k$. 同时设 $BP=x$,则

$$s_1 = \frac{(-x+a+b-k)(x+c-k)}{bc}s$$

$$s_2 = \frac{x(-x+k)}{ca}s$$

$$s_3 = \frac{(-x+a)(x-a+k)}{ab}s$$

于是可求以下关于 x 的二次函数最小值

$$\frac{s_0}{s} = 1-\frac{s_1}{s}-\frac{s_2}{s}-\frac{s_3}{s} = \frac{a+b+c}{abc}[x^2-\frac{1}{3}(3a+b-c)x+\frac{1}{9}a(2a+2b-c)]$$

当 P,Q,R 中有两点位于同一条边上,另一点位于其他边上时,即为 1988 年全国高中数学联赛二试题.

注:参阅《数学通讯》1996 年 第 10 期,杨学枝文:"从一道命题谈起".

8. 简证

$$(\sum \frac{x^2}{y})^3 - 9\sum x^3 = [\sum x + \sum \frac{(x-y)^2}{y}]^3 - 9\sum x^3 \geqslant$$

$$(\sum x)^3 + 3(\sum x)^2 \cdot \sum \frac{(x-y)^2}{y} - 9\sum x^3 \geqslant$$

$$(\sum x)^3 + 3\sum[y^2+2y(z+x)] \cdot \sum \frac{(x-y)^2}{y} - 9\sum x^3 =$$

$$(\sum x)^3+3\sum y(z-y)^2+6\sum(z+x)(x-y)^2-9\sum x^3=$$
$$\sum x^3+9\sum xy^2-30xyz\geqslant 0$$

9. 简证：注意到$a_iA_{i+1}-A_i=a_1a_2\cdots a_n-1(i=1,2,\cdots,n,A_{n+1}=A_1)$，由此有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{A_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_1}+(a_1a_2\cdots a_n-1)\left(\frac{1}{A_1A_2}+\frac{1}{A_2A_3}+\cdots+\frac{1}{A_nA_1}\right)$$

易知(1)－①，(2)－①成立.

注意到

$$A_1=A_1$$
$$a_1A_2-A_1=a_1a_2\cdots a_n-1$$
$$a_1a_2A_3-A_1=(1+a_1)(a_1a_2\cdots a_n-1)$$
$$a_1a_2a_3A_4-A_1=(1+a_1+a_1a_2)(a_1a_2\cdots a_n-1)$$
$$\vdots$$
$$a_1a_2\cdots a_{n-1}A_n-A_1=(1+a_1+a_1a_2+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-2})(a_1a_2\cdots a_n-1)$$

可得

(1)－②：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{A_i}\leqslant\frac{1}{A_1}+\frac{a_1}{A_1}+\frac{a_1a_2}{A_1}+\cdots+\frac{a_1a_2\cdots a_{n-1}}{A_1}=1$. (2)－②：类似证之.

10. 简证：(1)，(3)易证.

(2)

$$4\sum qr=\left(\frac{u}{v}y'z+\frac{v}{u}yz'\right)+\left(\frac{\lambda}{v}x'z'+\frac{v}{\lambda}xz\right)+\left(\frac{\lambda}{u}xy'+\frac{u}{\lambda}x'y\right)+$$
$$xx'+yy'+zz'+\left(\frac{\lambda^2}{uv}y'z'+\frac{u^2}{\lambda v}x'z+\frac{v^2}{\lambda u}xy\right)\geqslant$$
$$2(\sqrt{yy'zz'}+\sqrt{xx'zz'}+\sqrt{xx'yy'})+$$
$$xx'+yy'+zz'+3\sqrt[3]{xx'yy'zz'}$$

于是，只需证

$$xx'+yy'+zz'+2(\sqrt{yy'zz'}+\sqrt{xx'zz'}+\sqrt{xx'yy'})+$$
$$3\sqrt[3]{xx'yy'zz'}\geqslant 4\sum\sqrt{yy'zz'}$$

记$xx'=a^6,yy'=b^6,zz'=c^6$，即证

$$a^6+b^6+c^6+3a^2b^2c^2-2(b^3c^3+c^3a^3+c^3b^3)\geqslant 0$$

不妨设$a\geqslant b\geqslant c$，则

$$\text{上式左边}=\frac{1}{2}\sum(b^3-c^3)^2-\frac{1}{2}\sum bc\cdot\sum a^2(b-c)^2=$$

$$\frac{1}{2}\sum(b-c)^2[(b^2+c^2+bc)^2-a^2\sum bc]$$

又当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时,有

$$(b^2+c^2+bc)^2-a^2\sum bc+(a^2+c^2+ac)^2-b^2\sum bc=$$
$$(a^3-b^3)(a-b)+c(a^2-b^2)(a-b)+$$
$$(3a^2+3b^2+2ac+2bc+2c^2)c^2\geqslant 0$$

$$(a^2+b^2+ab)^2-c^2\sum bc=a(a^3-c^3)+b(b^3-c^3)+ab(ab-c^2)+$$
$$2a^2b^2+2a^3b+2ab^3\geqslant 0$$

所以

$$\frac{1}{2}\sum(b-c)^2[(b^2+c^2+bc)^2-a^2\sum bc]\geqslant$$
$$\frac{1}{2}(b-c)^2[(a^2+c^2+ac)^2-b^2\sum bc+(b^2+c^2+bc)^2-a^2\sum bc]+$$
$$\frac{1}{2}(a-b)[(a^2+b^2+ab)^2-c^2\sum bc]\geqslant 0$$

另证:$\sum a^6+3a^2b^2c^2\geqslant\sum b^2c^2(b^2+c^2)\geqslant 2\sum b^3c^3$.

注:同法可证得:各字母条件同上,且

$$\begin{cases}2p\geqslant\dfrac{\lambda}{u}z+\dfrac{\lambda}{v}y\\ 2q\geqslant\dfrac{u}{v}x+\dfrac{u}{\lambda}z'\\ 2r\geqslant\dfrac{v}{\lambda}y'+\dfrac{v}{u}x'\end{cases}$$

则:(1) $\sum p\geqslant\sum\sqrt{xx'}$;(2) $\sum qr\geqslant\sum\sqrt{yy'zz'}$;(3) $pqr\geqslant\sum\sqrt{xx'yy'zz'}$.

11. 简证

$$原式\Leftrightarrow\left(\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\right)^2<n$$

又由柯西不等式,有

$$上式左边\leqslant n\left[\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}\right]$$

因此,又只需证

$$\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^2}+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)^2}+\cdots+\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^2}<1\quad(※)$$

由于

$$式(※)左边式子\leqslant\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+\frac{x_2^2}{(1+x_1^2+x_2^2)(1+x_1^2)}+\cdots+$$

$$\frac{x_n^2}{(1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2)}=$$

$$\frac{x_1^2}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_1^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}+\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\cdots+$$

$$\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2}-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}=$$

$$1-\frac{1}{1+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<1$$

12. 简证:(1) 先证

$$2+xyz\geqslant\sum x \tag{①}$$

因为
$$1-yz\geqslant\frac{1}{2}\sum x^2-yz=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(y-z)^2\geqslant 0$$

同理有

$$1-zx\geqslant 0,\ 1-xy\geqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}2^2-(\sum x-xyz)^2&=4-\sum x^2-2\sum yz+2xyz\sum x-(xyz)^2\geqslant\\&2-2\sum yz+2xyz\sum x-2(xyz)^2+(xyz)^2=\\&2\prod(1-yz)+(xyz)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

即

$$(2-\sum x+xyz)(2+\sum x-xyz)\geqslant 0 \tag{②}$$

由式②知,要证式①成立,只需证

$$2+\sum x-xyz\geqslant 0 \tag{③}$$

因为
$$4\geqslant 2\sum x^2\geqslant 2(y^2+z^2)\geqslant(y+z)^2$$

所以
$$2\geqslant|y+z|\geqslant-(y+z)$$

即

$$2+y+z\geqslant 0 \tag{④}$$

又由于 x,y,z 中至少有一个不小于零,不妨设 $x\geqslant 0$,则

$$2+\sum x-xyz=(2+y+z)+x(1-yz)\geqslant 0$$

(注意到 $1-yz\geqslant 0$ 及式④).

综上,式①获证.今利用式①证明式(1).分以下两种情况讨论.

ⅰ)当 $x,y,z\leqslant 1,x\geqslant 0$ 时,有

$$x(1-y)(1-z)\geqslant 0$$

即

$$x + xyz \geqslant zx + xy \qquad ⑤$$

另外,有

$$(1 - x)(1 - yz) \geqslant 0$$

即

$$1 - x + xyz \geqslant yz \qquad ⑥$$

由式⑤+⑥即得式(1).

ii) 当 x,y,z 中有一个不小于1时,如 $x \geqslant 1$,这时因为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2 \quad x \geqslant 1$$

所以
$$y^2 + z^2 \leqslant 1$$

所以
$$|y| \leqslant 1, |z| \leqslant 1$$

所以
$$(1 - x)(1 - y)(1 - z) \leqslant 0$$

即

$$xyz + \sum x \geqslant 1 + \sum yz \qquad ⑦$$

由以上已证有

$$2 + xyz \geqslant \sum x \qquad ⑧$$

由式⑦+⑧即得式(1).

(2) 由于

$$\sum yz - 2\sum x + 3 = \frac{(\sum x)^2 - \sum x^2}{2} - 2\sum x + 3 \geqslant$$

$$\frac{(\sum x)^2 - 2}{2} - 2\sum x + 3 =$$

$$\frac{1}{2}(\sum x - 2)^2 \geqslant 0$$

因此即得式(2).

注:1. 对 x,y,z,w 四元情况下有类似不等式,可参见本章题100.

2. 由证明中易知,式①对于任意实数 x,y,z 都成立.

13. 简证:由于

$2(1 + a_i^3)^5 - (1 + a_i^2)^5(1 + a_i^5) =$

$(1 - a)^4(1 + 4a + 5a^2 + 10a^3 + 15a^5 + 15a^6 + 15a^7 + 10a^8 +$

$5a^9 + 4a^{10} + a^{11}) \geqslant 0$

即
$$2(1 + a_i^3)^5 \geqslant (1 + a_i^2)^5(1 + a_i^2)$$

以上 $i = 1,2,3,4,5$,因此

$$2^5\prod_{i=1}^{5}(1 + a_i^3)^5 \geqslant \prod_{i=1}^{5}(1 + a_i^2)^5 \cdot \prod_{i=1}^{5}(1 + a_i^5) \geqslant$$

$$\prod_{i=1}^{5}(1+a_i^2)^5\cdot(1+a_1a_2a_3a_4a_5)^5$$

（应用赫尔德不等式）即得原式.

猜想：设 $a\in\overline{\mathbf{R}^-}$，$n$ 为正整数，$n\geqslant 2$，则

$$2(1+a^n)^{2n-1}\geqslant(1+a^{2n+1})(1+a^{n-1})^{2n-1}$$

当且仅当 $a=1$ 时取等号.

14. 简证

$$3-\lambda=\frac{x-a}{x}+\frac{y-b}{y}+\frac{z-c}{z}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(x-a)(y-b)(z-c)}{xyz}}$$

所以
$$(x-a)(y-b)(z-c)\leqslant\left(\frac{3-\lambda}{3}\right)^3xyz$$

又易证

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1+\frac{(x-a)(y-b)(z-c)}{abc}+(\lambda-1)\frac{xyz}{abc}\leqslant 1+\frac{9\lambda^2-\lambda^3}{27}\cdot\frac{xyz}{abc}$$

15. 简证：只需证明一个局部不等式

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}\geqslant\frac{2a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$$

令 $x=a^{\frac{1}{n}}$，$y=b^{\frac{1}{n}}$，$z=c^{\frac{1}{n}}$，即要证明

$$\sqrt[n]{\frac{x^n}{y^n+z^n}}\geqslant\frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}\Leftrightarrow\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^n\geqslant x^n(y^n+z^n)$$

又
$$\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)^n\geqslant(x\sqrt{y^2+z^2})^n$$

故只要证

$$(x\sqrt{y^2+z^2})^n\geqslant x^n(y^n+z^n)\Leftrightarrow(y^2+z^2)^n\geqslant(y^n+z^n)^2\qquad①$$

式①易用二项展开式证明，也可以用数学归纳法证明.

事实上，当 $n=2$ 时，显然式①成立.

设在 $n-1$ 时式①成立，则在 n 时，有

$$(y^2+z^2)^n=(y^2+z^2)^{n-1}(y^2+z^2)\geqslant(y^{n-1}+z^{n-1})^2(y^2+z^2)\geqslant(y^{2n-2}+z^{2n-2})(y^2+z^2)\geqslant(y^n+z^n)^2$$

故式①获证，由以上证明中易得取等号条件.

由局部不等式易证得原式.

16. 简证

$$\frac{1}{1+a}-\frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2-1}-\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow$$
$$(2-a)(a^2-1)\leqslant$$
$$\frac{1}{4}(2-a)(2+a)(a+1)\Leftrightarrow$$
$$\frac{3}{4}(a+1)(2-a)^2\geqslant 0$$

于是证得原式.

17. 简证:因为 $$\frac{a+b}{2}\geqslant\frac{a}{3}+\frac{\sqrt{ab}}{3}+\frac{b}{3}$$

所以

$$a(a+b)(a+b+c)\geqslant 6\left(\frac{a}{3}+\frac{a}{3}+\frac{a}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{\sqrt{ab}}{3}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right)\geqslant$$
$$6\left(\frac{a}{3}+\frac{\sqrt{ab}}{3}+\frac{\sqrt[3]{abc}}{3}\right)^3$$

18. 简证

$$原式\Leftrightarrow\sum x_1\cdot\sum y_1\left(\sum x_1\sum y_1-\sum x_1y_1\right)\geqslant$$
$$\left(\sum x_1\right)^2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j+\left(\sum y_1\right)^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\Leftrightarrow$$
$$\left(\sum x_1\right)^2\left(\sum y_2\right)^2-\sum x_1\cdot\sum y_2\cdot\sum x_1y_1\geqslant$$
$$\left(\sum x_1\right)^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j+\left(\sum y_1\right)^2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\Leftrightarrow$$
$$\left[\left(\sum x_1\right)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right]\left[\left(\sum y_1\right)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j\right]\geqslant$$
$$\sum x_1\cdot\sum y_1\cdot\sum x_1y_1+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j$$

但

$$\left[\left(\sum x_1\right)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\right]\left[\left(\sum y_1\right)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j\right]-$$
$$\sum x_1\cdot\sum y_1\cdot\sum x_1y_1-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j=$$
$$\left[\frac{1}{2}\sum x_1^2+\frac{1}{2}\left(\sum x_1\right)^2\right]\left[\frac{1}{2}\sum y_1^2+\frac{1}{2}\left(\sum y_1\right)^2\right]-$$
$$\sum x_1\sum y_1\cdot\sum x_1y_1-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j\geqslant$$
$$\frac{1}{4}\left(\sum x_1y_1+\sum x_1\cdot\sum y_1\right)^2\geqslant\sum x_1\cdot\sum y_1\cdot\sum x_1y_1-$$

21. 简证

$$原式\Leftrightarrow 9a^2+3\cdot\frac{16\Delta^2}{a^2}\geqslant 32\Delta^2\cdot\sum\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow$$

$$3[3a^2+\frac{2a^2(b^2+c^2)-(b^2-c^2)^2-a^4}{a^2}]\geqslant$$

$$2(2\sum b^2c^2+\sum a^4)\cdot\sum\frac{1}{a^2}\Leftrightarrow$$

$$3[2\sum a^2-(\frac{b^2-c^2}{a})^2]\geqslant 2\sum[2b^2+2c^2-a^2-(\frac{b^2-c^2}{a})^2]\Leftrightarrow$$

$$3[2\sum a^2-(\frac{b^2-c^2}{a})^2]\geqslant 2[3\sum a^2-(\frac{b^2-c^2}{a})^2]\Leftrightarrow$$

$$2[(\frac{a^2-c^2}{b})^2+(\frac{a^2-b^2}{c})^2]\geqslant(\frac{b^2-c^2}{a})^2$$

但 $$2[(\frac{a^2-c^2}{b})^2+(\frac{a^2-b^2}{c})^2]\geqslant(\left|\frac{a^2-c^2}{b}\right|+\left|\frac{a^2-b^2}{c}\right|)^2$$

所以只需证$\left|\frac{a^2-c^2}{b}\right|+\left|\frac{a^2-b^2}{c}\right|\geqslant\left|\frac{b^2-c^2}{a}\right|$（见上题）.

22. 简证

$$\prod(2am_a)^2=\prod[16\Delta^2+(b^2-c^2)]=(16\Delta^2)^3+(16\Delta^2)^2\cdot\sum(b^2-c^2)^2+$$
$$16\Delta^2\sum(a^2-b^2)^2(b^2-c^2)^2+(b^2-c^2)^2(c^2-a^2)^2(a^2-b^2)^2\geqslant$$
$$(16\Delta^2)^3+(16\Delta^2)^2\cdot\sum(b^2-c^2)^2+16\Delta^2\sum[(a^2-b^2)(b^2-c^2)]^2=$$
$$(16\Delta^2)^3+(16\Delta^2)^2\cdot 2(\sum a^4-\sum b^2c^2)+16\Delta^2(\sum a^4-\sum b^2c^2)^2=$$
$$16\Delta^2[(16\Delta^2)^2+(\sum a^4-\sum b^2c^2)\cdot(32\Delta^2+\sum a^4-\sum b^2c^2)]=$$
$$16\Delta^2[(16\Delta^2)^2+(\sum b^2c^2-16\Delta^2)(\sum b^2c^2+16\Delta^2)]=$$
$$16\Delta^2(\sum b^2c^2)^2$$

注：参见《数学通报》1995 年第 12 期，杨学枝文："一个三角形中线不等式".

23. 简证

$$式(1)\Leftrightarrow\sum(2am_a-4\Delta)\geqslant 2(\sqrt{\sum b^2c^2}-4\Delta)\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{(2am_a)^2-16\Delta^2}{2am_a+4\Delta}\geqslant\frac{2[\sum b^2c^2-16\Delta^2]}{\sqrt{\sum b^2c^2}+4\Delta}\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{(b^2-c^2)^2}{2am_a+4\Delta}\geqslant\frac{\sum(b^2-c^2)^2}{\sqrt{\sum b^2c^2}+4\Delta}\Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{\sqrt{\sum b^2c^2}-2am_a}{2am_a+4\Delta}(b^2-c^2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{(\sqrt{\sum b^2c^2})^2-(2am_a)^2}{(2am_a+4\Delta)(\sqrt{\sum b^2c^2}+2am_a)}(b^2-c^2)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)^2}{(2am_a+4\Delta)(\sqrt{\sum b^2c^2}+2am_a)} \geqslant 0$$

由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,去证上式成立即可. 这时

$$\text{上式左边} \geqslant \frac{(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2)}{(2bm_b+4\Delta)(\sqrt{\sum b^2c^2}+2bm_b)}=0$$

(2) 类似证之.

注:参见《中学数学》(湖北),1999 年第 3 期,杨学枝文:“关于三角形中线的一组不等式”.

以上题 22,23 均出自“关于三角形中线的几个不等式”(见第十一章“初等不等式研究文章”(2) 的特例).

24. 简证

$$(\sum a)^3-8(a^2b+b^2c+c^2a)=[\sum a^3-\sum ab(a+b)+2abc]+$$
$$4(ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a)+4abc=$$
$$-\prod(-a+b+c)-4(a-b)(b-c)(a-c)+4abc \geqslant$$
$$-\prod(-a+b+c)-4(a-b)(b-c)(a-c)+$$
$$4\prod(-a+b+c)+4(a-b)(b-c)(a-c)=$$
$$3\prod(-a+b+c)$$

注:(1) 这里应用了

$$abc \geqslant \prod(-a+b+c)+|(a-b)(b-c)(a-c)|$$

(2) 参见《中学教研(数学)》(浙江),2001 年第一期,杨学枝文:“也谈一个非对称三角形不等式”.

25. 简证

$$m_a+2t_b \leqslant \sqrt{3(m_a^2+2t_b^2)} \leqslant \sqrt{\frac{3}{4}[2b^2+2c^2-a^2+2(a+c)^2-2b^2]}=$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}(a+2c)$$

同理 $m_a+2t_c \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+2b)$,将以上两式左右两边分别相加即得.

26. 提示：在第一章"等价变换法证明不等式"的式(9)里，令 $x=\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$，$y=\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}$，$z=\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}$，$w=\frac{1}{\sin\frac{D}{2}}$. 这时可证

$$\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}+\cot\frac{D}{2}$$

注：更一般的有以下不等式.

设 $\alpha_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i=(2k_1+1)\pi(k_1\in z)$；$\beta_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n)$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i=(2k_2+1)\pi\ (k_2\in\mathbf{Z})$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\alpha_i}{\sin\beta_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\cot\beta_i$$

当且仅当 $\cos\alpha_i=\cos\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号.

取 $n=4$，可得下面命题.

命题：设 $\lambda_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,3,4)$，$a_i$ 为平面凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 四边长，其面积为 Δ，则

$$\sum_{i=1}^{4}\lambda_i a_i^2\geqslant 4\sqrt{\frac{\lambda_2\lambda_3\lambda_3+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}}\Delta$$

当且仅当四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 内接于圆，且 $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3:\lambda_4=(-a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+\frac{2a_2a_3a_4}{a_1}):(a_1^2-a_2^2+a_3^2+a_4^2+\frac{2a_1a_3a_4}{a_2}):(a_1^2+a_2^2-a_3^2+a_4^2+\frac{2a_1a_2a_4}{a_3}):(a_1^2+a_2^2+a_3^2-a_4^2+\frac{2a_1a_2a_3}{a_4})$ 时取等号.

注：证明可参见《数学通讯》，1991 年第 6 期"问题及解答"栏中，杨学枝评注(Ⅳ).

27.（自创题，1993.05.05）在平面凸四边形 $ABCD$ 中，有

$$\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right)\left(\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}\right)\left(\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\right)\left(\tan\frac{D}{2}+\tan\frac{A}{2}\right)\geqslant\left(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{D}{2}\right)^2$$

当且仅当四边形为矩形时取等号.

提示：据代数不等式：设 $x_1,x_2,x_3,x_4\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则

$$(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_4)(x_4+x_1)\geqslant\sum x_1\cdot\sum x_2x_3x_4$$

令 $x_1 = \tan\frac{A}{2}$ 等,并注意到

$$\sum\tan\frac{A}{2} = \sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\tan\frac{D}{2}$$

28. P,Q 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 所在平面上任意两点,则

$$PA_1\cdot QA_1\sin A_1 + PA_2\cdot QA_2\sin A_2 + PA_3\cdot QA_3\sin A_3 \geqslant 2\Delta$$

或
$$PA_1\cdot QA_1\cdot a_1 + PA_2\cdot QA_2\cdot a_2 + PA_3\cdot QA_3\cdot a_3 \geqslant a_1a_2a_3$$

简证:设 x_1,x_2,x_3,x 为任意复数,且 x_1,x_2,x_3 互不相等,则有等式

$$\frac{x_1(x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2(x-x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{x_3(x-x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=1$$

令 P 对应复数 0, Q 对应复数 x. A_1,A_2,A_3 分别对应复数 x_1,x_2,x_3,则

$$\frac{PA_1\cdot QA_1}{a_2a_3}+\frac{PA_2\cdot QA_2}{a_1a_3}+\frac{PA_3\cdot QA_3}{a_1a_2}=$$

$$\frac{|x_1||x-x_1|}{|x_1-x_2||x_1-x_3|}+\frac{|x_2||x-x_2|}{|x_2-x_1||x_2-x_3|}+\frac{|x_3||x-x_3|}{|x_3-x_1||x_3-x_2|}\geqslant$$

$$\left|\frac{x_1(x-x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+\frac{x_2(x-x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+\frac{x_3(x-x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right|=1$$

注:(1) 在不等式证明中,有时应用复数方法尤为简捷.

(2) 本题可向 n 边形推广.

29. 提示:(1),(2) 可用增量比较法证之;

(3) 由

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}=\sum x+\sum\frac{(x-y)^2}{y}\geqslant\sum x+\frac{(\sum|x-y|)^2}{\sum x}\geqslant$$

$$\sum x+\frac{2\sum(y-z)^2}{\sum x}$$

即得;

(4) 应用第三章"放缩法证明不等式"中式(8)

$$x^2y+y^2z+z^2x+xyz\leqslant\frac{4}{27}(\sum x)^3$$

则式(4) 等价于

$$\sum x\cdot(\sum x^2y+xyz)\leqslant\frac{4}{27}(\sum x)^4$$

(5) 应用式(3) 及等式

$$\sum x\cdot(\sum xy^2+xyz)=\sum xy^3+(\sum yz)^2$$

30. 简证一:由

$$-\frac{15}{4}xyz\sum x+\frac{9}{4}\sum y^2z^2+\frac{3}{2}(x^3y+y^3z+z^3x)=$$

$$\frac{3}{4}(\sum x)(y+z)(z+x)(x+y)+$$

$$\frac{3}{4}(\sum x)(x-y)(x-z)(y-z)+$$

$$\frac{3}{4}\sum y^2z^2-\frac{27}{4}xyz\sum x$$

于是,要证原式,只需证

$$\frac{3}{4}(\sum x)[\prod(y+z)]+\frac{3}{4}\sum y^2z^2-\frac{27}{4}xyz\sum x\geqslant$$

$$\frac{3}{4}(\sum x)\mid(x-y)(x-z)(y-z)\mid \qquad (※)$$

不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则

$$(\sum x)\cdot\prod(y+z)+\sum y^2z^2-9xyz\sum x-(\sum x)(x-y)(x-z)(y-z)=$$

$$\sum yz(y^2+z^2)+3\sum y^2z^2-5xyz\sum x-(\sum x)(x-y)(x-z)(y-z)=$$

$$\sum yz(y-z)^2+\frac{5}{2}\sum x^2(y-z)^2-(\sum x)(x-y)(x-z)(y-z)=$$

$$yz(y-z)^2+xy(x-y)^2+xz(x-y+y-z)^2+$$

$$\frac{5}{2}\sum x^2(y-z)^2+\frac{5}{2}\sum z^2(x-y)^2+\frac{5}{2}\sum y^2(x-y+y-z)^2-$$

$$(x+y+z)(x-y)^2(y-z)-(x+y+z)(x-y)(y-z)^2=$$

$$[xy+xz+\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{2}y^2-(x+y+z)(y-z)](x-y)^2+$$

$$[yz+xz+\frac{5}{2}x^2+\frac{5}{2}y^2-(x+y+z)(x-y)](y-z)^2+$$

$$(2xz+5y^2)(x-y)(y-z)=$$

$$(\frac{3}{2}y^2+\frac{7}{2}z^2+2xz)(x-y)^2+(\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}y^2+2yz)(y-z)^2+$$

$$(2xz+5y^2)(x-y)(y-z)\geqslant 0$$

注:原式虽不是对称式不等式,但可化式(※)成对称式不等式.

简证二:因为 $x^3y+y^2z^2+y^3z\geqslant 3xy^2z$,另外还有两个式子,所以

$$\sum x^3y\geqslant\frac{1}{2}(3xyz\sum x-\sum y^2z^2)$$

所以

$$\frac{3}{2}\sum x^3y+\frac{9}{4}\sum y^2z^2\geqslant\frac{3}{4}(3xyz\sum x-\sum y^2z^2)+\frac{9}{4}\sum yz=$$

$$\frac{9}{4}xyz\sum x+\frac{3}{2}\sum y^2z^2\geqslant$$
$$\frac{9}{4}xyz\sum x+\frac{3}{2}xyz\sum x=\frac{15}{4}xyz\sum x$$

即得原式.

31. 提示:用增量比较法证之.

32. 提示:有恒等式

$$K^2=(16FF')^2+[2(ab+cd)(a'^2+b'^2-c'^2-d'^2)-2(a'b'+c'd')(a^2+b^2-c^2-d^2)]^2$$

或据

$$(p^2-q^2)(x^2-y^2)\leqslant(px-qy)^2$$

注:参见《厦门数学通讯》,1986 年第 2 期,杨学枝文:"匹多不等式的四边形推广的代数证法".

33. 提示:可用增量比较法证之. 参见《数学教师》,1987 年第 2 期,杨学枝文:"关于平面四边形的一个不等式".

34. 简证:设 $x_i=\dfrac{1}{1+y_i}$,即 $y_i=\dfrac{1-x_i}{x_i}=\dfrac{\sum x_1-2x_i}{2x_i}$,于是

原式 $\Leftrightarrow 2[\frac{(x-2x_1)(x-2x_2)}{4x_1x_2}+\frac{(x-2x_1)(x-2x_3)}{4x_1x_3}+\frac{(x-2x_1)(x-2x_4)}{4x_1x_4}+\frac{(x-2x_2)(x-2x_3)}{4x_2x_3}+\frac{(x-2x_2)(x-2x_4)}{4x_2x_4}+\frac{(x-2x_3)(x-2x_4)}{4x_3x_4}]\geqslant 3[\frac{x-2x_1}{2x_1}+\frac{x-2x_2}{2x_2}+\frac{x-2x_3}{2x_3}+\frac{x-2x_4}{2x_4}]$(以上 $x=\sum\limits_{i=1}^{4}x_i$)$\overset{去分母}{\Leftrightarrow}$

$(x_1^2+x_2^2)x_1x_2+(x_1^2+x_3^2)x_1x_3+(x_1^2+x_4^2)x_1x_4+(x_2^2+x_3^2)x_2x_3+(x_2^2+x_4^2)x_2x_4+(x_3^2+x_4^2)x_3x_4+2[(x_1x_2)^2+(x_1x_3)^2+(x_1x_4)^2+(x_2x_3)^2+(x_2x_4)^2+(x_3x_4)^2]-4[x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)+x_1x_3x_4(x_1+x_3+x_4)+x_1x_2x_4(x_1+x_2+x_4)+x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]+24x_1x_2x_3x_4\geqslant 0\Leftrightarrow$

$4[(x_1x_2+x_3x_4)^2+(x_1x_3+x_2x_4)^2+(x_1x_4+x_2x_3)^2]-4[x_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4)+x_1x_3x_4(x_1+x_3+x_4)+x_1x_2x_4(x_1+x_2+x_4)+x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)]\geqslant 0\Leftrightarrow$

$[(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1x_3+x_2x_4)]^2+[(x_1x_2+x_3x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]^2+[(x_1x_3+x_2x_4)-(x_1x_4+x_2x_3)]^2\geqslant 0$

注:参阅《福建中学数学》,1992 年第 2 期,杨学枝文:"关于四面体的高线与旁切球半径的几个不等式".

35. 提示:$\prod\limits_{i=1}^{n}(1+a_i)+\prod\limits_{i=1}^{n}(1-a_i)\geqslant 0$. 展开即得.

注:参阅《现代中学生》(吉林)1992年第9期,杨学枝文:"一道习题的简证与延伸".

36. 简证:要用到 $4a^2bc \geqslant (b+c)^2(a-b+c)(a+b-c)$(易证). 于是

$$w_b w_c = \frac{\sqrt{ac(a+b+c)(a-b+c)}}{a+c} \cdot \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b} =$$

$$\frac{(a+b+c) \cdot \sqrt{4a^2bc} \cdot \sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}{2(a+b)(a+c)} \geqslant$$

$$\frac{(a+b+c) \cdot (b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2(a+b)(a+c)}$$

因此

$$\sum \frac{1}{w_a} = \frac{\sum w_b w_c}{w_a w_b w_c} \geqslant \frac{\prod (b+c)}{4\Delta abc(a+b+c)} \cdot$$

$$\sum \frac{(b+c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2(a+b)(a+c)} =$$

$$\frac{1}{8abc\Delta}[32\Delta + 2abc\sum a] =$$

$$\frac{4\Delta}{abc} + \frac{a+b+c}{4\Delta} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2r}$$

注:(1) 参阅《数学通讯》,1994年第5期,杨学枝文:"关于角平分线的几个不等式".

(2)《数学通讯》,1995年第8期,杨学枝文:"关于角平分线的一个不等式"中给出了:$\sum \frac{1}{w_a} \geqslant \sqrt{\frac{1}{Rr} + \frac{1}{2r^2}}$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号. 此式较35题中的不等式要强.

(3)《中学数学》(湖北)1994年第7期,杨学枝文:"关于三角形角平分线的一个不等式"中还给出:$\sum \frac{1}{w_a} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \frac{1}{a}$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

(4)《中学数学》(江苏),1996年第10期,杨学枝文:"二个角平分线不等式的加强"中给出了 $\sum \frac{1}{w_a} \geqslant \frac{1}{R} + \frac{1}{2r}$ 与 $\sum \frac{1}{w_a} \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} \sum \frac{1}{a}$ 的加强:$(\sum \frac{1}{w_a})^2 \geqslant (\sum \frac{1}{a})^2 + (\frac{1}{2r})^2$,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时取等号.

37. 注:这是笔者于1994年3月23日提出的一个猜想,后由湖南农业大学陈宽江(当时为学生)给出了一种证明,见《中学数学》(湖北),1996年第6期文:"一个代数不等式的证明",文中应用了三角代换,设 x,y 同号,且 $x =$

$-z\sin^2\theta, y=-z\cos^2\theta$，并应用数学归纳法和求导方法证明，能否找到初等证法？

陈宽仁同学在文末还提出了如下猜想：设 $n,m\in\mathbf{N}, n>3, m\geqslant 1, x_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，则

$$[(n-1)+(n-1)^2]\sum_{i=1}^{n}x_i^{2m}\geqslant[(n-1)+(n-1)^{2m}](\sum_{i=1}^{n}x_i^2)^m$$

38. 注：(1) 中不等式为浙江吴跃生先生给出. 见《中等数学》，1997 年第四期文："关于费尔马点的一个不等式". (2) 中不等式为笔者给出，解答见《中等数学》，1998 年第二期，杨学枝文"关于费尔马点的又一个不等式". 文中得到

$$\sum r_1=\frac{2abc}{\sqrt{3}f^2}\sum\sin(B+\frac{\pi}{3})\sin(C+\frac{\pi}{3})\geqslant\frac{2\Delta}{\sqrt{3}R}$$

(注意到 $\triangle ABC$ 三个内角均不大于$\frac{2\pi}{3}$) 其中 $f^2=\frac{1}{2}\sum a^2+2\sqrt{3}\Delta$.

39. 简证

$$\frac{a^2+b^2-m^2}{ab}=\frac{c^2+d^2-n^2}{cd}\Leftrightarrow\frac{(ac-bd)(ad-bc)}{abcd}=\frac{m^2}{ab}-\frac{n^2}{cd}$$

所以

$$\frac{(ab-cd)(ac-bd)(ad-bc)}{abcd}=(ab-cd)(\frac{m^2}{ab}-\frac{n^2}{cd})\leqslant(m-n)^2$$

注：条件可放宽为 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，且 $abcd>0$，则结论仍成立.

40. 提示：原式条件可改为

$$(a_1x+b_1y)^2+(a_2x+b_2y)^2=1$$

设 $$a_1x+b_1y=\cos\alpha,\ a_2x+b_2y=\sin\alpha$$

41. 简证：应用复数方法证明.

设 P,A_1,A_2,A_3 对应的复数分别为 z,z_1,z_2,z_3，则

$|A_2A_3|\cdot PA_1^2+|A_3A_1|\cdot PA_2^2+|A_1A_2|\cdot PA_3^2=$

$|z_2-z_3|\cdot|z-z_1|^2+|z_3-z_1|\cdot|z-z_2|^2+|z_1-z_2|\cdot|z-z_3|^2\geqslant$

$|(z_2-z_3)(z-z_1)^2+(z_3-z_1)(z-z_2)^2+(z_1-z_2)(z-z_3)^2|=$

$|z_1^2(z_2-z_3)+z_2^2(z_3-z_1)+z_3^2(z_1-z_2)|=$

$|(z_1-z_3)(z_2-z_3)(z_1-z_3)|=$

$|A_1A_2|\cdot|A_2A_3|\cdot|A_3A_1|$

42. 提示

$4\sum\sin\alpha_1\cos\alpha_1=$

$\sum(-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)(-\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4)\geqslant$

$4[\pi(-\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)(-\cos\alpha_1+\cos\alpha_2+\cos\alpha_3+\cos\alpha_4)]^{\frac{1}{4}}=$

$2[\sum_{i=1}^{4}\sin 2\alpha_i\cdot\sum_{i=1}^{4}\sin 2\beta_i]^{\frac{1}{2}}$

注:证明可参见吴康主编的《奥赛金牌之路》(高中数学),"第一章 §6 三角不等式"P84 ~ 85. 也可参见杨学枝、林章衍主编的《福建省初等数学研究文集》中杨学枝文:"一个新的三角不等式及其应用".(《福建省初等数学研究文集》,由福建教育出版社 1993 年 7 月出版)

43. 简证:设 $x=k\cos\alpha, y=k\sin\alpha\ (0\leqslant k\leqslant 1)$,则

$$
\begin{aligned}
|ax^2+bxy+cy^2| &= k^2|a\cos^2\alpha+b\sin\alpha\cos\alpha+c\sin^2\alpha|\leqslant\\
&k^2\left|\frac{a+c}{2}+\frac{a-c}{2}\cos 2\alpha+\frac{b}{2}\sin 2\alpha\right|\leqslant\\
&\left|\frac{a+c}{2}\right|+\left|\frac{a-c}{2}\cos 2\alpha+\frac{b}{2}\sin 2\alpha\right|\leqslant\\
&\left|\frac{a+c}{2}\right|+\sqrt{(\frac{a-c}{2})^2+(\frac{b}{2})^2}
\end{aligned}
$$

44. 简证

$$
\begin{aligned}
6\sum(x-y+z)x^3 &= 3\sum y^2z^2+3\sum(-x^2+y^2+xy)^2\geqslant\\
&3\sum y^2z^2+(\sum yz)^2
\end{aligned}
$$

45. 简证:(1) 若直线 BD,AC 斜率都存在且分别为 k_1,k_2,F_1,F_2 坐标分别为 $(-c,0),(c,0)$,则直线 BD,AC 方程分别为 $y=k_1(x+c),y=k_2(x-c)$,且

$$|1+k_1k_2|=|k_2-k_1|\cot\alpha \qquad ①$$

将 $y=k_1(x+c)$ 代入椭圆方程并整理得

$$(\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2})x^2+\frac{2k_1^2c}{b^2}x-(1-\frac{k_1^2c^2}{b^2})=0$$

设 $B(x_1,y_1),D(x_2,y_2)$,则

$$
\begin{aligned}
|BD| &= \sqrt{1+k_1^2}\cdot|x_1-x_2|=\\
&\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\\
&\sqrt{1+k_1^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\frac{2k_1^2c}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2}}\right)^2+\frac{4(1-\frac{2k_1^2c^2}{b^2})}{\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^2}{b^2}}}=\\
&\frac{2ab^2(1+k_1^2)}{a^2k_1^2+b^2}
\end{aligned}
$$

同理可得

$$|AC|=\frac{2ab^2(1+k_2^2)}{a^2k_2^2+b^2}$$

因此

$$|AC|\cdot|BD|=\frac{4a^2b^4(1+k_1^2)(1+k_2^2)}{(a^2k_1^2+b^2)(a^2k_2^2+b^2)}=$$

$$4a^2b^4\cdot\frac{(k_2-k_1)^2+(1+k_1k_2)^2}{(a^2k_1k_2+b^2)^2+a^2b^2(k_2-k_1)^2}=$$

$$4a^2b^4\cdot\frac{1+(\frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1})^2}{\frac{(a^2k_1k_2+b^2)^2}{(k_2-k_1)^2}+a^2b^2}\leqslant$$

$$\frac{4a^2b^4}{a^2b^2\sin^2\alpha}(\text{注意到式①})=$$

$$\frac{4b^2}{\sin^2\alpha}$$

原式成立.

(2) 若直线 BD 与 x 轴垂直,这时,易求得

$$|BD|=\frac{2b^2}{a},|AC|=\frac{2ab^2}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}$$

因此

$$|AC|\cdot|BD|=\frac{4b^4}{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}\leqslant\frac{4b^2}{\sin^2\alpha}$$

原式也成立.

综上,原式获证,由证明过程易得式 ① 取等号条件.

注:由原式,可编一道例题如下:

设椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$内接四边形 $ABCD$,对角线 BD 过左焦点 F_1,AC 过右焦点 F_2,BD,AC 交于 P,$\angle BPC=120°$,求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

46. 简证:记

$$s_1=x+y+z=3,s_2=yz+zx+xy,s_3=xyz$$

则

$$\text{原式}\Leftrightarrow 8s_2-81s_3+20s_2s_3\geqslant 0 \quad ①$$

设 $w=\sqrt{s_1^2-3s_2}=\sqrt{9-3s_2}$,即 $s_2=\frac{9-w^2}{3}(0\leqslant w\leqslant 3)$,由第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中定理 2,有

$$8s_2-81s_3+20s_2s_3\geqslant 81\cdot\frac{9-w^2}{3}-81\cdot\frac{(3+2w)(3-w)^2}{27}+$$

$$20\cdot\frac{9-w^2}{3}\cdot\frac{(3+2w)(3-w)^2}{27}=$$

$$\frac{1}{81}(3-w)(3-2w)^2(10w^2+15w+9) \geqslant 0$$

即得式①,故原式成立,由 $3-2w=0$,即 $w=\frac{2}{3}$ 易得取等号条件.

47. 提示:由 $(1+x)(1+y)-2(x+y)=(1-x)(1-y)\geqslant 0$,有

$$(1+x)(1+y)\geqslant 2(x+y)$$

48. 提示:由

$$(y^2+\frac{3}{4})(z^2+\frac{3}{4})-(y+z)=\frac{1}{4}(y+z-1)^2+(yz-\frac{1}{4})^2+\frac{1}{2}(y-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}(z-\frac{1}{2})^2\geqslant 0$$

有

$$(y^2+\frac{3}{4})(z^2+\frac{3}{4})\geqslant(y+z)$$

49. 简证

$$\sum\frac{a}{(a+1)(b+1)}-\frac{3}{4}=\frac{\sum bc+\sum a}{\prod(a+1)}-\frac{3}{4}=$$

$$\frac{4\sum bc+4\sum a-3-3\sum a-3\sum bc-3abc}{4\prod(1+a)}=$$

$$\frac{\sum a+\sum bc-6}{4\prod(a+1)}\geqslant 0$$

(注意到 $abc=1$,且 $\sum a\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$, $\sum bc\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3$).

50. 简证:$\frac{a^2}{b}+b-2a=\frac{(a-b)^2}{b}$,$\frac{b^2}{c}+c-2b=\frac{(b-c)^2}{c}$,$\frac{c^2}{a}+a-2c=\frac{(c-a)^2}{a}$,以上三式相加,得

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=(a+b+c)+\frac{(a-c)^2}{a}+\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(c-b)^2}{c}$$

再应用柯西不等式,有

$$(a+b+c)[\frac{(a-c)^2}{a}+\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{(c-b)^2}{c}]\geqslant$$

$$(a-c+a-b+c-b)^2=4(a-b)^2$$

当且仅当 $\frac{a}{a-c}=\frac{b}{a-b}=\frac{c}{c-b}(a\geqslant c\geqslant b)$ 时取等号,即

$$\begin{cases}a^2+bc=2ab\\b^2+ac=2bc\\c^2=ab\end{cases}$$

由三式中消去 a,得到当 $b^3+c^3=2b^2c$ 时取等号.

注:等式$\frac{a^2}{b}=2a-b+\frac{(a-b)^2}{b}$,在证明有关不等式时值得注意.

51. 简证:由于

$$27-12\sum x+\sum x\sum yz=27-12\sum x+\sum x\cdot\frac{(\sum x)^2-\sum x^2}{2}\geqslant$$

$$27-12\sum x+\frac{(\sum x)^3-3\sum x}{2}=$$

$$\frac{1}{2}(\sum x-3)^2(\sum x+6)\geqslant 0$$

因此,只要证 $12\sum x-\sum x\sum yz\geqslant 7\sum x\sum yz-36xyz$,即 $3\sum x+9xyz\geqslant 2\sum x\sum yz$,此式可由以下得到

$$3\sum x+9xyz-2\sum x\sum yz\geqslant\sum x\sum x^2+9xyz-2\sum x\sum yz=$$

$$(\sum x)^3-4\sum x\sum yz+9xyz\geqslant 0$$

(最后一式参见第一章"等价变换法证明不等式"中例 14).

52. 简证

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{1-a-b+ab}}=\sqrt{\frac{ab}{(1-a)(1-b)}}\leqslant\frac{1}{2}(\frac{a}{1-b}+\frac{b}{1-a})$$

类似还有两式,所以

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}}+\sqrt{\frac{bc}{a+bc}}+\sqrt{\frac{ca}{b+ca}}=\sum\sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum(\frac{a}{c+a}+\frac{b}{c+b})=\frac{3}{2}$$

53. 简证:因为

$$6=\sum x+\sum x^2\geqslant 2\sqrt{\sum x\sum x^2}$$

所以

$$9\geqslant\sum x\sum x^2=\sum x^3+\sum x^2(y+z)=$$

$$\sum(x^3+xy^2)+\sum x^2y\geqslant$$

$$2\sum x^2y+\sum x^2y=3\sum x^2y$$

54. 简证:记 $\lambda=2+2\sqrt{3}$,并将原式齐次化,即证

$$\sum bc+\lambda(\sqrt[3]{abc})^2\geqslant\frac{3+\lambda}{3}\cdot\sqrt[3]{abc}\cdot\sum a \qquad ①$$

令 $a=x^3,b=y^3,c=z^3$,且记 $s_1=\sum x=1,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,则式①等价于

$$\sum y^3z^3+\lambda(xyz)^2\geqslant\frac{3+\lambda}{3}xyz\sum x^3\Leftrightarrow$$

$$s_2^3+\lambda s_1s_2s_3\geqslant\frac{3+\lambda}{3}s_1^3s_3\Leftrightarrow$$

$$s_2^3\geqslant(\frac{3+\lambda}{3}-\lambda s_2)s_3 \qquad ②$$

设 $\omega=\sqrt{1-3s_2}$,即 $s_2=\frac{1-\omega^2}{3},0\leqslant\omega\leqslant1$,则有

$$s_3\leqslant\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{27}$$

(参见第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中定理2的推论3)因此,要证式②只需证

$$(\frac{1-\omega^2}{3})^3\geqslant[\frac{3+\lambda}{3}-\frac{\lambda(1-\omega^2)}{3}]\cdot\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{27}\Leftrightarrow$$

$$x^2[(6-\lambda)-6\omega+(3+3\lambda)\omega^2-2\lambda x^3-3\omega^4]\geqslant0\Leftrightarrow$$

$$x^2(1-\omega)[(6-\lambda)-\lambda\omega+(3+2\lambda)\omega^2+3\omega^3]\geqslant0$$

又由于 $\omega^2\geqslant0,1-\omega\geqslant0$,因此,又只需证

$$(6-\lambda)-\lambda\omega+(3+2\lambda)\omega^2+3\omega^3\geqslant0 \qquad ③$$

由于 $\lambda=2+2\sqrt{3}$,则 $6-\lambda=2(2-\sqrt{3})>0$,且有

$$(-\lambda)^2-4(6-\lambda)(3+2\lambda)=9(\lambda^2-4\lambda-8)=0$$

因此,$(6-\lambda)-\lambda\omega+(3+2\lambda)\omega^2\geqslant0$,又 $\omega\geqslant0$,故式③成立,从而原式成立.由证明中知,当且仅当 $a=b=c=1$ 时原式取等号.

55. 简证:设 $x=-a+b+c,y=a-b+c,z=a+b-c,x,y,z\in\mathbf{R}^+$,则

$$\sum\left(\frac{r_a}{a}\right)^2-\frac{9}{4}=\left[\sum\frac{yz}{xy+zx}-\frac{3}{2}\right]-\sum\left[\frac{1}{4}-\frac{yz}{(y+z)^2}\right]=$$

$$\sum\frac{(y-z)^2}{2(x+y)(z+x)}-\sum\frac{(y-z)^2}{4(y+z)^2}=$$

$$\frac{1}{4\prod(y+z)}\sum(-x^2+2y^2+2z^2+3yz-xy-zx)\frac{(y-z)^2}{(y+z)}$$

由 x,y,z 对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则易证有

$$\frac{(x-z)^2}{x+z}\geqslant\frac{(x-y)^2}{x+y},\ \frac{(x-z)^2}{x+z}\geqslant\frac{(y-z)^2}{y+z}$$

同时还有

$$2x^2-y^2+2z^2+3zx-yz-xy\geqslant 0$$
$$2x^2+2y^2-z^2+3xy-zx-yz\geq 0$$

因此

$$\sum(-x^2+2y^2+2z^2+3xy-xy-zx)\frac{(y-z)^2}{y+z}\geqslant$$
$$(-x^2+2y^2+2z^2+3xy-xy-zx)\frac{(y-z)^2}{y+z}+$$
$$(2x^2-y^2+2z^2+3zx-yz-xy)\frac{(y-z)^2}{y+z}=$$
$$(x^2+y^2+4z^2+2yz+2zx-2xy)\frac{(y-z)^2}{y+z}\geqslant$$
$$0$$

故
$$\left(\sum\frac{r_a}{a}\right)^2\geqslant\frac{9}{4}$$

56. 提示：$\frac{a}{a^2+1}-\frac{3}{10}\leqslant\frac{18}{25}(a-\frac{1}{3})\Leftrightarrow(3a-1)^2(4a+3)\geqslant 0.$

推广：设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=1$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n\geqslant -\frac{2n}{n^2-1}(n>1)$，则

$$\sum\frac{a_1}{a_1^2+1}\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{n}$ 时取等号.

简证：由待定系数法可求得使

$$\frac{a_i}{a_i^2+1}-\frac{n}{n^2+1}\leqslant\lambda(a-\frac{1}{n})\quad i=1,2,\cdots,n$$

成立的

$$\lambda=\frac{n^2(n^2-1)}{(n^2+1)^2}$$

于是可得

$$\sum\frac{a_1}{a_1^2+1}-\sum\frac{n}{n^2+1}\leqslant 0$$

即
$$\sum\frac{a_1}{a_1^2+1}\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}$$

57. 简证

$(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x})^4-27\sum x^4=[\sum x+\sum\frac{(x-y)^2}{y}]^4-27\sum x^4=$

$(\sum x)^4+4(\sum x)^3\cdot\sum\frac{(x-y)^2}{y}+6(\sum x)^2\cdot[\sum\frac{(x-y)^2}{y}]^2+$

$4\sum x\cdot[\sum\frac{(x-y)^2}{y}]^3+[\sum\frac{(x-y)^2}{y}]^4-27\sum x^4\geqslant$

$(\sum x)^4+4[y^3+3y^2(x+z)+3y(x+z)^2+(x+z)^3]\cdot$

$\sum\frac{(x-y)^2}{y}+6(\sum|x-y|)^4-27\sum x^4\geqslant$

$(\sum x)^4-27\sum x^4+4[y^3+3y^2(x+z)+3y(x+z)^2+(x+z)^3]\frac{(x-y)^2}{y}+$

$6[\sum(x-y)^2+2\sum(x-y)(x-z)]^2\geqslant$

$-9\sum(x+y)^2(x-y)^2-4\sum(x^2+xy+y^2)(x-y)^2-6\sum z^2(x-y)^2+$

$4\sum(y^2+3xy+3yz+6xz+3x^2+3z^2)(x-y)^2+6[2\sum(x-y)^2]^2=$

$\sum[-9(x+y)^2-4(x^2+xy+y^2)-6z^2+4y^2+12xy+12yz+24xz+$

$12x^2+12z^2+24(x-y)^2+24(x-z)^2+24(y-z)^2](x-y)^2=$

$\sum(47x^2+39y^2+54z^2-36yz-24xz-58xy)(x-y)^2=$

$\sum[29(x-y)^2+10(y-2z)^2+4yz+12(x-z)^2+6x^2+2z^2](x-y)^2\geqslant$

0

注:在 Tran Phuong 著《Diamonds in Mathematical Inequalities》中有以下更强命题.

设 $a,b,c>0$,则

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geqslant 3\cdot\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}$$

(参见第二章“增量比较法证明不等式”中例 17).

58. 简证

原式 $\Leftrightarrow(\sum|a|+|\sum a|)^2\geqslant(\sum|b+c|)^2\Leftrightarrow$

$$\sum(|b|\cdot|c|)+\sum(|a|\cdot|\sum a|)\geqslant\sum(|a+b|\cdot|a+c|)$$

但由于

$$\sum(|b|\cdot|c|)+\sum(|a|\cdot|\sum a|)=$$

$$\sum(|b|\cdot|c|+|a|\cdot|a+b+c|)\geqslant$$

$$\sum |bc + a^2 + ab + ac| = \sum |(a+b)(a+c)|$$

故原式成立.

59. 简证一:令 $a = x^6, b = y^6, c = z^6$,则原式等价于

$$\sum x^6 + 3x^2y^2z^2 \geqslant 2\sum y^3z^3 \qquad (※)$$

今证式(※)成立.

由对称性,不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$,则

$$\sum x^6 + 3x^2y^2z^2 - 2\sum y^3z^3 = (\sum x^6 - \sum y^3z^3) - (\sum y^3z^3 - 3x^2y^2z^2) =$$
$$\frac{1}{2}\sum (y^3 - z^3)^2 - \frac{1}{2}(\sum yz)\cdot \sum x^2(y-z)^2 =$$
$$\frac{1}{2}\sum [(y^2 + yz + z^2)^2 - x^2\sum yz](y-z)^2$$

由于 $x \geqslant y \geqslant z$,则

$$(x^2 + xy + y^2)^2 - z^2(yz + zx + xy) \geqslant z^2(x+y+z)^2 - z^2(yz + zx + xy) \geqslant 0$$

$$(x^2 + xz + z^2)^2 - y^2(yz + zx + xy) =$$
$$x^4 + 2x^2(xz + z^2) + (xz + z^2)^2 - y^2(yz + zx + xy) =$$
$$(x^4 - xy^3) + 2(2x^3 - xy^2 - y^3)z + 2x^2z^2 + (xz + z^2)^2 \geqslant 0$$

又 $(x-z)^2 \geqslant (y-z)^2$,因此

$$\sum [(y^2 + yz + z^2)^2 - x^2\sum yz](y-z)^2 \geqslant$$
$$[(x^2 + xz + z^2)^2 - y^2\sum yz](x-z)^2 + [(y^2 + yz + z^2)^2 - x^2\sum yz](y-z)^2 \geqslant$$
$$[(x^2 + xz + z^2)^2 - y^2\sum yz + (y^2 + yz + z^2)^2 - x^2\sum yz](y-z)^2 =$$
$$[(x^4 + y^4 - x^3y - xy^3) + (x^3 + y^3 - x^2y - xy^2)z + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + (xz + z^2)^2 + (yz + z^2)^2](y-z)^2 =$$
$$[(x^2 + xy + y^2)(x-y)^2 + z(x+y)(x-y)^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + (xz + z^2)^2 + (yz + z^2)^2](y-z)^2 \geqslant 0$$

故式(※)成立.

简证二:令 $a = x^4, b = y^4, c = z^4$,则原式等价于

$$3\sqrt[3]{(xyz)^4} \geqslant 2\sum y^2z^2 - \sum x^4 = (\sum x)\cdot \prod(-x+y+z) \qquad (※)$$

若 x,y,z 不能组成三角形三边,则 $\prod(-x+y+z) \leqslant 0$,式(※)显然成立;若 x,y,z 能组成三角形三边,设其面积为 Δ,则式(※)又等价于

$$3\sqrt[3]{(xyz)^4} \geqslant 16\Delta^2$$

在三角形中,易知此式成立.

简证三:令 $x=a^{\frac{1}{3}},y=b^{\frac{1}{3}},z=c^{\frac{1}{3}}$,则原式等价于

$$\sum x^6+3x^2y^2z^2\geqslant 2\sum y^3z^3$$

由于 $$\sum x^6+3x^2y^2z^2\geqslant\sum y^2z^2(y^4+z^4)\geqslant 2\sum y^3z^3$$

即得上式.

简证四:令 $x=a^{\frac{1}{2}},y=b^{\frac{1}{2}},z=c^{\frac{1}{2}}$,且 $abc=1$,则

$$\text{原式}\Leftrightarrow 3+s_1^2-4s_2\geqslant 0$$

因为 $$3s_1+s_1^3-4s_1s_2\geqslant 3s_1-9s_3=3(s_1-3)$$

又 $$s_1\geqslant 3\sqrt[3]{s_3}=3$$

所以 $$3s_1+s_1^3-4s_1s_2\geqslant 0$$

即 $$3+s_1^2-4s_2\geqslant 0$$

60. 简证:不妨设 $a\geqslant b$,则 $a^2+ab\geqslant b^2+ab$. 今证 $a^2+ab>2$.

若 $a^2+ab\leqslant 2$,则

$$b\leqslant\frac{2-a^2}{a}$$

又 $$3<a^2+ab+b^2\leqslant 2+b^2$$

所以 $$b^2>1,\ b>1$$

所以 $$1<b\leqslant\frac{2-a^2}{a}$$

所以 $$1\leqslant\frac{2-a^2}{a}$$

即 $$(a-1)(a+2)<0$$

所以 $$a<1$$

但 $b>1$,这与假设 $a>b$ 相矛盾. 故 $a^2+ab>2$.

61. 简证一:由于

$$\sum\frac{a^2}{a+b}=\sum\left[a-\frac{a+b}{4}+\frac{(a-b)^2}{4(a+b)}\right]=\frac{1}{2}\sum a+\frac{1}{4}\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}$$

因此,只需证

$$\left[\sum a+\frac{1}{2}\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}\right]^2\geqslant 3\sum a^2\Leftrightarrow$$

$$\left(\sum a\right)^2+\sum a\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}+\frac{1}{4}\left[\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}\right]^2\geqslant 3\sum a^2$$

由于

$$\sum a\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum|a-b|\right)^2$$

$$\frac{1}{4}\Big[\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}\Big]^2\geqslant 0$$

因此,又只需证

$$\frac{1}{2}(\sum|a-b|)^2\geqslant 3\sum a^2-(\sum a)^2=\sum(a-b)^2$$

即

$$(\sum|a-b|)^2\geqslant 2\sum(a-b)^2\qquad(※)$$

由于

$$\begin{aligned}(\sum|a-b|)^2&=\sum(a-b)^2+2\sum|(a-b)(a-c)|\geqslant\\&2\sum a^2-2\sum bc+2\sum(a-b)(a-c)=\\&2\sum(a-b)^2\end{aligned}$$

故式(※)成立.

简证二:易知$\sum\frac{a^2}{a+b}=\sum\frac{b^2}{a+b}$,于是有

$$\begin{aligned}&(2\sum\frac{a^2}{a+b})^2-3\sum a^2=(\sum\frac{a^2+b^2}{a+b})^2-3\sum a^2=\\&\Big[\sum(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\sum(a+b)\Big]^2-3\sum a^2=\\&\Big[\sum\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}+\sum a\Big]^2-3\sum a^2\geqslant\\&(\sum a)^2+\sum a\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}-3\sum a^2=\\&\sum a\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{a+b}-\sum(a-b)^2\geqslant\\&\sum(a-b)^2-\sum(a-b)^2=0\end{aligned}$$

62. 简证一:令$\sum\limits_{i=1}^4 a_i-a_j=3x_j(j=1,2,3,4)$,则$a_j=\sum\limits_{i=1}^4 x_i-3x_j(j=1,2,3,4)$,于是

$$\begin{aligned}&(\sum\frac{a_2^2+a_3^2+a_4^2}{a_2+a_3+a_4})^2-4\sum a_1^2=\\&\Big\{\sum\Big[x_1+\frac{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}{x_1}\Big]\Big\}^2-\\&4\sum(-2x_1+x_2+x_3+x_4)^2=\\&\Big[\sum x_1+\sum\frac{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}{x_1}\Big]^2-\end{aligned}$$

$$4(7\sum x_1^2-4\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j)\geqslant$$

$$(\sum x_1)^2+2\sum x_1\cdot\sum\frac{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}{x_1}-$$

$$28\sum x_1^2+16\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}x_ix_j=$$

$$2\sum x_1\cdot\sum\frac{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}{x_1}-9\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2\geqslant$$

$$2(\sum\sqrt{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2})^2-9\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2=$$

$$4[\sqrt{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}\cdot\sqrt{(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}+$$

$$\sqrt{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}\cdot$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_4)^2}+$$

$$\sqrt{(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}\cdot$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2}+$$

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}\cdot$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_4)^2}+$$

$$\sqrt{(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_3-x_4)^2}\cdot$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2}+$$

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_4)^2}\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_3)^2}]-$$

$$5\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2\geqslant$$

$$4[\frac{3}{2}(x_3-x_4)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_4)^2+\frac{3}{2}(x_2-x_3)^2+\frac{3}{2}(x_1-x_4)^2+\frac{3}{2}(x_1-x_3)^2+$$

$$\frac{3}{2}(x_1-x_2)^2]-5\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}(x_i-x_j)^2\geqslant 0$$

简证二

$$(\sum\frac{a_2^2+a_3^2+a_4^2}{a_2+a_3+a_4})^2-4\sum a_1^2=$$

$$\left[\sum(\frac{a_2^2+a_3^2+a_4^2}{a_2+a_3+a_4}-\frac{a_2+a_3+a_4}{3})+\sum\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right]^2-4\sum a_1^2=$$

$$\left[\sum\frac{(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2+(a_4-a_2)^2}{3(a_2+a_3+a_4)}+\sum a_1\right]^2-4\sum a_1^2\geqslant$$

$$(\sum a_1)^2+2\sum a_1\cdot\sum\frac{(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2+(a_4-a_2)^2}{3(a_2+a_3+a_4)}-4\sum a_1^2\geqslant$$

$$\frac{2}{3}\sum[(a_2-a_3)^2+(a_3-a_4)^2+(a_4-a_2)^2]-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=$$

$$\frac{4}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2=$$

$$\frac{1}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i-a_j)^2\geqslant 0$$

注:题62是湖北黄石二中杨志明老师在2006年8月7日 ~ 10日在湖北大学召开的全国第六届初数会期间提出的猜想,当时笔者给出了以上两种证明.

63. 简证:原式经去分母运算后可得到

$$a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2>\frac{17}{3}|(a-b)(b-c)(a-c)| \quad ①$$

作代换:$a=\frac{y+z}{2},b=\frac{z+x}{2},c=\frac{x+y}{2},x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$,式①变为

$$(y+z)(y-z)^2+(z+x)(z-x)^2+(x+y)(x-y)^2>\frac{17}{3}|(x-y)(y-z)(x-z)| \quad ②$$

因此,要证原式成立,只要证式②成立.

不妨设$x\geqslant y\geqslant z$,且令$x=z+\alpha+\beta,y=z+\alpha,\alpha,\beta\in\overline{\mathbf{R}^-}$,代入式②,可得

$$(2z+\alpha)\alpha^2+(2z+\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2+(2z+2\alpha+\beta)\beta^2-\frac{17}{3}\alpha\beta(\alpha+\beta)\geqslant 0$$

因为

$$z\geqslant 0$$

所以只要证

$$\alpha^3+(\alpha+\beta)^3+(2\alpha+\beta)\beta^2-\frac{17}{3}\alpha\beta(\alpha+\beta)\geqslant 0$$

即

$$3\alpha^3-4\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+3\beta^3\geqslant 0 \quad ③$$

若$\beta\geqslant\alpha$,则

$$式③左边=2\alpha(\alpha-\beta)^2+\alpha^3-3\alpha\beta^2+3\beta^3\geqslant 0$$

若$\alpha>\beta$,则

$$式③左边=2\alpha(\alpha-\beta)^2+\beta(\alpha-\frac{3}{2}\beta)^2+\alpha^3-\alpha^2\beta+\frac{3}{4}\beta^3\geqslant 0$$

故式③成立,式②也成立,故原式成立.

注:由上证明可知,原不等式右边的$\frac{17}{3}$并不是最佳值,事实上,由第二章“增量比较法证明不等式”中例14的证明过程可知,最佳值应为$\sqrt{16\sqrt{2}+13}$.

64. (1) 简证一:由$a+b+c+abc=4$知,a,b,c中必有一个不大于1,同时还有一个不小于1,不妨设这两个数为a,b,则

$$(1-a)(1-b)\leqslant 0$$

另外,由 $a+b+c+abc=4$,得到

$$c=\frac{4-a-b}{1+ab}$$

于是

$$\sum a-\sum bc=a+b+\frac{4-a-b}{1+ab}-ab-(a+b)\cdot\frac{4-a-b}{1+ab}=$$

$$\frac{1}{1+ab}[ab(a+b)+4-ab-(ab)^2-$$

$$4(a+b)+(a+b)^2]=$$

$$\frac{1}{1+ab}[(a+b-2)^2-ab(1-a)(1-b)]\geqslant 0$$

即

$$\sum a\geqslant\sum bc$$

简证二：反证法. 不妨设

$$\sum a<\sum bc$$

因为

$$(\sum a)^3-4\sum a\cdot\sum bc+9abc\geqslant 0$$

(此式见第一章"等价变换法证明不等式"中例 14,取 $n=3$ 情况) 所以

$$9abc\geqslant 4\sum a\cdot\sum bc-(\sum a)^3>$$

$$4(\sum a)^2-(\sum a)^3=$$

$$(\sum a)^2(4-\sum a)=$$

$$abc\cdot(\sum a)^2$$

所以

$$\sum a<3 \qquad (※)$$

另外,因为

$$a+b+c+abc=4$$

所以

$$a+b+c+\frac{1}{27}(\sum a)^3\geqslant 4$$

即

$$(\sum a-3)[(\sum a)^2+3\sum a+36]\geqslant 0$$

所以

$$\sum a\geqslant 3$$

这与式(※)矛盾,故 $\sum a\geqslant\sum bc$.

(2) 简证:因为

$$\sum a\sqrt{b+c}\cdot\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\geqslant(\sum a)^2$$

又 $$\sum a\sqrt{b+c}\leqslant\sqrt{\sum a\cdot\sum a(b+c)}=\sqrt{2\sum a\cdot\sum bc}$$

所以 $$\sum\frac{a}{\sqrt{b+c}}\geqslant\frac{(\sum a)^2}{\sqrt{2\sum a\cdot\sum bc}}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\sum a$$

65. 简证:设$\sqrt{\frac{vw}{u}}=x,\sqrt{\frac{uw}{v}}=y,\sqrt{\frac{uv}{w}}=z$,则原命题等价于:$x,y,z\in\mathbf{R}^+$,且 $yz+zx+xy+xyz=4$,则

$$x+y+z\geqslant yz+zx+xy \qquad ①$$

式①证明可见本章练习题64中(1).

附:国家集训队对该题的解答如下(命题组提供).

证明:设 $u=xy,v=yz,w=xz,x,y,z$ 为正实数,则条件变为

$$xyz+xy+yz+zx=4$$

结论变为

$$x+y+z\geqslant xy+yz+zx \qquad (※)$$

因 x,y,z 三个数中必有两个在1的同侧,不妨设 y,z 在1的同侧,则

$$(y-1)(z-1)\geqslant 0 \qquad ①$$

于是

$$x(yz+y+z)=4-yz>0$$

由此可得

$$x=\frac{4-yz}{yz+y+z}\leqslant\frac{4-yz}{yz+2\sqrt{yz}}=\frac{(2+\sqrt{yz})(2-\sqrt{yz})}{\sqrt{yz}(\sqrt{yz}+2)}=\frac{2-\sqrt{yz}}{\sqrt{yz}}$$

因此

$$(x+1)\sqrt{yz}\leqslant 2 \qquad ②$$

注意到要证

$$\text{式}(※)\Leftrightarrow x-xz-xy+xyz\geqslant yz-y-z+xyz\Leftrightarrow$$
$$x(1-y)(1-z)\geqslant yz(x+1)-y-z \qquad (※※)$$

下证式(※※).由式①,左边 $\geqslant 0$;由式②

$$\text{右边}\leqslant\sqrt{yz}\cdot 2-y-z=-(\sqrt{y}-\sqrt{z})^2\leqslant 0$$

故式(※※)成立.

66. 简证:在 $2x-1,2y-1,2z-1$ 中必有两个都不大于零,或都不小于零,不妨设这两个数为 $2x-1,2y-1$,则

$$(2x-1)(2y-1)\geqslant 0$$

由此得

$$z+4xyz\geqslant 2xz+2yz \qquad ①$$

另外,因为

$$1 \geqslant x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz \geqslant 2xy + z^2 + 2xyz$$

所以
$$1 - z^2 \geqslant 2xy(1+z)$$

所以

$$1 - z \geqslant 2xy \tag{②}$$

式① + ②即得.

注:(1) 当条件改为 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ 时,$x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,若令 $x=\cos A$, $y=\cos B$, $z=\cos C$,则可设 A,B,C 为非钝角 $\triangle ABC$ 三内角,此时 $1+4xyz \geqslant 2\sum yz$,即为$(\frac{1}{2}\sum a)^2 \geqslant 2R^2+8Rr+3r$,这是非钝角三角形中的一个重要不等式,这里又给出了一种较为简捷的新证法.

(2) 由此易证西藏刘保乾先生于2006年7月提出的以下命题.

命题:设 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum x^2 + 4xyz \leqslant 1$,则

$$\sum x \leqslant \sqrt{2}$$

67. 简证:(1) 由于 $3\sum yz \geqslant 3\sum x + \sum \frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{x}$,因此,要证(1)中不等式,只要证

$$\sum \frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{x} \geqslant (m+2)\cdot\frac{\sum(y-z)^2}{\sum x} \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{y+z}{x}[(x-y)^2+(x-z)^2] \geqslant m\sum(y-z)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum\left(\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-m\right)(y-z)^2 \geqslant 0$$

由对称性,不妨设 $x \geqslant y \geqslant z$,则上式等价于

$$\left[\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{2(x+y)}{z}-2m\right](y-z)^2 +$$

$$\left[\frac{2(y+z)}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-2m\right](x-y)^2 +$$

$$2\left(\frac{y+z}{x}+\frac{x+y}{z}-m\right)(x-y)(y-z) \geqslant 0 \tag{※}$$

因为

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{2(x+y)}{z}-2m =$$

$$\left(\frac{2x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{2y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)-2m \geqslant$$

$$2(2\sqrt{2}+1)-2(2+\sqrt{3}) > 0$$

同理有

$$\frac{2(y+z)}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-2m\geqslant 0$$

所以要证式(※)成立,只需证其判别式 $\Delta\leqslant 0$.

记 $\lambda=\frac{y+z}{x},u=\frac{x+z}{y},v=\frac{x+y}{z}$,则

$$-\frac{1}{4}\Delta=(\lambda+\mu+2\nu-2m)(2\lambda+\mu+\nu-2m)-(\lambda+\nu-m)^2=$$

$$3m^2-4m\sum\lambda+(\sum\lambda)^2+\sum uv=$$

$$3[m-\frac{2\sum\lambda+\sqrt{(\sum\lambda)^2-3\sum uv}}{3}]$$

$$[m-\frac{2\sum\lambda-\sqrt{(\sum\lambda)^2-3\sum uv}}{3}]$$

由此可知,要证 $\Delta\leqslant 0$,只需证

$$m\leqslant\frac{2\sum\lambda-\sqrt{(\sum\lambda)^2-3\sum uv}}{3}$$

即 $$(\sum\lambda)^2-(8+4\sqrt{3})\sum\lambda+\sum uv+(21+12\sqrt{3})\geqslant 0$$

(注意到 $2\sum\lambda-3m\geqslant 6-3\sqrt{3}>0$).

又由于 $\sum uv\geqslant 2\sum\lambda$ 等价于 $(\sum x)^3-4\sum x\cdot\sum yz+9xyz\geqslant 0$,此式成立,因此又只需证

$$(\sum\lambda)^2-(6+4\sqrt{3})\sum\lambda+(21+12\sqrt{3})\geqslant 0\Leftrightarrow(\sum\lambda-3-2\sqrt{3})^2\geqslant 0$$

由此证明了 $\Delta\leqslant 0$,式(※)成立,(1)中不等式获证.易知,当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

(2) 由于 $3\sum yz\geqslant 3\sum x+\sum\frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{x}$,因此,要证(2)中不等式,只要证

$$\sum\frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{x}\geqslant(n+2)\cdot\frac{\sum(y-z)^2}{\sum x}\Leftrightarrow$$

$$\sum x\cdot\sum\frac{(x-y)^2+(x-z)^2}{x}\geqslant\frac{(\sum x)^2}{\sum yz}\sum(y-z)^2+2\sum(y-z)^2\Leftrightarrow$$

$$\sum[\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-\frac{(\sum x)^2}{\sum yz}](y-z)^2\geqslant 0$$

由对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,注意到 $x-z=(x-y)+(y-z)$,上式又等

价于

$$\left[\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{2(x+y)}{z}-\frac{2(\sum x)^2}{\sum yz}\right](y-z)^2+$$

$$\left[\frac{2(y+z)}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-\frac{2(\sum x)^2}{\sum yz}\right]\cdot(x-y)^2+$$

$$2\left[\frac{y+z}{x}+\frac{x+y}{z}-\frac{(\sum x)^2}{\sum yz}\right](x-y)(y-z)\geqslant 0 \qquad (※※)$$

因为

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{2(x+y)}{z}-\frac{2(\sum x)^2}{\sum yz}\geqslant$$

$$\frac{y+z}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-\frac{2(\sum x)^2}{\sum yz}\geqslant$$

$$\frac{[\sum(y+z)]^2}{\sum x(y+z)}-\frac{2(\sum x)^2}{\sum yz}=0$$

同理有

$$\frac{2(y+z)}{x}+\frac{x+z}{y}+\frac{x+y}{z}-\frac{2(\sum x)^2}{\sum yz}\geqslant 0$$

所以要证式(※※)成立,只需证其判别式$\Delta\leqslant 0$.

记$\frac{y+z}{x}=\lambda,\frac{x+z}{y}=u,\frac{x+y}{z}=v,m=\frac{(\sum x)^2}{\sum yz}$,则

$$-\frac{1}{4}\Delta=(\lambda+\mu+2\nu-2m)(2\lambda+\mu+\nu-2m)-(\lambda+\nu-m)^2=$$

$$3m^2-4m\sum\lambda+(\sum\lambda)^2+\sum uv \qquad ①$$

记$s_1=\sum x,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,今先证明

$$\sum uv-m^2\geqslant 0 \qquad ②$$

$$\text{式②}\Leftrightarrow\sum\frac{(x+y)(x+z)}{yz}-\frac{(\sum x)^4}{(\sum yz)^2}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(\sum x^3+\sum x\sum yz)(\sum yz)^2-xyz(\sum x)^4\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(s_1^3-2s_1s_2+3s_3)s_2^2-s_1^4s_3\geqslant 0 \qquad ③$$

因为 $$\frac{1}{3}s_1^3s_2^2 \geqslant s_1^4s_3$$

所以要证式 ③，只要证

$$(\frac{2}{3}s_1^3 - 2s_1s_2 + 3s_3)s_2^2 \geqslant 0$$

即 $$2s_1^3 - 6s_1s_2 + 9s_3 \geqslant 0$$

但 $$2s_1^3 - 6s_1s_2 + 9s_3 = 2(s_1^3 - 4s_1s_2 + 9s_3) + 2s_1s_2 - 9s_3 \geqslant 0$$

所以式 ③ 成立，即式 ② 成立. 所以

$$3m^2 - 4m\sum\lambda + (\sum\lambda)^2 + \sum uv \geqslant 4m^2 - 4m\sum\lambda + (\sum\lambda)^2 = (2m - \sum\lambda) \geqslant 0$$

由式 ① 知 $\Delta \leqslant 0$. 故(2) 中的不等式获证，当且仅当 $x = y = z$ 时取等号.

(3) 由(1) 中不等式可得到

$$(2m+7)s_1^2 - 3s_1s_2 - (6m+12)s_2 \leqslant 0$$

所以 $$s_2 \geqslant \frac{(2m+7)s_1^2}{3s_1 + (6m+12)}$$

于是，要证(3) 中不等式成立，只要证

$$\frac{(2m+7)s_1^2}{3s_1 + (6m+12)} \geqslant \frac{(4m+11)s_1 - (6m+12)}{2m+7}$$

等价于

$$[(m+2)s_1 - (3m+6)]^2 \geqslant 0$$

因此(3) 中不等式成立. 当且仅当 $x = y = z$ 时取等号.

注：在证明(2) 中的不等式时，我们得到了一个有趣的不等式：若 $x, y, z \in \mathbf{R}^+$，则

$$\sum \frac{(x+y)(x^2+y^2)}{x} \geqslant 4\sum x^2 + \frac{(\sum x)^2}{\sum yz} \cdot \sum (y-z)^2$$

或 $$\sum \frac{y^3}{x} \geqslant 2\sum x^2 - \sum yz + \frac{(\sum x)^2}{\sum yz} \cdot \sum (y-z)^2$$

当且仅当 $x = y = z$ 时取等号.

68. 注：证法与以上题 67 证法相似.

69. 简证：因为

$$\sum \frac{(ub+vc)^2}{a} =$$

$$\sum \left\{ -(u+v)^2a + 2(u+v)(ub+vc) + \frac{[(u+v)a - ub - vc]^2}{a} \right\} =$$

$$(u+v)^2\sum a+\sum\frac{[(u+v)a-ub-vc]^2}{a}$$

所以

$$[\sum\frac{(ub+vc)^2}{a}]^2-3(u+v)^4\sum a^2\geqslant$$

$$(u+v)^4(\sum a)^2+2(u+v)^2\sum a\cdot$$

$$\sum\frac{[(u+v)a-ub-vc]^2}{a}-3(a+v)^4\sum a^2\geqslant$$

$$2(u+v)^2[\sum|(u+v)a-ub-vc|]^2-(u+v)^4\sum(b-c)^2\geqslant$$

$$2(u+v)^2\sum[(u+v)a-ub-vc]^2-(u+v)^4\sum(b-c)^2=$$

$$2(u+v)^2(u^2+v^2+uv)\sum(b-c)^2-(u+v)^4\sum(b-c)^2\geqslant$$

$$0$$

说明:以上循环和只针对字母 a,b,c 求和.

70. 简证:(1) 当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时,$a^3b+b^3c+c^3a-ab^3-bc^3-ca^3=(a+b+c)\cdot(a-b)(b-c)(a-c)\geqslant 0$. 因此,只要证当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时式(1) 成立即可.

由于

$$2\sum bc\cdot\sum(b-c)^2+3abc\sum a-3\sum a^3b=$$

$$2\sum bc\cdot\sum(b-c)^2-3\sum ab(a-c)^2=$$

$$(2bc+2ca-ab)(a-c)^2+(2ca+2ab-bc)(a-b)^2+$$

$$(2ab+2bc-ca)(b-c)^2=$$

$$(4ac+bc+ab)(a-b)^2+(4bc+ac+ab)(b-c)^2+$$

$$2(2bc+2ac-ab)(a-b)(b-c)=$$

$$4ac[(a-b)^2+(a-b)(b-c)]+4bc[(b-c)^2+(a-b)(b-c)]+$$

$$ab[(a-b)^2+(b-c)^2-2(a-b)(b-c)]+bc(a-b)^2+ac(b-c)^2\geqslant$$

$$0$$

由此知式(1) 成立.

(2) 由于 $\sum a\cdot(a^2b+b^2c+c^2a+abc)=\sum a^3b+(\sum bc)^2$,因此有

$$\sum a\cdot(a^2b+b^2c+c^2a+abc)-(\sum bc)^2\leqslant$$

$$abc\cdot\sum a+\frac{2}{3}\sum bc\cdot\sum(b-c)^2$$

应用式(1),即

$$\sum a^2b \leqslant \frac{(\sum bc)^2 + \frac{2}{3}\sum bc \cdot \sum (b-c)^2}{\sum a} =$$

$$\frac{\sum bc \cdot [4(\sum a)^2 - 9\sum bc]}{3\sum a}$$

注:以上式(1) 与上面题29: $\sum a^3b + (\sum bc)^2 \leqslant \frac{4}{27}(\sum a)^4$ 以及第二章"增量比较法证明不等式"例 15 中不等式:$3\sum a^3b \leqslant (\sum a^2)^2$ 不分强弱;式(2) 与 $a^2b + b^2c + c^2a + abc \leqslant \frac{4}{27}(a+b+c)^3$ 不分强弱.

另外,以上(1)、(2) 两式也可用增量比较法证明.

71. 简证一:由 $\frac{1}{(3a-1)^2} \geqslant \frac{a^{-3}}{a^{-3}+b^{-3}+c^{-3}+d^{-3}}$ 等四式即得. 此式证明如下.

令 $\frac{1}{a} = x, \frac{1}{b} = y, \frac{1}{c} = z, \frac{1}{d} = w$,则由 $abcd = 1$,有 $xywz = 1$,于是只要证

$$\frac{x^3+y^3+z^3+w^3}{x^3} \geqslant (\frac{3}{x}-1)^2 \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+w^3 \geqslant$$

$$x(3-x)^2y^3+z^3+w^3+6x^2-9x \geqslant 0$$

此式易证成立,事实上有

$$y^3+z^3+w^3+6x^2-9x \geqslant 3yzw+6x^2-9x =$$

$$\frac{3}{x}+3x^2+3x^2-9x \geqslant$$

$$9x-9x=0$$

简证二:易由 $\frac{1}{(3a-1)^2} \geqslant \frac{1}{3a^4+1}$(此式易证) 等三式证得.

简证三:易由 $\frac{1}{(3a-1)^2} \geqslant \frac{1}{(a^3+1)^2}$(此式易证) 等三式证得.

简证四:若 a,b,c,d 中至少有一个不大于 $\frac{2}{3}$,如 $0 \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}$,则

$$\frac{1}{(3a-1)^2} \geqslant 1$$

此时,原式显然成立.

若 a,b,c,d 均大于 $\frac{2}{3}$,则

$$\frac{1}{3a-1} + \frac{1}{3b-1} = \frac{3(a+b)-2}{(3a-1)(3b-1)} \geqslant$$

$$\frac{2}{3\sqrt{ab}-1}$$

(注意到 $3\sqrt{ab}-1>0$) 同理有

$$\frac{1}{3c-1}+\frac{1}{3d-1}=\frac{3(c+d)-2}{(3c-1)(3d-1)}\geqslant$$

$$\frac{2}{3\sqrt{cd}-1}$$

(注意到 $3\sqrt{cd}-1>0$) 因此

$$\sum\frac{1}{(3a-1)^2}\geqslant\frac{1}{4}(\sum\frac{1}{3a-1})^2\geqslant(\frac{1}{3\sqrt{ab}-1}+\frac{1}{3\sqrt{cd}-1})^2\geqslant$$

$$4(\frac{1}{3\sqrt[4]{abcd}-1})^2=1$$

此时,原式显然成立.

72. 简证:(以下解答由赵斌老师提供) 为了证明

$$(a^2+b^2+c^2)^3\geqslant[a^3+b^3+c^3+3(\sqrt{3}-1)abc]^2 \tag{①}$$

先证以下理.

引理:若 $x,y,z>0,x+y+z=1$,则

$$(\frac{1}{\sqrt{x}}-1)(\frac{1}{\sqrt{y}}-1)(\frac{1}{\sqrt{z}}-1)\geqslant(\sqrt{3}-1)^3 \tag{②}$$

引理证明:式 ② 等价于

$$(1-\sqrt{x})(1-\sqrt{y})(1-\sqrt{z})\geqslant(\sqrt{3}-1)^3\sqrt{xyz}\Leftrightarrow$$

$$(1-x)(1-y)(1-z)\geqslant(\sqrt{3}-1)^3\sqrt{xyz}(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{y})(1+\sqrt{z})\Leftrightarrow$$

$$\prod(y+z)\geqslant(\sqrt{3}-1)^3\sqrt{xyz}\prod(1+\sqrt{x}) \tag{③}$$

因为 $$\prod(y+z)\geqslant\frac{8}{9}\sum x\cdot\sum yz\geqslant\frac{8}{9}\cdot\sqrt{3xyz}$$

(注意到 $x+y+z=1$) 所以要证式 ③,只要证

$$\prod(1+\sqrt{x})\leqslant(\frac{3+\sqrt{3}}{3})^3$$

此式易证,事实上有

$$\prod(1+\sqrt{x})\leqslant(\frac{3+\sum\sqrt{x}}{3})^3\leqslant(\frac{3+\sqrt{3\sum x}}{3})^3=(\frac{3+\sqrt{3}}{3})^3$$

引理获证.

下面证明式 ①.

令 $a^2+b^2+c^2=1$,则要证式 ①,只要证

$$a^3+b^3+c^3+3(\sqrt{3}-1)abc \leqslant a^2+b^2+c^2 \qquad ④$$

而

$$\begin{aligned}\sum a^2-\sum a^3 = \sum a^2(1-a) \geqslant \\ 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2\cdot\prod(1-a)} \geqslant \\ 3\cdot\sqrt[3]{a^2b^2c^2\cdot(\sqrt{3}-1)^3\cdot abc} \\ (\text{据引理}) = \\ 3(\sqrt{3}-1)abc\end{aligned}$$

即得式④,故原命题获证.

73. 简证:由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c > 0$,则

$$\begin{aligned}\sum\frac{a}{b+c}-\frac{3}{2}-\frac{\sum(b-c)^2}{(\sum a)^2} &= \frac{2\sum a^3-\sum a^2(b+c)}{2\prod(b+z)}-\frac{\sum(b-c)^2}{(\sum a)^2} = \\ &\frac{\sum(b+c)(b-c)^2}{2\prod(b+c)}-\frac{\sum(b-c)^2}{(\sum a)^2} = \\ &\sum[\frac{1}{2(a+b)(a+c)}-\frac{1}{(\sum a)^2}](b-c)^2 = \\ &\sum\frac{(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2}{2(a+b)(a+c)(\sum a)^2}\end{aligned}$$

即证

$$\sum(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2 \geqslant 0 \qquad (※)$$

由于

$$\begin{aligned}&\sum(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2 = \\ &(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2+(a+c)(a^2-b^2+c^2)(a-b+b-c)^2+ \\ &(a+b)(a^2+b^2-c^2)(a-b)^2 \geqslant \\ &(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2+(a+c)(a^2-b^2+c^2)(a-b+b-c)^2 \geqslant \\ &(b+c)(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2+(b+c)(a^2-b^2+c^2)(b-c)^2 = \\ &2(b+c)c^2(b-c)^2 \geqslant \\ &0\end{aligned}$$

因此,式(※)成立,原命题获证,易知当且仅当 $a=b=c$ 时取等号.

74. 解答参见《中学数学》(湖北),2002 年第八期. 该命题结论很有用.

75. 解答可参见《湖南教育学院学报》,1999 年第 2 期(第 17 卷),杨学枝文:"关于三角形的两类不等式". 这是两个应用较广的不等式.

76. 证明可参见《中学数学研究》(广东),2005 年第 12 期,杨学枝文:

"$\triangle ABC$ 中循环和 $\sum \frac{\cos^2 A}{1+\cos A}$ 的最值". 其中用题 76 中(1) 可解答 2005 年全国高中数学联赛第二试试题:

设正数 a,b,c,x,y,z 满足 $cy+bz=a$;$az+cx=b$;$bx+ay=c$,求函数

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{1+x}+\frac{y^2}{1+y}+\frac{z^2}{1+z}$$

的最小值.

另外解法可参见命题者解答.

注:2005 年全国高中数学联赛加试第二大题等价问题的推广,见《数学通讯》,2007 年第 23 期,王亚辉文:"一道数学奥林匹克试题的再推广".

若 a 为正常数,则在 $\triangle ABC$ 中,有

$$\sum \frac{\cos^{2n} A}{a+\cos^2 A} \geqslant \frac{3}{4^{n-1}(4a+1)}$$

其中,$n \geqslant 2, n \in \mathbf{N}$.

提示

$$\frac{\dfrac{\cos^{2n} A}{a+\cos^2 A}}{\sum \dfrac{\cos^{2n} A}{a+\cos^2 A}}+\frac{a+\cos^2 A}{3a+\sum \cos^2 A}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3}}_{n-2\text{个}} \geqslant$$

$$\frac{n\cos^2 A}{\sqrt[n]{3^{n-2}\cdot(3a+\sum \cos^2 A)\cdot \sum \dfrac{\cos^{2n} A}{a+\cos^2 A}}}$$

77. 简证:设$\frac{BD}{BC}=x_1, \frac{CE}{CA}=x_2, \frac{AF}{AB}=x_3$,则 $\Delta_1=(1-x_2)x_3\Delta, \Delta_2=(1-x_3)x_1\Delta, \Delta_3=(1-x_1)x_2\Delta$($\Delta$ 为 $\triangle ABC$ 的面积),且有 $\Delta_0=[x_1x_2x_3+(1-x_1)\cdot(1-x_2)(1-x_3)]\Delta$,于是

$$\Delta_0\left(\frac{\lambda_1^2}{\Delta_1}+\frac{\lambda_2^2}{\Delta_2}+\frac{\lambda_3^2}{\Delta_3}\right)=\sum\left[\frac{x_2\lambda_2^2}{1-x_3}+\frac{(1-x_3)\lambda_3^2}{x_2}\right]-\sum \lambda_1^2 \geqslant$$

$$2\sum \lambda_2\lambda_3-\sum \lambda_1^2$$

注:参见《中学数学教学》1995 年第 6 期,杨学枝文:"一道几何不等式的推广".

78. 简证:(1) 证明可参见魏烈斌文:"不等式中的一对姊妹花","数学通讯",2007 年第 5 期.

(2) 可将条件 $a+b+c=1$ 放宽为 $a+b+c \leqslant 1$. 由于 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且$a+b+c \leqslant 1$, 因此,$a,b,c$ 中必有一个数不大于$\frac{1}{3}$,不妨设 $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$,则

$$\left(\frac{1}{c+a}+b\right)\left(\frac{1}{a+b}+c\right)=\frac{(1+ab+bc)(1+ac+bc)}{(a+b)(a+c)}=$$

$$\frac{(1+bc)^2+a(1+bc)-a^2}{a+bc}=$$

$$2+bc+\frac{1-a-a^2}{a+bc}$$

(注意到 $b+c=1-a$) 又因为

$$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{3},\ bc\leqslant\left(\frac{b+c}{2}\right)^2$$

所以

$$2+bc+\frac{1-a-a^2}{a+bc}-2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{1-a-a^2}{a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}=$$

$$\frac{1-a-a^2}{a+bc}-\frac{1-a-a^2}{a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}-\left[\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-bc\right]=$$

$$\frac{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}{(a+bc)\left[a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]}\left\{1-a-a^2-(a+bc)\left[a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]\right\}\geqslant$$

$$\frac{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}{(a+bc)\left[a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]}\left[1-a-2a^2-2a\left(\frac{b+c}{2}\right)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right]\geqslant$$

$$\frac{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}{(a+bc)\left[a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]}\left[1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]=$$

$$\frac{\left(\frac{b-c}{2}\right)^2}{(a+bc)\left[a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\right]}\cdot\frac{31}{144}\geqslant 0$$

所以 $$\left(\frac{1}{c+a}+b\right)\left(\frac{1}{a+b}+c\right)\geqslant 2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{1-a-a^2}{a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}$$

又由 $\frac{b+c}{2}\leqslant\frac{1-a}{2}$,同上证法可得

$$2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{1-a-a^2}{a+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}\geqslant 2+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2+\frac{1-a-a^2}{a+\left(\frac{1-a}{2}\right)^2}$$

所以

$$(\frac{1}{c+a}+b)(\frac{1}{a+b}+c) \geqslant 2+(\frac{1-a}{2})^2+\frac{1-a-a^2}{a+(\frac{1-a}{2})^2}=\frac{(5-a^2)^2}{4(1+a)^2}$$

于是,要证原命题成立,只需证,在 $0 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$ 条件下,有

$$\frac{(5-a^2)^2}{4(1+a)^2}\cdot(\frac{1}{b+c}+a) \geqslant \frac{(5-a^2)^2}{4(1+a)^2}\cdot(\frac{1}{1-a}+a)=$$

$$\frac{(5-a^2)^2(1+a-a^2)}{4(1+a^2)(1-a)} \geqslant (\frac{11}{6})^3$$

即证

$$54(5-a^2)^2(1+a-a^2)-1\,331(1+a)^2(1-a) \geqslant 0 \qquad (※)$$

因为

$$54(5-a^2)^2(1+a-a^2)-1\,331(1+a)^2(1-a)=$$
$$(3a-1)^2(-6a^4+2a^3+68a^2+133a+19) \geqslant$$
$$0$$

(注意到 $-6a^4+19 \geqslant 0$) 所以式(※)成立. 从而原命题获证.

注:以上(2)笔者的证明魏烈斌老师将其写入了他的文章"不等式中的一对姊妹花",见《数学通讯》,2007 年第 5 期.

79. 简证

$$原式 \Leftrightarrow 2\sum a\cdot\sum bc-9\sum a+9 \geqslant 0 \qquad ①$$

由 $\sum bc \geqslant \sqrt{3abc\sum a}=\sqrt{3\sum a}$ 知,要证式①,只要证

$$2\sum a\cdot\sqrt{3\sum a}-9\sum a+9 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$(\sqrt{3\sum a}-3)^2(2\sqrt{3\sum a}+3) \geqslant 0$$

80. 解:(应用局部调整法)由于不等式是齐次对称的,设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n > 0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$. 这时只须讨论

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j(x_i^2+x_j^2)$$

的最大值.

假设 $x_1,\cdots,x_n$ 中最后一个非零数为 $x_{k+1}(k \geqslant 2)$,将 $x=(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1},0,\cdots,0)$ 调整为 $x'=(x_1,\cdots,x_{k-1},x_k+x_{k+1},0,\cdots,0)$,相应的函数值

$$F(x')-F(x)=x_kx_{k+1}[3(x_k+x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1}x_i-x_k^2-x_{k+1}^2]=$$
$$x_kx_{k+1}[3(x_k+x_{k+1})(1-x_k-x_{k+1})-x_k^2-x_{k+1}^2]=$$

$$x_kx_{k+1}\{(x_k+x_{k+1})[3-4(x_k+x_{k+1})]+2x_kx_{k+1}\}$$

因为 $$1\geqslant x_1+x_k+x_{k+1}\geqslant\frac{1}{2}(x_k+x_{k+1})+x_k+x_{k+1}$$

所以 $$\frac{3}{4}>\frac{2}{3}\geqslant x_k+x_{k+1}$$

因此 $$F(x')-F(x)>0$$

这表明,将 x 调整为 x' 时,函数值 F 严格增加. 于是对于任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)$,经过若干次调整后可得

$$F(x)\leqslant F(a,b,0,\cdots,0)=ab(a^2+b^2)=$$
$$\frac{1}{2}(2ab)(1-2ab)\leqslant\frac{1}{8}=$$
$$F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\cdots,0)$$

可见所求之常数 c 等于 $\frac{1}{8}$. 等号成立的充要条件为两个 x_i 相等(可以为0),而其余的 $n-2$ 个 x_i 均等于0.

81. 简证:由于

$$2\sqrt{1-ab}\cdot\sqrt{1-ac}=2\sqrt{\sum a^2-ab}\cdot\sqrt{\sum a^2-ac}=$$
$$\sqrt{\sum a^2+c^2+(a-b)^2}\cdot\sqrt{\sum a^2+b^2+(a-c)^2}\geqslant$$
$$\sum a^2+bc+(a-b)(a-c)=$$
$$1+bc+(a-b)(a-c)$$

类似还有二式,因此

$$(\sqrt{1-bc}+\sqrt{1-ca}+\sqrt{1-ab})^2=$$
$$3-\sum bc+2\sum\sqrt{1-ca}\sqrt{1-ab}\geqslant$$
$$3-\sum bc+3+\sum bc+\sum(a-b)(a-c)=$$
$$7-\sum bc$$

82. 简证

$$[xyz-\prod(-x+y+z)]^2-2(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2=$$
$$[\sum x(z-x)(x-y)]^2-2(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2=$$
$$[\sum x(z-x)(x-y)]^2-2(x-y)(y-z)(z-x)\cdot\sum yz(y-z)=$$
$$\sum[x(z-x)(x-y)]^2\geqslant 0$$

83. 简证

(1) 因为 $(\sum a^3)^2 = \sum a^4 \cdot \sum a^2 - \sum b^2c^2(b-c)^2$

所以

$$(\sum a^3)^2 - \sum a^4 \cdot \sum bc = \sum a^4 \cdot (\sum a^2 - \sum bc) - \sum b^2c^2(b-c)^2 = \frac{1}{2}\sum[(b^2-c^2)^2 + a^4](b-c)^2 \geqslant 0$$

(2) 因为 $(\sum a^4)^2 = \sum a^5 \cdot \sum a^3 - \sum b^3c^3(b-c)^2$

所以

$$9(\sum a^4)^2 - \sum a^5 \cdot (\sum a)^3 = \sum a^5 \cdot [9\sum a^3 - (\sum a)^3] - 9\sum b^3c^3(b-c)^2 = \sum[(\sum a^5)\cdot(a+4b+4c) - 9b^3c^3](b-c)^2 \geqslant \sum[4(b^5+c^5)(b+c) - 9b^3c^3](b-c)^2 \geqslant 0$$

84. 简证:(Dr. Titu Andreescu USA 提供) 若记 $b+c=s, bc=p$,则

$$3(b^2-bc+c^2)^3 - (b^6+b^3c^3+c^6) = 3(s^2-3p)^3 - (s^6-6s^4p+9s^2p^2-p^3) = (s^2-4p)^2(2s^5-5p) \geqslant 0$$

于是有

$$3\prod(b^2-bc+c^2) \geqslant \prod(b^6+b^3c^3+c^6)^{\frac{1}{3}} = [(a^3b^3+b^6+a^6)(b^6+b^3c^3+c^6)(a^6+c^6+a^3c^3)]^{\frac{1}{3}} \geqslant \sum b^3c^3$$

(据赫尔德不等式).

85. 简证一:因为

$$(a^2c^2 - abcd + b^2d^2) - (a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2) = (ad+bc)(a-b)(c-d)$$

所以

$$原不等式 \Leftrightarrow (a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2) \geqslant 2(ad+bc)(a-b)(c-d)$$

当 a,c 中有一个为0时,易证上式成立. 所以不妨设 $a \neq 0, c \neq 0$,这时两边同时除以 a^2c^2,并作代换 $x=\frac{b}{a}, y=\frac{d}{c}$,得

$$(x^2-x+1)(y^2-y+1) \geqslant 2(x+y)(x-1)(y-1) \Leftrightarrow$$
$$(y^2-3y+3)x^2 - (3y^2-5y+3)x + 3y^2 - 3y + 1 \geqslant 0$$

上式左边看做 x 的二次多项式,则

$$\begin{aligned}\Delta = &(3y^2-5y+3)^2-4(y^2-3y+3)(3y^2-3y+1) = \\ &-3y^4+18y^3-33y^2+18y-3 = \\ &-3(y^2-3y+1)^2 \leqslant 0\end{aligned}$$

所以 $$(y^2-3y+3)x^2-(3y^2-5y+3)x+3y^2-3y+1 \geqslant 0$$

原式获证. 由上证明知,当且仅当 $3y^2-3y+1=0, x=\dfrac{3y^2-5y+3}{2(y^2-3y+3)}$,即 $a=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}b, c=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}d$;或 $b=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}a, d=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}c$ 时取等号.

简证二

$$\begin{aligned}\text{原式左边}-\text{右边} = &a^2c^2+b^2d^2+3a^2d^2+3b^2c^2-3abc^2- \\ &3a^2bc-3b^2cd-3abd^2+5abcd = \\ &(ac-\frac{3}{2}ad+bd-\frac{3}{2}bc)^2+\frac{3}{4}(ad-bc)^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

故原式成立. 当且仅当 $2(ac+bd)=3(ad+bc)=6ad$ 时取等号,或取等号条件同简证一所述.

86. 简证一:(Daniel Campos Salas Costa Rica 提供)

令 $s=a+b+c+d$,由柯西不等式,我们有

$$4=\sqrt{4(a^2+b^2+c^2+d^2)} \geqslant s \qquad ①$$

因为 a,b,c,d 为非负数,所以

$$s \geqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}=2 \qquad ②$$

运用 AM - CM 不等式,有

$$\sqrt{2}(4-ab-bc-cd-da)=\sqrt{2}[4-(a+c)(b+d)] \geqslant \sqrt{2}(4-\frac{s^2}{4})$$

又

$$\begin{aligned}\sqrt{2}(4-\frac{s^2}{4})-(\sqrt{2}+1)(4-s) = &-\frac{\sqrt{2}}{4}s^2+(\sqrt{2}+1)s-4 = \\ &\frac{\sqrt{2}}{4}[-s^2+(4+2\sqrt{2})s-8\sqrt{2}] = \\ &\frac{\sqrt{2}}{4}(4-s)(s-2\sqrt{2}) \qquad ③\end{aligned}$$

由式①和③能推出,当 $s \geqslant 2\sqrt{2}$ 时,原不等式成立;下面证明当 $s \leqslant 2\sqrt{2}$ 时,原不等式也成立.

因为

$$\sqrt{2}(4-ab-ba-cd-da) \geqslant \sqrt{2}(4-ab-bc-cd-da-ac-bd) =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(12-s^2)$$

所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(12-s^2)-(\sqrt{2}+1)(4-s)=-\frac{\sqrt{2}}{4}s^2+(\sqrt{2}+1)s+(2\sqrt{2}-4)=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}[-s^2+(2+\sqrt{2})s+(4-4\sqrt{2})]=$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}-s)(s-2+2\sqrt{2}) \quad ④$$

由式②和④知,这个不等式对 $s\leqslant 2\sqrt{2}$ 成立,原命题获证.

简证二:(Vardan Verdiyan, Yereran Armenia 提供)原不等式又可写成

$$\sqrt{2}[4-(a+c)(b+d)]\geqslant(\sqrt{2}+1)[4-(a+b)-(c+d)]\Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{2}+1)(a+b+c+d)\geqslant$$

$$\sqrt{2}(a+c)(b+d)+4$$

记 $x=a+c,y=b+d$,由题设条件知

$$x^2+y^2\geqslant a^2+b^2+c^2+d^2=4\Leftrightarrow(x+y)^2\geqslant 4+2xy$$

所以

$$x+y\geqslant 2$$

重写原不等式,得到

$$(\sqrt{2}+1)(x+y)\geqslant\sqrt{2}xy+4\Leftrightarrow$$

$$(2+\sqrt{2})(x+y)\geqslant 2xy+4\sqrt{2}\Leftrightarrow$$

$$4+(2+\sqrt{2})(x+y)-4\sqrt{2}\geqslant 4+2xy$$

所以只需证 $4+(2+\sqrt{2})(x+y)-4\sqrt{2}\geqslant(x+y)^2$ 即可.

记 $R=x+y$,即证

$$R^2-(2+\sqrt{2})R+4(\sqrt{2}-1)\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{22-12\sqrt{2}}}{2}\leqslant R\leqslant$$

$$\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{22-12\sqrt{2}}}{2}=2\sqrt{2}$$

从而知当 $x+y\leqslant 2\sqrt{2}$ 时,我们欲证的不等式成立.

假设 $x+y>2\sqrt{2}$,因为

$$4=a^2+b^2+c^2+d^2\geqslant(a+c)(b+d)=xy$$

所以

$$xy<4$$

因为

$$x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$$

所以只需证

$$(2+\sqrt{2})\cdot 2\sqrt{xy}\geqslant 2xy+4\sqrt{2}\Leftrightarrow xy-(2+\sqrt{2})\sqrt{xy}+2\sqrt{2}\leqslant 0$$

当$\sqrt{2}=\dfrac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2}\leqslant\sqrt{xy}\leqslant\dfrac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}}{2}=2$时上式成立.

但当$\sqrt{xy}<\sqrt{2}$时,则

$$(2+\sqrt{2})(x+y)>4+4\sqrt{2}>2xy+4\sqrt{2}$$

综上,所要证的不等式获证.

87. 简证:记$s_1=\sum a, s_2=\sum bc, s_3=abc$,则原不等式等价于

$$s_1^2s_2^2+2s_1^3s_3-4s_2^3-3s_1s_2s_3\geqslant 0 \qquad ①$$

因为

$$s_1^2s_2^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-4s_1^3s_3-27s_3^2=[(a-b)(b-c)(c-a)]^2\geqslant 0$$

(见第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter1 中题 40 证明的式②) 所以

$$\begin{aligned}式①左边\geqslant & -18s_1s_2s_3+4s_2^3+4s_1^3s_3+27s_3^2+\\ & 2s_1^3s_3-4s_2^3-3s_1s_2s_3=\\ & 6s_1^3s_3-21s_1s_2s_3+27s_3^2=\\ & 6s_3(s_1^3-4s_1s_3+9s_3)+3s_3(s_1s_2-9s_3)\geqslant\\ & 0\end{aligned}$$

($s_1^3-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$,可参见第一章"等价变换法证明不等式" 中例 14).

88. 简证:记

$$s_1=a+b+c+d$$
$$s_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd$$
$$s_3=bcd+acd+abd+abc$$
$$s_4=abcd$$

则原式即要证明

$$s_1^4+32s_4\geqslant 3s_1^2s_2 \qquad ①$$

式①可由以下得到

$$\begin{aligned}s_1^4-3s_1^2s_2+32s_4= & (s_1^4-4s_1^2s_2+9s_1s_3-16s_4)+\\ & (s_1^2s_2-4s_2^2+3s_1s_3)+4(s_2^2-3s_1s_3+12s_4)\geqslant\\ & 0\end{aligned}$$

(参见《中学数学》(安徽),2007 年第 2 期,杨学枝文:"从一道不等式谈起").

89. 简证

$$原式\Leftrightarrow\sum(1+b)(1+c)(1+a^2)\leqslant 3\prod(1+a^2)\Leftrightarrow$$

$$12-8\sum bc+3(\sum bc)^2-18abc+3(abc)^2\geqslant 0 \qquad ①$$

记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc$,注意到 $\sum a=3$,将式①齐次化,得到

$$12\cdot(\frac{\sum a}{3})^6-8(\frac{\sum a}{3})^4\cdot\sum bc+3(\frac{\sum a}{3})^2\cdot(\sum bc)^2-$$

$$18(\frac{\sum a}{3})^3\cdot abc+3(abc)^3\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$4s_1^4-24s_1^4s_2+81s_1^2s_2^2-162s_1^3s_3+729s_3^2\geqslant 0 \qquad ②$$

因此,要证原式成立,只需证式②成立. 为此,令式②中 $s_1=1$,得到

$$4-24s_2+81s_2^2-162s_3+729s_3^2\geqslant 0 \qquad ③$$

由此可知,又只需证式③成立,其中 $s_1=\sum a=1$.

令 $\omega=\sqrt{1-3\sum bc}$,即 $\sum bc=\frac{1-\omega^2}{3}$,$0\leqslant x\leqslant 1$,则

$$s_3\leqslant\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{27}$$

(参见第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中定理2的推论3)因此,有

$$式③左边\geqslant 4-24\cdot\frac{1-\omega^2}{3}+81\cdot(\frac{1-\omega^2}{3})^2-162\cdot\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{27}+$$

$$729\cdot(\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{27})^2=$$

$$4\omega^2(2-2\omega+3\omega^2-3\omega^3+\omega^4)=$$

$$4\omega^2[(1-\omega)+1-\omega(1-\omega)^3]\geqslant 0$$

(注意到 $0\leqslant\omega\leqslant 1$)式③成立,从而式①成立,原式获证.

注:(1)由原式可得到:若 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a+b+c=3$,则

$$\prod(1+a^2)\geqslant\prod(1+a)$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号.

(2)猜想有:设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,$m,n$ 为正整数,且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^m)\geqslant\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^{m-1})$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取等号.

(3)进一步猜想有:设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,$m,n$ 为正整数,且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+a_i^m}{1+a_i^{m-1}}\leqslant n\prod_{i=1}^{n}\frac{1+a_i^m}{1+a_i^{m-1}}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取等号.

(4) 猜想:设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum_{i=1}^{n}a_i=n,m,n$ 为正整数,且 $m\geqslant n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^m)\geqslant 2^n$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时取等号.

90. 简证:记 $s=\frac{a+b}{2}\leqslant 1,p=ab\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant 1$,则原式等价于

$$\frac{2+2s+4s^2-2p+sp}{1+4s^2-2p+p^2}\leqslant\frac{2(1+s)}{1+s^2}\Leftrightarrow$$

$$2s^4-3s^3-s^2+p-p^2+3sp-sp^2-s^2p+s^3p\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(s^2-p)[2s(s-1)+(p-1)(s+1)]\leqslant 0$$

由 $s\leqslant 1,p\leqslant 1$ 知上式成立,原式成立.

注:(1) 由原不等式可得到

$$\frac{(1+a)(1+b)}{(1+a^2)(1+b^2)}\leqslant[\frac{1+\frac{a+b}{2}}{1+(\frac{a+b}{2})^2}]^2$$

(2) 猜想:设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-},i=1,2,\cdots,n$,且 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a\leqslant 1$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{1+a_i^2}\leqslant(\frac{1+a}{1+a^2})^n$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号.

91. 简证一:由 $abc=1$,可设 $ab\leqslant 1$,将 $c=\frac{1}{ab}$ 代入原式并整理得

$$(ab)^2(a+b)^2+18ab(1-ab)(a+b)+16(ab)^3-3(ab)^2-18ab+1\geqslant 0 \quad ①$$

因此,要证原式成立,只需证式 ① 成立.

因为 $$ab\leqslant 1$$

所以

$$(ab)^2(a+b)^2+18ab(1-ab)(a+b)\geqslant 4(ab)^3+36ab(1-ab)\sqrt{ab}$$

记 $x=\sqrt{ab}\leqslant 1$,于是,要证式 ①,只需证

$$4x^6+36x^3(1-x^2)+16x^6-3x^4-18x^2+1\geqslant 0$$

即

$$20x^6-36x^5-3x^4+36x^3-18x^2+1\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(x-1)^2(2x-1)^2(5x^2+6x+1)\geqslant 0$$

此式显然成立,故式 ① 成立,原命题获证. 由证明中易知取等号条件.

简证二: 设 $a=\frac{x^2}{yz},b=\frac{y^2}{zx},c=\frac{z^2}{xy}$,则原式等价于

$$\sum x^6-3x^2y^2z^2\geqslant 18(xyz\sum x^3-\sum y^3z^3) \quad ①$$

记 $s_1=\sum x,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,这时,式 ① 又可化为

$$s_1^6-6s_1^4s_2-12s_1^3s_3+9s_1^2s_2^2-12s_1s_2s_3+16s_2^3\geqslant 0 \quad ②$$

因此,要证式 ① 成立,只需证式 ② 成立. 为此,令 $s_1=\sum x=1$,则式 ② 即为

$$1-6s_2+9s_2^2+16s_2^3-(12+12s_2)s_3\geqslant 0$$

记 $\omega=\sqrt{1-3\sum yz}$,即 $\sum yz=\frac{1-\omega^2}{3},0\leqslant\omega\leqslant 1$,则有

$$s_3\leqslant\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{27}$$

(参见第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中定理2的推论3)因此,又只需证

$$1-6\cdot\frac{1-\omega^2}{3}+9(\frac{1-\omega^2}{3})^2+16(\frac{1-\omega^2}{3})^3-(12+12\cdot\frac{1-\omega^2}{3})\cdot\frac{1-3\omega^2+2\omega^3}{3}\geqslant 0$$

经整理,即得到

$$\omega^2(4-3\omega+63\omega^2+8\omega^3-16\omega^4)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\omega^2(4-\omega^2)(1-4\omega)^2\geqslant 0$$

故式 ② 成立,从而式 ① 成立.

92. 简证:由齐次性,可设 $x+y+z=1$,若 x,y,z 均不大于$\frac{1}{2}$时,则

$$\sum x^4(y+z)=\sum x^4(1-x)<\frac{1}{8}\sum x(1-x)=$$
$$\frac{1}{8}\sum x-\frac{1}{8}\sum x^2\leqslant$$
$$\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}(\sum x)^2=\frac{1}{8}-\frac{1}{24}=$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1}{12}(\sum x)^5$$

但由 $x+y+z=1$ 知,此时等号不能取到.

若 x,y,z 中至少有一个不小于$\frac{1}{2}$,如 $x\geqslant\frac{1}{2}$,则

$$\sum x^4(y+z)=x^4(y+z)+yz[(y+z)^3-3yz(y+z)]+x(y^4+z^4)=$$
$$x^4(1-x)+yz[(1-x)^3-3yz(1-x)]+$$
$$x[(1-x)^4-4yz(1-x)^2+2(yz)^2]=$$
$$x^4(1-x)+x(1-x)^4-[(3-5x)(yz)^2-$$
$$(1-x)^2(1-5x)yz]$$

今证 $x\geqslant\frac{1}{2}$ 时

$$(3-5x)(yz)^2-(1-x)^2(1-5x)yz\geqslant 0 \qquad ①$$

当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{5}$ 时，$3-5x\geqslant 0,1-5x\leqslant 0$，则式 ① 成立；当 $\frac{3}{5}<x\leqslant 1$ 时，

因为
$$yz\leqslant(\frac{y+z}{2})^2=(\frac{1-x}{2})^2\quad 3-5x<0$$

所以
$$(3-5x)yz\geqslant(3-5x)(\frac{1-x}{2})^2\geqslant(1-x)^2(1-5x)$$

即
$$(3-5x)yz-(1-x)^2(1-5x)\geqslant 0$$

式 ① 成立. 故 x,y,z 中至少有一个不小于 $\frac{1}{2}$ 时，有

$$\sum x^4(y-z)\leqslant x^4(1-x)+x(1-x)^4=x(1-x)[1-3x(1-x)]=$$
$$\frac{1}{3}\cdot 3x(1-x)[1-3x(1-x)]\leqslant$$
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

由上证明易知，当且仅当 $x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6},y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6},z=0$ 时取等号.

综上，原式获证. 当且仅当 $x=y=z=0$ 或 x,y,z 中有一个为零，另外两个分别等于 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时取等号.

93. 简证一：(Daniel Campos Salas Casta Rica 提供)

由柯西不等式，有

$$(\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}})^2\leqslant\sum a\sum\frac{a}{a^2+2bc}$$

因此，只需证明

$$\sum\frac{a}{a^2+2bc}\leqslant\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\Leftrightarrow\sum\frac{a(ab+bc+ca)}{a^2+2bc}\leqslant a+b+c$$

不失一般性，假设 $a\geqslant b\geqslant c$，有

$$\frac{c(c-a)(c-b)}{c^2+2ab}\geqslant 0$$

且

$$\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+2bc}+\frac{b(b-c)(b-a)}{b^2+2ca}=$$

$$\frac{c(a-b)^2[3ab+2a(a-c)+2b(b-c)]}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)}\geqslant 0$$

因此

$$\sum\left(a-\frac{a(ab+bc+ca)}{a^2+2bc}\right)=\sum\frac{a(a-b)(a-c)}{a^2+2bc}\geqslant 0$$

故原式成立.

简证二:(Pham Hun Duc Australia 提供)

由于不等式关于 a,b,c 对称,不失一般性,可假设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$(a-c)(b-c)\geqslant 0$$

从而

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+2ab}}\leqslant\frac{c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

下面不难证明

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}}\leqslant\frac{a+b}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

此不等式等价于

$$\frac{a(\sqrt{a^2+2bc}-\sqrt{ab+bc+ca})}{\sqrt{a^2+2bc}}\geqslant\frac{b(\sqrt{ab+bc+ca}-\sqrt{b^2+2ca})}{\sqrt{b^2+2ca}} \quad ①$$

容易证明对于 $a\geqslant b\geqslant c$,有

$$\sqrt{a^2+2bc}-\sqrt{ab+bc+ca}\geqslant 0$$

$$\sqrt{ab+bc+ca}-\sqrt{b^2+2ca}\geqslant 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}\geqslant\frac{b}{\sqrt{b^2+2ca}} \quad ②$$

另外有

$$\sqrt{a^2+2bc}-\sqrt{ab+bc+ca}\geqslant\sqrt{ab+bc+ca}-\sqrt{b^2+2ca}\Leftrightarrow \quad ③$$

$$\sqrt{a^2+2bc}+\sqrt{b^2+2ca}\geqslant 2\sqrt{ab+bc+ca}$$

上式两边平方得

$$a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+2bc)(b^2+2ca)}\geqslant 4ab+2bc+2ca$$

因为 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,从而要证式 ③ 成立,则只需证

$$\sqrt{(a^2+2bc)(b^2+2ca)}\geqslant ab+bc+ca$$

上式等价于

$$c(2a^3+2b^2+2abc-a^2c-b^2c-2a^2b-2ab^2)=c(2a+2b-c)(a-b)^2\geqslant 0$$

故式 ③ 成立，于是将式 ② 与 ③ 相乘，得式 ① 成立，从而原不等式成立.

94. 简证一：由柯西不等式得

$$\left(\frac{x}{y^2+y}+\frac{y}{z^2+z}+\frac{z}{x^2+x}\right)(xy+yz+zx) \geqslant$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{z+1}}+\frac{z}{\sqrt{x+1}}\right) \quad ①$$

又因为

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{z+1}}+\frac{z}{\sqrt{x+1}}\right)(x\sqrt{y+1}+y\sqrt{z+1}+z\sqrt{x+1}) \geqslant$$

$$(x+y+z)^2=1 \quad ②$$

$$(x\sqrt{y+1}+y\sqrt{z+1}+z\sqrt{x+1})^2=$$

$$[\sqrt{x}\cdot\sqrt{x(y+1)}+\sqrt{y}\cdot\sqrt{y(z+1)}+\sqrt{z}\cdot\sqrt{z(x+1)}]^2 \leqslant$$

$$(x+y+z)[x(y+1)+y(z+1)+z(x+1)]=$$

$$xy+yz+zx+1 \leqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^2+1=\frac{4}{3}$$

所以

$$x\sqrt{y+z}+y\sqrt{z+1}+z\sqrt{x+1} \leqslant \frac{3}{\sqrt{2}} \quad ③$$

由式 ②，③ 得

$$\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{z+1}}+\frac{z}{\sqrt{x+1}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ④$$

由式 ①，④ 得

$$\frac{x}{y^2+y}+\frac{y}{z^2+z}+\frac{z}{x^2+x} \geqslant \frac{3}{4(xy+yz+zx)}$$

简证二：由柯西不等式得

$$\left(\frac{x}{y^2+y}+\frac{y}{z^2+z}+\frac{z}{x^2+x}\right)(xy+yz+zx) \geqslant$$

$$\left(\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{z+1}}+\frac{z}{\sqrt{x+1}}\right)^2 \quad ①$$

由权方和不等式和常用不等式 $xy+yz+zx \leqslant \frac{(x+y+z)^2}{3}$ 得

$$\frac{x}{\sqrt{y+1}}+\frac{y}{\sqrt{z+1}}+\frac{z}{\sqrt{x+1}}=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{xy+x}}+\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{yz+y}}+\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{zx+z}} \geqslant$$

$$\frac{(x+y+z)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{xy+yz+zx+x+y+z}}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{xy+yz+zx+1}} \geqslant$$
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{(x+y+z)^2}{3}+1}} =$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad ②$$

由式①,②得

$$\frac{x}{y^2+y}+\frac{y}{z^2+z}+\frac{z}{x^2+x} \geqslant \frac{3}{4(xy+yz+zx)}$$

95. 简证

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{y}{z} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{xy}{z^2}} = 3\sqrt[3]{xyz}\cdot\frac{1}{z} \geqslant \frac{3}{z}$$

同理还有两式,将三式两边分别相加即得.

96. 简证

$$\sum \sin\varphi_1(-\sin\beta_1+\sin\beta_2+\sin\beta_3) =$$
$$4\sum \sin\frac{\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}\sin\varphi_1 =$$
$$4\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_3}{2}\sum \tan\frac{\beta_2}{2}\tan\frac{\beta_3}{2}\sin\varphi_1 \leqslant$$
$$4\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_3}{2}\sqrt{\left(\sum \tan\frac{\beta_2}{2}\tan\frac{\beta_3}{2}\sin^2\varphi_1\right)\left(\sum \tan\frac{\beta_2}{2}\tan\frac{\beta_3}{2}\right)} =$$
$$4\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_3}{2}\sqrt{\left(\sum \tan\frac{\beta_2}{2}\tan\frac{\beta_3}{2}\sin^2\varphi_1\right)} \leqslant$$
$$4\cos\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_3}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\left(\sum \tan\frac{\beta_1}{2}\right)^2} =$$
$$2\sum \sin\frac{\beta_1}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\cos\frac{\beta_3}{2} =$$
$$2\left(\sin\frac{\beta_1+\beta_2+\beta_3}{2}+\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3}{2}\right) =$$
$$2\left(1+\sin\frac{\beta_1}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}\sin\frac{\beta_3}{2}\right) \leqslant$$
$$\frac{9}{4}$$

猜想:设$\beta_i,\varphi_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n, n\geqslant 3$,且$\sum\beta_1 = \sum\varphi_1 = \pi$,则

$$\sum \sin \varphi_1(-\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \cdots + \sin \beta_n) \leqslant n(n-2)\sin^2 \frac{\pi}{n}$$

当 $n=4$ 时，当且仅当

$$(-\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \sin \beta_3 + \sin \beta_4)\cos \varphi_1 =$$
$$(\sin \beta_1 - \sin \beta_2 + \sin \beta_3 + \sin \beta_4)\cos \varphi_2 =$$
$$(\sin \beta_1 + \sin \beta_2 - \sin \beta_3 + \sin \beta_4)\cos \varphi_3 =$$
$$(\sin \beta_1 + \sin \beta_2 + \sin \beta_3 - \sin \beta_4)\cos \varphi_4$$

时取等号；其余情况，当且仅当 $\beta_i = \varphi_i = \frac{\pi}{n}(i=1,2,\cdots,n)$ 时取等号.

97. 简证：对于非负数 x,y,z,t，我们先考察函数

$$f(t) = \sum (x+t)^4 - \prod (x+t) \cdot \sum (x+t) - 2\sqrt{2}(x-y)(y-z)(z-x) \cdot \sum (x+t) = A + Bt + ct^2$$

即

$$A = \sum x^4 - xyz\sum x - 2\sqrt{2}(x-y)(y-z)(z-x) \cdot \sum x$$
$$B = 4\sum x^3 - \sum x \cdot \sum yz - 3xyz - 6\sqrt{2}(x-y)(y-z)(z-x)$$
$$C = 6\sum x^2 - (\sum x)^2 - 3\sum yz$$

易证

$$C = 6\sum x^2 - (\sum x)^2 - 3\sum yz = 5(\sum x^2 - \sum yz) \geqslant 0$$

下面证明 $B \geqslant 0$. 为此，设 $y \geqslant x \geqslant z$，则

$$B = 4\sum x^3 - \sum x \cdot \sum yz - 3xyz - 6\sqrt{2}(x-y)(y-z)(z-x) =$$
$$\sum (x+2y+2z)(y-z)^2 \geqslant$$
$$[(x-z)+2(y-z)](y-z)^2 + [(y-z)+2(x-z)](x-z)^2 +$$
$$[2(x-z)+2(y-z)](y-x)^2 - 6\sqrt{2}(y-x)(y-z)(x-z) =$$
$$4(x-z)^3 + 4(y-z)^3 - (x+y-2z)(x-z)(y-z) -$$
$$6\sqrt{2}(y-x)(y-z)(x-z)$$

令 $p = x-z \geqslant 0, q = y-z \geqslant 0, q \geqslant p$，于是只要证上式不小于零，事实上有

$$4(x-z)^3 + 4(y-z)^3 - (x+y-2z)(x-z)(y-z) -$$
$$6\sqrt{2}(y-x)(y-z)(x-z) =$$
$$4p^3 + 4q^3 - pq(p+q) - 6\sqrt{2}pq(q-p) =$$
$$[p^3 + q^3 - pq(p+q)] + 3[p^3 + q^3 - 2\sqrt{2}pq(p-q)] \geqslant$$
$$3[p^3 + q^3 - 2\sqrt{2}pq(q-p)] =$$

$$3[q^3+2\sqrt{2}p^2q-2\sqrt{2}pq^2+p^3]\geqslant$$
$$3[2\sqrt{2\sqrt{2}}pq^2-2\sqrt{2}pq^2+p^3]\geqslant$$
$$0$$

所以 $$B\geqslant 0$$

因为 $$t\geqslant 0$$

所以 $$f(t)\geqslant A$$

即

$$\sum(x+t)^4-\prod(x+t)\cdot\sum(x+t)-2\sqrt{2}(x-y)(y-z)(z-x)\cdot$$
$$\sum(x+t)\geqslant\sum x^4-xyz\sum x-2\sqrt{2}(x-y)(y-z)(z-x)\cdot\sum x \qquad ①$$

由对称性，不妨设 $b\geqslant a\geqslant c$，且令 $x=a-c\geqslant 0,y=b-c\geqslant 0,z=0,t=c\geqslant 0$，则由式 ① 得到

$$\sum a^4-abc\sum a-2\sqrt{2}(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\geqslant$$
$$(a-c)^4+(b-c)^4-2\sqrt{2}(b-a)(b-c)(a-c)(a+b-2c) \qquad ②$$

由式 ② 知，要证原式成立，只需证式 ② 右边不小于零即可. 这时，由于

$$(a-c)^4+(b-c)^4=[(b-c)^2-(a-c)^2]^2+2(a-c)^2(b-c)^2=$$
$$(b-a)^2(a+b-2c)^2+2(a-c)^2(b-c)^2\geqslant$$
$$2\sqrt{2}(b-a)(b-c)(a-c)(a+b-2c)$$

因此，式 ② 右边不小于零，原式获证. 由以上证明过程可得到其取等号条件.

98. 证明参见《中学数学教学》(安徽)2007 年第 2 期，杨学校文："从一道不等式题谈起".

99. 证明参见杨学校文："从一道不等式谈起"(《中学数学教学》(安徽)2007 年第 2 期).

猜想：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant n-1$，证明或否定：

(1) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-1)x_1x_2\cdots x_n\geqslant\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$；

(2) $n-1+x_1x_2\cdots x_n\geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$；

(3) $1+(n-1)x_1x_2\cdots x_n\geqslant\sum x_2x_3\cdots x_n$.

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有一个为 0，其余 $(n-1)$ 个都等于 1 时，以上三式均取等号. 这里 $\sum x_2x_3\cdots x_n$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每 $(n-1)$ 个数乘积之和.

100. 证明参见《中学数学教学》(安徽)，2007 第 4 期，杨学校文："一个不等式链及其证明".

猜想：设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant n-1$，证明或否定：

(1) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-1)x_1x_2\cdots x_n \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

(2) $n-1+x_1x_2\cdots x_n \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$;

(3) $1+(n-1)x_1x_2\cdots x_n \geqslant \sum x_2x_3\cdots x_n$.

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有一个为0,其余 $n-1$ 个都等于1时,以上三式均取等号.这里 $\sum x_2x_3\cdots x_n$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每 $n-1$ 个数乘积之和.

101. 简证

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^m-a_{i+1}^m)(a_i^k-a_{i+1}^k)}{a_{i+1}^m}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^{m+k}}{a_{i+1}^m}-\frac{a_i^m}{a_{i+1}^{m-k}}-a_i^k+a_{i+1}^k\right)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+k}}{a_{i+1}^m}-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^m}{a_{i+1}^{m-k}}\geqslant 0$$

这里约定 $a_{n+1}=a_1$.

102. 简证:去证局部不等式

$$\sum\frac{1}{4a^2-bc+2}\geqslant bc\Leftrightarrow(bc)^2-2bc+1-4a^2bc\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(1-bc)^2-4a^2bc\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(ab+ac)^2-4a^2bc\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(ab-ac)^2\geqslant 0$$

103. 简证:我们将命题进行等价变换,令 $x=2a,y=2b,z=2c,a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,于是,得到以下等价命题:

设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且满足

$$2\sum bc-\sum a^2=4abc \quad ①$$

则
$$(1-2a)(1-2b)(1-2c)\leqslant 1$$

注意到已知条件,上式结论又等价于

$$\sum a^2\leqslant\sum a \quad ②$$

当且仅当 a,b,c 均为零,或 a,b,c 中有一个为零,另外两个都等于1时,式②取等号.

下面我们来证明式②,由已知条件可知,a,b,c 不可能都大于1,否则由已知条件

$$2\sum bc-\sum a^2=4abc$$

得到

$$\sum bc\geqslant 4abc$$

即
$$\sum\frac{1}{a}\geqslant 4$$

若 a,b,c 都大于 1,则上式不可能成立.

若 a,b,c 都不大于 1,则易证有

$$\sum a^2 \leqslant \sum a$$

若 a,b,c 中有一个不大于 1,另有一个不小于 1,不妨设 $b \geqslant 1, c \leqslant 1$ 则

$$(1-b)(1-c) \leqslant 0$$

另外,将已知条件 ① 改写成

$$a^2 - 2(b+c-2bc)a + b^2 + c^2 - 2bc = 0 \quad ③$$

这时,式 ③ 的判别式

$$\Delta = 4(b+c-2bc)^2 - 4(b^2+c^2-2bc) = 4(1-b)(1-c) \leqslant 0$$

但由式 ① 成立,即式 ③ 成立,可知 $\Delta \geqslant 0$,因此

$$(1-b)(1-c) = 0$$

即 $b=1$,或 $c=1$,或 $b=c=1$. 如 $b=1$,则由式 ① 得 $a+c=1$,于是

$$\sum a^2 - \sum a = 1 + (a+c)^2 - 2ac - 1 - (a+c) = -2ac \leqslant 0$$

故式 ② 成立. 同理可证 $c=1$,或 $b=c=1$ 时式 ② 成立.

由以上证明中不难得知式 ② 的取等号条件.

104. 简证一:原式等价于

$$\sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2} \geqslant \frac{1}{3}\sum x$$

由于

$$\sum \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2} = 0$$

因此,要证原式,只需证

$$\sum \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geqslant \frac{2}{3}\sum x \quad ①$$

取等号条件同原式.

为证式 ①,先证

$$3(x^3+y^3) \geqslant (x+y)(x^2+xy+y^2) \Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geqslant 0 \quad ②$$

此式成立,故式 ② 成立.

由式 ② 得到

$$\sum \frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2} \geqslant \frac{1}{3}\sum (x+y) = \frac{2}{3}\sum x$$

再由 $\sum x \geqslant 3\sqrt{xyz} = 3$,即得原式.

注：若由 $3(x^3+y^3)\geqslant 3(\frac{x^2+y^2}{2})^{\frac{3}{2}}\geqslant \sqrt{2(x^2+y^2)}(x^2+xy+y^2)$，可知还可得较原式更强的式子

$$\sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\geqslant \frac{1}{6}\sum \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

当且仅当 $x=y=z$ 时取等号.

简证二：由于 $\sum x(x^2+xy+y^2)\cdot \sum \frac{x^3}{x^2+xy+y^2}\geqslant (\sum x^2)^2$，因此，只需证

$$\frac{(\sum x^2)^2}{\sum x(x^2+xy+y^2)}\geqslant \frac{1}{3}\sum x\Leftrightarrow 3(\sum x^2)^2\geqslant$$

$$\sum x\cdot [\sum x^3+\sum y+(y+z)]$$

记 $s_1=\sum x, s_2=\sum yz, s_3=xyz$，则上式又等价于

$$s_1^4-6s_1^2s_2+12s_2^2-9s_1s_3\geqslant 0\Leftrightarrow (s_1^2-3s_2)^2+3(s_2^2-3s_1s_3)\geqslant 0$$

105. 简证：原式等价于

$$\sum (x^2-y^2)^2\geqslant 2\sum xy(x^2-y^2) \qquad ①$$

当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时，有

$$\sum xy(x^2-y^2)=(x+y+z)(x-y)(y-z)(x-z)\geqslant 0$$

因此，要证式①，只要证当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时式①成立即可，这时

$$\begin{aligned}&\sum (x^2-y^2)^2-2\sum xy(x^2-y^2)=(x^2-y^2)^2+(x^2-y^2+y^2-z^2)^2+\\&(y^2-z^2)^2-2xy(x^2-y^2)-2yz(y^2-z^2)+2xz(x^2-y^2+y^2-z^2)=\\&2[(x^2-y^2)^2+(x^2-y^2)(y^2-z^2)+(y^2-z^2)^2-\\&x(x^2-y^2)(y-z)+z(y^2-z^2)(x-y)]\geqslant\\&2[(x^2-y^2)^2+(x^2-y^2)(y^2-z^2)-x(x^2-y^2)(y-z)]=\\&2(x^2-y^2)(x^2-y^2+y^2-z^2-xy+xz)=\\&2(x^2-y^2)(x^2-xy+xz-z^2)\geqslant 0\end{aligned}$$

即式①成立，从而原式获证.

106. 简证一：由于当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时，有

$$\begin{aligned}&x^3y+y^3z+z^3x-(xy^3+yz^3+zx^3)=\\&(x+y+z)(x-y)(y-z)(x-z)\geqslant\\&0\end{aligned}$$

因此，要证原式成立，只需证当 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$ 时，原式成立即可. 而这时

$$x^3y+y^3z+z^3x+xyz(x+y+z)=y(x+z)^3-$$

$$z^2(2xy-xz+yz)-yz(2x^2-xy-y^2)\leqslant$$
$$y(x+z)^3=27(y\cdot\frac{x+z}{3}\cdot\frac{x+z}{3}\cdot\frac{x+z}{3})\leqslant$$
$$27(\frac{x+y+z}{4})^4=$$
$$\frac{27}{256}(x+y+z)^4$$

简证二:由简证一知,只要证当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时原式成立即可,易证有

$$(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)(x+z)-[x^3y+y^3z+z^3x+xyz(x+y+z)]=$$
$$yz(x^2-y^2)+z^2(x^2+y^2)\geqslant$$
$$0$$

因此,有

$$x^3y+y^3z+z^3x+xyz(x+y+z)\leqslant(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)(x+z)\leqslant y(x+z)^3$$

(可参见第三章"放缩法证明不等式"中例5).

以下证法同简证一.

注:(1)若用同上简证二的方法,可以证明

$$x^4y+y^4z+z^4x+xyz(x+y+z)^2\leqslant\frac{256}{3\,125}(x+y+z)^5$$

当且仅当 $x=0,y=4z$;或 $y=0,z=4x$;或 $z=0,x=4y$ 时取等号.

同样只需证 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant 0$ 时原式成立即可.这时

$$x^4y+y^4z+z^4x+xyz(x+y+z)^2-(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)(x+z)^2=$$
$$-z[x^3(2y+z)+x^2(-y^2+yz+2z^2)+xyz^2+y^2z^2-y^4]\leqslant$$
$$-z[x^2y(x-y)+y(x^3-y^2)]\leqslant$$
$$0$$

因此

$$x^4y+y^4z+z^4x+xyz(x+y+z)^2\leqslant(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)(x+z)^2\leqslant$$
$$y(x+z)^4=$$
$$256y\cdot\frac{x+z}{4}\cdot\frac{x+z}{4}\cdot\frac{x+z}{4}\cdot\frac{x+z}{4}\leqslant$$
$$256\cdot(\frac{x+y+z}{5})^5$$

(2)本题来源于《中学数学》(湖北)2008年第2期,何铁军文:"一道有奖征答题的解答、加强及猜想".文末作者提出了如下猜想:

(1)设 x_1,x_2,x_3 是非负实数,且满足 $x_1+x_2+x_3=1,k\geqslant 2,k\in\mathbf{Z}$,则

$$x_1^kx_2+x_2^kx_3+x_3^kx_1+x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)^{k-2}\leqslant\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是非负实数，且满足 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1, n \geqslant 3, n \in \mathbf{Z}, k \geqslant n-1$，则

$$x_1^k x_2 + x_2^k x_3 + x_3^k x_4 + \cdots + x_n^k x_1 + x_1 x_2 \cdots x_n (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^{k-n+1} \leqslant \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}$$

我们这里证明了 $k = 4, n = 3$ 时的情况.

107. 简证：令 $x = -a+b+c, y = a-b+c, z = a+b-c$，则由条件 $\sum x \geqslant \frac{yz}{x}, \frac{zx}{y}, \frac{xy}{z}$，可得到 $b^2 + c^2 \geqslant a^2, c^2 + a^2 \geqslant b^2, a^2 + b^2 \geqslant c^2$，因此，原题等价于：在非锐角 $\triangle ABC$ 中，若三边长为 a, b, c，则

$$\sum a \cdot \sum \frac{1}{a^4} \geqslant \frac{9}{\prod(-a+b+c)} \Leftrightarrow 2\left(\sum b^2c^2 - \sum a^4\right) \cdot \sum \frac{1}{a^4} \geqslant 9$$

在上式中作置换 $a^2 \to a, b^2 \to b, c^2 \to c$，则又等价于在任意 $\triangle ABC$ 中，有

$$\left(2\sum bc - \sum a^2\right) \cdot \left(\sum \frac{1}{a^2}\right) \geqslant 9$$

其中 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 三边长. 此不等式证明可应用第七章“其他不等式证明例子”例 19 中的式(21).

108. 简证：记 $M = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{abcd}}$，则易证有

$$(-a+b+cd)^2 + \frac{(-bcd+acd+abd+abc)^2}{abcd} =$$
$$(a-b+c+d)^2 + \frac{(bcd-acd+abd+abc)^2}{abcd} =$$
$$(a+b-c+d)^2 + \frac{(bcd+acd-abd+abc)^2}{abcd} =$$
$$(a+b+c-d)^2 + \frac{(bcd+acd+abd+abc)^2}{abcd} =$$
$$M^2$$

于是得到

$$[x(-a+b+c+d) + y(a-b+c+d)]^2 \leqslant$$
$$[x(-a+b+c+d) + y(a-b+c+d)]^2 +$$
$$\left(x \cdot \frac{-bcd+acd+abd+abc}{\sqrt{abcd}} - y \cdot \frac{bcd-acd+abd+abc}{\sqrt{abcd}}\right)^2 =$$
$$M^2(x^2+y^2) + 2xy\Big[(-a+b+c+d)(a-b+c+d) -$$
$$\frac{(-bcd+acd+abd+abc)(bcd-acd+abd+abc)}{abcd}\Big] =$$

$$M^2(x^2+y^2)+2xy[(c+d)^2-(a-b)^2-\frac{(ab)^2(c+d)^2-(cd)^2(a-b)^2}{abcd}]$$

即

$$\frac{[x(-a+b+c+d)+y(a-b+c+d)]^2}{xy}\leqslant$$

$$M^2\cdot\frac{x^2+y^2}{xy}+2[(c+d)^2-(a-b)^2-\frac{(ab)^2(c+d)^2-(cd)^2(a-b)^2}{abcd}] \quad ①$$

同理有

$$\frac{[z(a+b-c+d)+w(a+b+-d)]^2}{zw}\leqslant$$

$$M^2\cdot\frac{z^2+w^2}{zw}+2[(a+b)^2-(c-d)^2-\frac{(cd)^2(a+b)^2-(ab)^2(c-d)^2}{abcd}] \quad ②$$

注意到式①、②右边式子第二项两式之和为零，因此由式①+②得到

$$\frac{[x(-a+b+c+d)+y(a-b+c+d)]^2}{xy}+$$
$$\frac{[z(a+b-c+d)+w(a+b+c-d)]^2}{zw}\leqslant$$
$$M^2(\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw})=$$
$$M^2\cdot\frac{(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw} \quad ③$$

由式③，应用柯西不等式得到

$$[x(-a+b+c+d)+y(a-b+c+d)+$$
$$z(a+b-c+d)+w(a+b+c-d)]^2\leqslant$$
$$\{\frac{[x(-a+b+c+d)+y(a-b+c+d)]^2}{xy}+$$
$$\frac{[z(a+b-c+d)+w(a+b+c-d)]^2}{zw}\}(xy+zw)\leqslant$$
$$M^2\cdot\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}$$

上式两边开方即得原式. 由证明过程不难得到取等号条件.

注:1. 本题是由第一章“等价变换法证明不等式”中例3演变而来的.

2. 若在式(9)中应用正弦定理，可得到以下命题.

命题1：圆内接凸四边形 $ABCD$ 边长为 a,b,c,d，圆半径为 R，$x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$，则

$$xa+yb+zc+wd\leqslant 2R\cdot\sqrt{\frac{(xy+zw)(xz+yw)(xw+yz)}{xyzw}}$$

当且仅当

$$x\cdot\sqrt{1-(\frac{a}{2R})^2}=y\cdot\sqrt{1-(\frac{b}{2R})^2}=w\cdot\sqrt{1-(\frac{c}{2R})^2}=z\cdot\sqrt{1-(\frac{d}{2R})^2}$$

时取等号.

若注意到圆内接四边形中,圆半径公式

$$R=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}}=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\Delta}$$

Δ 为圆内接四边形面积,又可得到下面命题.

命题2:凸四边形 $ABCD$ 边长为 a,b,c,d,内接于圆半径为 R 的圆,另凸四边形 $A'B'C'D'$ 边长为 a',b',c',d',内接于半径为 R' 的圆,则

$$\sum a'(-a+b+c+d)\leqslant 8R'R$$

当且仅当

$$(-a+b+c+d)\cdot\sqrt{1-(\frac{a'}{2R})^2}=(a-b+c+d)\cdot\sqrt{1-(\frac{b'}{2R})^2}=$$
$$(a+b-c+d)\cdot\sqrt{1-(\frac{c'}{2R})^2}=$$
$$(a+b+c-d)\cdot\sqrt{1-(\frac{d'}{2R})^2}$$

时取等号.

109. 简证:为证明方便,作如下变换:设 $x=2a,y=2b,z=2c$,这时原命题等价于:

设 $a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且满足 $a+b+c=1$,则

$$\sum\sqrt{9-32bc}\geqslant 7 \qquad ①$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$,或 a,b,c 中有一个为零,其余两个都等于 $\frac{1}{2}$ 时取等号.

下面我们来证明式①,即

$$\text{式①}\Leftrightarrow(\sqrt{9-32bc}+\sqrt{9-32ac})^2\geqslant(7-\sqrt{9-32ab})^2\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{9-32bc}\cdot\sqrt{9-32ac}+7\sqrt{9-32ab}\geqslant$$
$$20+16bc+16ac-16ab$$

将上式两边再次平方整理,得到

$$7\sqrt{729-2\,592\sum bc+9\,216abc-32\,768(abc)^2}\geqslant$$
$$-61+128(\sum bc)^2-512abc+464\sum bc$$

记 $s_1 = \sum a = 1, s_2 = \sum bc, s_3 = abc$,则上式可写为

$$7\sqrt{729 - 2\,592s_2 + 9\,216s_3 - 32\,768s_3^2} \geqslant$$
$$-61 + 128s_2^2 - 512s_3 + 464s_2 \qquad ②$$

因此,要证式①,只要证式②成立.

由于 $$s_1^3 - 4s_1s_2 + 9s_3 \geqslant 0$$

(参见第一章"等价变换法证明不等式"中例14)因此得到

$$s_2 \leqslant \frac{1 + 9s_3}{4}$$

因此,要证式②,又只要证

$$7\sqrt{729 - 2\,592 \cdot \frac{1 + 9s_3}{4} + 9\,216s_3 - 32\,768s_3^2} \geqslant$$
$$-61 + 128\left(\frac{1 + 9s_3}{4}\right)^2 - 512s_3 + 464 \cdot \frac{1 + 9s_3}{4} \Leftrightarrow$$
$$7\sqrt{81 + 3\,384s_3 - 32\,768s_3^2} \geqslant$$
$$63 + 676s_3 + 648s_3^2$$

将上式两边平方并整理,得到

$$s_3(1\,260 - 33\,504s_3 - 13\,689s_3^2 - 6\,561s_3^3) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$s_3(1 - 27s_3)(1\,260 + 516s_3 + 243) \geqslant 0$$

此式显然成立,因此式②成立,从而式①获证,由以上证明易得到取等号条件.

110. 简证:原式等价于

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 \geqslant \sqrt{\frac{4bc}{(a - b + c)(a + b - c)}} - \frac{b + c}{a} \Leftrightarrow$$
$$\frac{(b - c)^2}{bc}\left[\sqrt{\frac{4bc}{(a - b + c)(a + b - c)}} + \frac{b + c}{a}\right] \geqslant$$
$$\frac{4bc}{(a - b + c)(a + b - c)} - \left(\frac{b + c}{a}\right)^2 =$$
$$\frac{(b - c)^2[(b + c)^2 - a^2]}{a^2[a^2 - (b - c)^2]}$$

当 $b = c$ 时,上式取等号;当 $b \neq c$ 时,只要证

$$2a^2\sqrt{bc[a^2 - (b - c)^2]} + a(b + c)[a^2 - (b - c)^2] \geqslant bc[(b + c)^2 - a^2] \qquad ①$$

由于 $\angle A \geqslant \frac{\pi}{3}$,则 $a^2 \geqslant b^2 + c^2 - bc$,即有

$$a^2 - (b - c)^2 \geqslant bc$$

因此,要证式①,只需证

$$2a^2bc + abc(b+c) \geqslant bc[(b+c)^2 - a^2]$$

即

$$(a+b+c)(2a-b-c) + a^2 \geqslant 0 \qquad ②$$

又由 $a^2 \geqslant b^2 + c^2 - bc$,有

$$4a^2 \geqslant 4b^2 + 4c^2 - 4bc \geqslant (b+c)^2$$

即 $$2a - b - c \geqslant 0$$

故式 ② 成立,从而式 ① 成立,原命题获证.

注:笔者于 1990 年 1 月 14 日撰写了《Janous - Gmeiner 不等式的初等证明》,此后在《中等数学》(天津)1992 年第 1 期上刊出,后又被收入上海教育出版社出版的《初等数学论丛》一书,本题是该文中的一个引理,该题曾被选作我国第五届数学奥林匹克国家集训队选拔测试题题五.

111. 简证一:由 $abc = 1$,不妨设 $a \geqslant 1$,且有

$$15\sum bc + 2\sum a \cdot \sum bc - 21\sum a =$$

$$2a(b+c)^2 + (2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a})(b+c) - 21a + 2 + \frac{15}{a} \qquad ①$$

今证

$$2a(b+c)^2 + (2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a})(b+c) - 21a + 2 + \frac{15}{a} \geqslant$$

$$8abc + (2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a}) \cdot 2\sqrt{bc} - 21a + 2 + \frac{15}{a} \Leftrightarrow$$

$$[2a(b+c) + 4a\sqrt{bc} + 2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a}](\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geqslant 0 \qquad ②$$

由于

$$2a(b+c) + 4a\sqrt{bc} + 2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a} \geqslant$$

$$8\sqrt{a} + 2a^2 + 15a + \frac{2}{a} - 21 \geqslant$$

$$25 - 21 > 0$$

故式 ② 成立,因此,由式 ① 知,要证原式成立,只要证

$$8abc + (2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a}) \cdot 2\sqrt{bc} - 21a + 2 + \frac{15}{a} =$$

$$(2a^2 + 15a - 21 + \frac{2}{a}) \cdot \frac{2}{\sqrt{a}} - 21a + \frac{15}{a} + 10 \geqslant 0 \qquad ③$$

设 $\sqrt{a} = x \geqslant 1$,则式 ③ 等价于

$$4x^6 - 21x^5 + 30x^4 + 10x^3 - 42x^2 + 15x + 4 \geqslant 0$$

即 $$(x-1)^2(4x^4 - 13x^3 + 23x + 4) \geqslant 0$$

因此,要证式③成立,又只要证

$$4x^4-13x^3+23x+4\geqslant 0 \qquad ④$$

$$4a^4-13a^3+23a+4=4x^2(x-2)^2+x(3x^2-16x+23)>0$$

故式④成立,从而式③成立.原式获证.

简证二:由$(\sum bc)^3-4abc\cdot\sum a\cdot\sum bc+9(abc)^2\geqslant 0$(见第一章"等价变换法证明不等式"例14),$abc=1$得到

$$(\sum bc)^3-4abc\cdot\sum a\cdot\sum bc+9(abc)^2\geqslant 0$$

即

$$\sum a\leqslant\frac{(\sum bc)^3+9}{4\sum bc}$$

另,原式可写为

$$\frac{15}{\sum a}+2-\frac{21}{\sum bc}\geqslant 0$$

因此,只需证

$$\frac{60\sum bc}{(\sum bc)^3+9}+2-\frac{21}{\sum bc}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$2s_2^4-21s_2^3+60s_2^2+18s_2-189\geqslant 0$$

$$(\text{这里 } s_2=\sum bc)\Leftrightarrow$$

$$(s_2-3)(2s_2^3-15s_2^2+15s_2+63)\geqslant 0 \qquad ⑤$$

因为

$$s_2-3\geqslant 0$$

$$2s_2^3-15s_2^2+15s_2+63=\frac{1}{2s_2}[(2s_2^2-\frac{15}{2}s_2-\frac{105}{16})^2+\frac{441}{16}s_2-(\frac{105}{16})^2]\geqslant$$

$$\frac{1}{2s_2}[\frac{441\times 3}{16}-(\frac{105}{16})^2]>0$$

故式⑤成立,原式获证.

注:由本题结论及第一章"等价变换法证明不等式"例14所得

$$(\sum bc)^3-4\sum a\cdot\sum bc+9abc\geqslant 0$$

得到以下命题.

命题:设$a,b,c\in\mathbf{R}^+$,且$abc=1$,记$s_1=\sum a,s_2=\sum bc$,则

(1) $\dfrac{21s_1}{15+2s_1}\leqslant s_2\leqslant\dfrac{s_1^3+9}{4s_1}$;

(2) $\dfrac{21s_2}{15+2s_2}\leqslant s_1\leqslant\dfrac{s_2^3+9}{4s_2}$.

当且仅当 $a=b=c=1$ 时,以上不等式均取等号.

上面不等式常可用来证明三元正数之积为 1 时的某些齐次不等式.

112. 简证:分两种情况证明.

(1) 当 $\sum a \geqslant \sum bc$ 时,由于

$$\sum \sqrt{3a^2+4} = \sum \sqrt{a(3a+4bc)} \leqslant$$
$$\sqrt{\sum a \cdot \sum (3a+4bc)} =$$
$$\sqrt{\sum a \cdot (3\sum a + 4\sum bc)} \leqslant$$
$$\sqrt{7}\sum a$$

原式成立.

(2) 当 $\sum a \leqslant \sum bc$ 时,记 $s_1=\sum a, s_2=\sum bc, s_3=abc=1$,则

$$\text{原式} \Leftrightarrow 2s_1^4+6s_1^2s_2-24s_1^2+9s_1+6s_2-6 \geqslant$$
$$\sqrt{7}\cdot s_1\cdot\sqrt{(3a^2+4)(3b^2+4)(3c^2+4)} =$$
$$\sqrt{7}\cdot s_1\cdot\sqrt{36s_2^2+48s_1^2-96s_2-72s_1+91} \quad ①$$

由已知条件及假设有 $\sum bc \geqslant \sum a \geqslant 3$,于是

$$\text{式①左边} \geqslant 2s_1^4+6s_1^3-24s_1^2+15s_1-6 \geqslant$$
$$s_1(2s_1^3+6s_1^2-24s_1+13)$$
$$\text{式①右边} = \sqrt{7}s_1\sqrt{4(3s_2-4)^2+48s_1^2-72s_1+27} \leqslant$$
$$\sqrt{7}\cdot s_1\cdot\sqrt{4(s_1^2-4)^2+48s_1^2-72s_1+27} \leqslant$$
$$\sqrt{7}\cdot s_1\cdot\sqrt{4s_1^4+16s_2^2-72s_1+91}$$

因此,要证式①,只需证

$$(2s_1^3+6s_1^2-24s_1+13)^2 \geqslant 7(4s_1^4+16s_1^2-72s_1+91) \Leftrightarrow$$
$$s_1^6+6s_1^5-22s_1^4-59s_1^3+155s_1^2-30s_1-117 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$(s_1-3)(s_1^5+9s_1^4+5s_1^3-44s_1^2+23s_1+39) \geqslant 0$$

由 $s_1 \geqslant 3$ 易知上式成立,故当 $\sum a \leqslant \sum bc$ 时,原式也成立.

综上,原命题获证.

113. 简证

$$\sum \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{2}} \leqslant \sum \left(a+b-\frac{2ab}{a+b}\right) =$$
$$2\sum a - \sum \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} =$$

$$2\sum a-\frac{1}{4}\sum\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot\sum\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant$$

$$2\sum a-\frac{9}{4}$$

114. 简证:记

$$A=bc+4a(b+c),B=ca+4b(c+a),C=ab+4c(a+b)$$

将原式两边平方,并整理得到

$$\sum bc\cdot\sum\frac{1}{(b+c)^2}+3\sum\frac{a}{b+c}+2\sum\frac{\sqrt{BC}}{(c+a)(a+b)}\geqslant\frac{81}{4}$$

由于

$$\sum bc\cdot\sum\frac{1}{(b+c)^2}\geqslant\frac{9}{4}$$

(见第七章"其他不等式证明例子" 中例 19) 因此,只需证

$$3\sum\frac{a}{b+c}+2\sum\frac{\sqrt{BC}}{(c+a)(a+b)}\geqslant 18 \quad ①$$

另外,由于

$$(b+c)^2[ca+4b(c+a)][ab+4c(a+b)]=$$
$$[(ac^2+4ab^2+5abc)+(4b^2c+4bc^2)]$$
$$[(ab^2+4ac^2+5abc)+(4b^2c+4bc^2)]\geqslant$$
$$[\sqrt{(ac^2+4ab^2+5abc)(ab^2+4ac^2+5abc)}+(4b^2c+4bc^2)]^2\geqslant$$
$$[(2ab^2+2ac^2+6abc)+(4b^2c+4bc^2)]^2$$

因此

$$\sqrt{BC}\geqslant\frac{2ab^2+2ac^2+4b^2c+4bc^2+6abc}{b+c}$$

因此

$$式①左边\geqslant 3\sum\frac{a}{b+c}+\frac{12[\sum a(b^2+c^2)+3abc]}{(b+c)(c+a)(a+b)}=$$
$$\frac{3\sum a^3+15\sum a(b^2+c^2)+45abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}\Leftrightarrow$$
$$\sum a^3-\sum a(b^2+c^2)+3abc\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(\sum a)^3-4\sum a\cdot\sum bc+9abc\geqslant 0$$

此式成立(见第一章"等价变换法证明不等式" 中例 14). 故式 ① 成立,从而原命题成立. 由以上证明易知取等号条件.

注:本题解答参考了 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》,P350 ~ 360.

115. 简证:记

$$s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc=1$$

则原式两边经平方并整理后等价于

$$s_1^2+2s_1-4s_2-3\geqslant 0 \qquad ①$$

由第一章"等价变换法证明不等式"中例14,易得

$$s_2\leqslant\frac{s_1^3+9}{4s_1}$$

因此,要证式①,只要证

$$s_1^2+2s_1-\frac{s_1^3+9}{s_1}-3\geqslant 0\Leftrightarrow 2s_1^2-3s_1-9\geqslant 0$$

$$(s_1-3)(2s_1+3)\geqslant 0$$

此式显然成立,故式①成立,原式获证,由上证明易知取等号条件.

116. 简证:在 $\triangle B_1B_2B_3$ 中,令

$$\lambda_1=-\sin B_1+\sin B_2+\sin B_3$$

$$\lambda_2=\sin B_1-\sin B_2+\sin B_3$$

$$\lambda_3=\sin B_1+\sin B_2-\sin B_3$$

经和差化积分别得到

$$\lambda_1=4\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}\cos\frac{B_1}{2}$$

$$\lambda_2=4\sin\frac{B_3}{2}\sin\frac{B_1}{2}\cos\frac{B_2}{2}$$

$$\lambda_3=4\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}\cos\frac{B_3}{2}$$

于是,有

$$原式左边=\frac{\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}+\sin\frac{B_3}{2}\sin\frac{B_1}{2}+\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}}{\sqrt{\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}}}$$

$$原式右边=(6-3\sqrt{3})\sqrt{\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}}+\frac{\cos\frac{B_1}{2}\cos\frac{B_2}{2}\cos\frac{B_3}{2}}{\sqrt{\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}}}$$

又据三角函数等式

$$\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}=\frac{r}{4R}$$

$$\cos\frac{B_1}{2}\cos\frac{B_2}{2}\cos\frac{B_3}{2}=\frac{s}{4R}$$

以上R,r,s分别表示$\triangle B_1B_2B_3$的外接圆半径,内切圆半径,半周长,将其代入以上两式,即得

$$\sin\frac{B_2}{2}\sin\frac{B_3}{2}+\sin\frac{B_3}{2}\sin\frac{B_1}{2}+\sin\frac{B_1}{2}\sin\frac{B_2}{2}\geqslant\frac{(6-3\sqrt{3})r}{4R}+\frac{s}{4R}$$

此式成立,可参见《不等式研究》(杨学枝主编,西藏人民出版社2000年6月)一书中杨学枝、尹华焱文"我国研究三角形中半角三角函数不等式情况综述".故原式成立.原式对于退化三角形(一边等于零,其余两边相等或两边和等于第三边)也成立.

117. 简证:令$x=-a+b+c,y=a-b+c,z=a+b-c,x+y+z=a+b+c=3$,则$a,b,c\in[0,\frac{3}{2}]$,同时,原不等式可化为

$$\sqrt{\frac{72}{a}-47}+\sqrt{\frac{72}{b}-47}+\sqrt{\frac{72}{c}-47}\geqslant 15 \qquad ①$$

因此,要证原式成立,只要证式①当$a,b,c\in[0,\frac{3}{2}]$,且$a+b+c=3$时成立即可.

由对称性,不妨设$c\geqslant 1,b+c\leqslant 2$,此时,我们先证明

$$\sqrt{\frac{72}{a}-47}+\sqrt{\frac{72}{b}-47}\geqslant 2\sqrt{\frac{144}{b+c}-47} \qquad ②$$

由于

$$(\sqrt{\frac{72}{a}-47}+\sqrt{\frac{72}{b}-47})^2-4(\frac{144}{a+b}-47)=$$

$$72(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b})+2[\sqrt{(\frac{72}{a}-47)(\frac{72}{b}-47)}-(\frac{144}{a+b}-47)]=$$

$$\frac{72(a-b)^2}{ab(a+b)}+\frac{2[(\frac{72}{a}-47)(\frac{72}{b}-47)-(\frac{144}{a+b}-47)^2]}{\sqrt{(\frac{72}{a}-47)(\frac{72}{b}-47)}+\frac{144}{a+b}-47)}=$$

$$\frac{72(a-b)^2}{ab(a+b)}+\frac{2[\frac{72^2(a-b)^2}{ab(a+b)^2}-\frac{47\cdot 72(a-b)^2}{ab(a+b)}]}{\sqrt{(\frac{72}{a}-47)(\frac{72}{b}-47)}+(\frac{144}{a+b}-47)}=$$

$$\frac{72(a-b)^2}{ab(a+b)}\cdot[1+\frac{\frac{144}{a+b}-94}{\sqrt{(\frac{72}{a}-47)(\frac{72}{b}-47)}+(\frac{144}{a+b}-47)}]$$

因此,只要证

$$1+\frac{\frac{144}{a+b}-94}{\sqrt{\left(\frac{72}{a}-47\right)\left(\frac{72}{b}-47\right)}+\left(\frac{144}{a+b}-47\right)}\geqslant 0 \qquad ③$$

若$\frac{144}{a+b}-94\geqslant 0$,即$a+b\leqslant\frac{72}{47}$,则式③显然成立;若$\frac{144}{a+b}-94\leqslant 0$,即$\frac{72}{47}<a+b\leqslant 2$时

$$\text{式③左边}\geqslant 1+\frac{\frac{144}{a+b}-94}{\frac{144}{a+b}-47}=$$

$$2-\frac{47}{\frac{144}{a+b}-47}\geqslant$$

$$2-\frac{47}{72-47}=$$

$$\frac{3}{25}>0$$

这时,式③也成立,式②得证. 现在剩下的就是证明

$$2\sqrt{\frac{144}{a+b}-47}+\sqrt{\frac{72}{c}-47}\geqslant 15$$

即

$$2\sqrt{\frac{144}{3-c}-47}+\sqrt{\frac{72}{c}-47}\geqslant 15 \qquad ④$$

令$\sqrt{\frac{144}{3-c}-47}=t$,则$c=\frac{3(t^2-1)}{t^2+47}$,并由$1\leqslant c\leqslant\frac{3}{2}$,得到$5\leqslant t\leqslant 7$,于是

$$\sqrt{\frac{72}{c}-47}=\sqrt{\frac{24(t^2+47)}{t^2-1}-47}=$$

$$\sqrt{\frac{1\ 175t^2-23t^2}{t^2-1}}$$

代入式④即证

$$\sqrt{\frac{1\ 175-23t^2}{t^2-1}}\geqslant 15-2t$$

上式两边平方并整理,得到

$$t^4-15t^3+61t^2+15t-350\leqslant 0$$

即
$$(t-5)^2(t+2)(t-7)\leqslant 0$$

由于$5\leqslant t\leqslant 7$,因此上式成立,故式④成立,原式获证. 由以上证明过程易知取等号条件.

118. 简证:由$a=b=c=1$知,a,b,c中必有一个不小于$\frac{1}{3}$,不妨设$c\geqslant\frac{1}{3}$,则$b+c\leqslant\frac{2}{3}$,先证明

$$\sqrt{\frac{1}{a}-a}+\sqrt{\frac{1}{b}-b}\geqslant 2\sqrt{\frac{2}{a+b}-\frac{a+b}{2}} \quad ①$$

式①$\Leftrightarrow \frac{1}{a}-a+\frac{1}{b}-b+2\sqrt{(\frac{1}{a}-a)(\frac{1}{b}-b)}\geqslant\frac{8}{a+b}-2(a+b)\Leftrightarrow$

$$\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}+2\sqrt{(\frac{1}{a}-a)(\frac{1}{b}-b)}\geqslant\frac{4}{a+b}-(a+b)$$

因此,只需证

$$2\sqrt{(\frac{1}{a}-a)(\frac{1}{b}-b)}\geqslant\frac{4}{a+b}-(a+b)\Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{ab}+4ab-4(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\geqslant\frac{16}{(a+b)^2}+(a+b)^2-8\Leftrightarrow$$

$$\frac{4(a-b)^2}{ab(a+b)^2}-\frac{4(a-b)^2}{ab}-(a-b)^2\geqslant 0$$

由于$(a-b)^2\geqslant 0$,因此,又只需证

$$\frac{4}{ab(a+b)^2}-\frac{4}{ab}-1\geqslant 0 \quad ②$$

又因为
$$ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2$$

因此,要证式②,只需证

$$16-16(a+b)^2-(a+b)^3\geqslant 0$$

由$b+c\leqslant\frac{2}{3}$,易证上式成立.

接下去再证明在$c\geqslant\frac{1}{3}$时,有

$$2\sqrt{\frac{2}{a+b}-\frac{a+b}{2}}+\sqrt{\frac{1}{c}-c}\geqslant 2\sqrt{6}$$

即

$$2\sqrt{\frac{2}{1-c}-\frac{1-c}{2}}+\sqrt{\frac{1}{c}-c}\geqslant 2\sqrt{6} \quad ③$$

若$\sqrt{\frac{2}{1-c}-\frac{1-c}{2}}\geqslant\sqrt{6}$，即$c\geqslant 7-\sqrt{40}$时，式③显然成立；若$\frac{1}{3}\leqslant c\leqslant 7-\sqrt{40}$时

$$\text{式③}\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{2}{1-c}-\frac{1-c}{2}}\geqslant 2\sqrt{6}-\sqrt{\frac{1}{c}-c}$$

将上式两边平方，并整理得到

$$4\sqrt{6c(1-c^2)(1-c)^2}\geqslant 3c^3-29c^2+17c+1$$

将上式两边再平方，并整理得到

$$9c^6-78c^5+943c^4-980c^3+231c^2+34c+1\leqslant 0 \quad ④$$

由于$c-0.7<c-(7-\sqrt{40})\leqslant 0$，$c-0.3>c-\frac{1}{3}\geqslant 0$，因此

$$\begin{aligned}\text{式④左边}&=(3c-1)^2(c^4-8c^3+78c^2-56c+1)=\\&(3c-1)^2[c^3(c-0.7)-7.3c^2(c-0.3)+75.81c(c-0.7)-\\&6.933(c-0.3)-1.0799]\leqslant 0\end{aligned}$$

故式④成立，式③获证.

综上可知，原命题成立，并易知其取等号条件.

119. 简证：由对称性，可设$a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，则

$$\sum\frac{7(a^2+b^2+c^2)}{4b^2+4c^2-bc}-9=$$

$$[2\sum\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2}-9]-[2\sum\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2+c^2}-\sum\frac{7(a^2+b^2+c^2)}{4b^2+4c^2-bc}]=$$

$$\frac{2\sum a^6-\sum a^4(b^2+c^2)}{\prod(b^2+c^2)}-\sum a^2\cdot\sum(\frac{2}{b^2+c^2}-\frac{7}{4b^2+4c^2-bc})=$$

$$\sum\frac{(b+c)^2(b-c)^2}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}-\sum\frac{(a^2+b^2+c^2)(b-c)^2}{(b^2+c^2)(4b^2+4c^2-bc)}=$$

$$\sum[\frac{(b+c)^2}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}-\frac{a^2+b^2+c^2}{(b^2+c^2)(4b^2+4c^2-bc)}](b-c)^2$$

由上可知，只需证

$$\sum[\frac{(b+c)^2}{(c^2+a^2)(a^2+b^2)}-\frac{a^2+b^2+c^2}{(b^2+c^2)(4b^2+4c^2-bc)}](b-c)^2\geqslant 0$$

即证

$$\sum[(b+c)^2(b^2+c^2)(4b^2+4c^2-bc)-(c^2+a^2)(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)]\cdot\frac{(b-c)^2}{4b^2+4c^2-bc}\geqslant 0 \quad ①$$

另外，由$a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$，易得到

$$\frac{(a-c)^2}{4c^2+4a^2-ca} \geqslant \frac{(b-c)^2}{4b^2+4c^2-bc}$$

及

$$(a+b)^2(a^2+b^2)(4a^2+4b^2-ab)-(b^2+c^2)(c^2+a^2)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 0$$

$$(c+a)^2(c^2+a^2)(4c^2+4a^2-ca)-(a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 0$$

因此

$$\begin{aligned}
\text{式①左边} \geqslant & [(c+a)^2(c^2+a^2)(4c^2+4a^2-ca)- \\
& (a^2+b^2)(b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)+ \\
& (b+c)^2(b^2+c^2)(4b^2+4c^2-bc)- \\
& (c^2+a^2)(a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)] \cdot \frac{(b-c)^2}{4b^2+4c^2-bc} \geqslant \\
& [(10a^2c^4+14a^3c^3+10a^4c^2+7a^5c+4a^6)+ \\
& (10b^2c^4+14b^3c^3+10b^4c^2+7b^5c+4b^6)- \\
& 2(a^2+b^2)c^4-3(a^2+b^2)^2c^2-(a^2+b^2)^3] \cdot \\
& \frac{(b-c)^2}{4b^2+4c^2-bc} \geqslant 0
\end{aligned}$$

故式①成立,原命题获证.由上证明易知取等号条件.

注:本题中不等式较第九章"《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录"Chapter 8 中题 42 中不等式要强.

120. 简证:记四面体 $PA_2A_3A_4$,$A_1PA_3A_4$,$A_1A_2PA_4$,$A_1A_2A_3P$ 体积分别为 v_1,v_2,v_3,v_4,则易证有

$$v_1\overrightarrow{PA_1}+v_2\overrightarrow{PA_2}+v_3\overrightarrow{PA_3}+v_4\overrightarrow{PA_4}=0 \qquad ①$$

设 $\lambda=\frac{A_1P}{PB_1}$,即 $\overrightarrow{PA_1}=-\lambda\overrightarrow{PB_1}$,代入式①得到

$$-\lambda v_1\overrightarrow{PA_1}+v_2\overrightarrow{PA_2}+v_3\overrightarrow{PA_3}+v_4\overrightarrow{PA_4}=0 \qquad ②$$

由于 P,B_1,A_2,A_3,A_4 在同一球面上,设此球球心为 O_1,半径为 r,则

$$\begin{aligned}
& -\lambda v_1PB_1^2+v_2PA_2^2+v_3PA_3^2+v_4PA_4^2= \\
& -\lambda v_1(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB_1})^2+v_2(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_2})^2+v_3(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_3})^2+v_4(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA_4})^2= \\
& -\lambda v_1(\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OB_1}^2)+v_2(\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OA_2}^2)+v_3(\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OA_3}^2)+v_4(\overrightarrow{PO}^2+\overrightarrow{OA_4}^2)+ \\
& 2\overrightarrow{PO}\cdot(-\lambda v_1\overrightarrow{OB_1}+v_2\overrightarrow{OA_2}+v_3\overrightarrow{OA_3}+v_4\overrightarrow{OA_4})= \\
& 2(-\lambda v_1+v_2+v_3+v_4)\overrightarrow{PO}^2+2\overrightarrow{PO}\cdot(-\lambda v_1\overrightarrow{OB_1}+v_2\overrightarrow{OA_2}+v_3\overrightarrow{OA_3}+v_4\overrightarrow{OA_4})= \\
& 2\overrightarrow{PO}\cdot[(-\lambda v_1+v_2+v_3+v_4)\overrightarrow{PO}+(-\lambda v_1\overrightarrow{OB_1}+v_2\overrightarrow{OA_2}+v_3\overrightarrow{OA_3}+v_4\overrightarrow{OA_4})]= \\
& 2\overrightarrow{PO}\cdot(-\lambda v_1\overrightarrow{PB_1}+v_2\overrightarrow{PA_2}+v_3\overrightarrow{PA_3}+v_4\overrightarrow{PA_4})
\end{aligned}$$

注意到式②,即得

$$-\lambda v_1PB_1^2+v_2PA_2^2+v_3PA_3^2+v_4PA_4^2=0$$

因此,有

$$\lambda = \frac{A_1P}{PB_1} = \frac{v_2PA_2^2 + v_3PA_3^2 + v_4PA_4^2}{v_1PB_1^2}$$

即

$$\frac{A_1P}{PB_1} = \frac{v_1PA_1^2}{v_2PA_2^2 + v_3PA_3^2 + v_4PA_4^2} \tag{③}$$

与式 ③ 类似还有

$$\frac{A_2P}{PB_2} = \frac{v_2PA_2^2}{v_1PA_1^2 + v_3PA_3^2 + v_4PA_4^2} \tag{④}$$

$$\frac{A_3P}{PB_3} = \frac{v_3PA_3^2}{v_1PA_1^2 + v_2PA_2^2 + v_4PA_4^2} \tag{⑤}$$

$$\frac{A_4P}{PB_4} = \frac{v_4PA_4^2}{v_1PA_1^2 + v_2PA_2^2 + v_3PA_3^2} \tag{⑥}$$

由式 ③,④,⑤,⑥ 得到

$$\frac{A_1P \cdot A_2P \cdot A_3P \cdot A_4P}{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3 \cdot PB_4} = \frac{v_1PA_1^2 \cdot v_2PA_2^2}{(v_2PA_2^2 + v_3PA_3^2 + v_4PA_4^2)(v_1PA_1^2 + v_3PA_3^2 + v_4PA_4^2)} \cdot \frac{v_3PA_3^2 \cdot v_4PA_4^2}{(v_1PA_1^2 + v_2PA_2^2 + v_4PA_4^2)(v_1PA_1^2 + v_2PA_2^2 + v_3PA_3^2)} \leqslant \frac{1}{81}$$

原命题获证. 由以上最后一式可知,当且仅当$v_1PA_1^2 = v_2PA_2^2 = v_3PA_3^2 = v_4PA_4^2$时原式取等号.

注:本命题中结论是重庆市合川太和中学沈毅老师提出的猜想,它是第六章“三角几何不等式” 例 2 中式(5) 向空间的推广形式. 另外由以上证明中易知,式 ③ 可以向 n 维空间推广,因此,本命题中结论也可以向 n 维空间推广. 式 ③ 是一个很好的等式,应用式 ③ 还可以证明空间几何中其他有关命题. 如可得等式

$$\frac{A_1P}{A_1B_1} + \frac{A_2P}{A_2B_2} + \frac{A_3P}{A_3B_3} + \frac{A_4P}{A_4B_4} = 1$$

$$\frac{PB_1}{A_1B_1} + \frac{PB_2}{A_2B_2} + \frac{PB_3}{A_3B_3} + \frac{PB_4}{A_4B_4} = 3$$

以及不等式

$$\frac{A_1P}{PB_1} + \frac{A_2P}{PB_2} + \frac{A_3P}{PB_3} + \frac{A_4P}{PB_4} \geqslant \frac{4}{3}$$

$$\frac{PB_1}{A_1P} + \frac{PB_2}{A_2P} + \frac{PB_3}{A_3P} + \frac{PB_4}{A_4P} \geqslant 12$$

取等号条件同原式.

121. 证:(1) 当 $y \geq z$ 时

$$D - z(1-x) = (1-x-z)^2 + (1-x)(x-y) + z(y-z) \geq 0$$

即有

$$z(1-x) \leq D$$

(2) 当 $y \leq z$ 时,若 $y+z \leq 1$,则

$$D - y(1-z) = (1-x-y)^2 + (x-z)(1-x-y) + y(z-y) \geq 0$$

即有

$$y(1-z) \leq D$$

若 $y+z \geq 1$,则

$$D - z(1-x) = (x+y-1)^2 + (z-y)(x+y-1) + (1-x)(x-z) \geq 0$$

即有

$$z(1-x) \leq D$$

综上可知,原命题成立.

注:1. 本题有等价命题.

命题 1:设 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $a_1 + b_1 = a_2 + b_2 = a_3 + b_3 = 1$,则 $a_1 b_2, a_2 b_3, a_3 b_1$ 中必有一个其值不大于 $a_1 a_2 a_3 + b_1 b_2 b_3$.

命题 2: 设 D, E, F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上的点, 则 $\triangle AFE$, $\triangle BDF$, $\triangle CED$ 的面积中必有一个不大于 $\triangle DEF$ 的面积.

2. 猜想:设 $a_i, b_i, \cdots, l_i \in \overline{\mathbf{R}^-}(i = 1, 2, \cdots, n-1)$,且

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} b_i = \cdots = \sum_{i=1}^{n-1} l_i = s$$

记

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_1 & 0 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$A_{ii}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 D 中第 i 行第 i 列元素的代数余子式,则 $A_{ii}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 的绝对值中至少有一个不大于$\frac{|D|}{s}$.

122. 证:因为

$$a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq \frac{2}{c} + 2b + 2$$

所以

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{c}{2(1 + c + bc)}$$

同理,有

$$\frac{1}{b^2+2c^2+3} \leqslant \frac{a}{2(1+a+ca)}$$

$$\frac{1}{c^2+2a^2+3} \leqslant \frac{b}{2(1+b+ab)}$$

因此,要证原式,只需证

$$\sum \frac{a}{1+a+ca} \leqslant 1 \quad ①$$

令 $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}, c=\frac{z}{x}$,则

$$式①左边 = \sum \frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}} = \sum \frac{x}{x+y+z} = 1$$

式①成立,原式获证,当 $a=b=c=1$ 时,原式取等号.

123. 简证:(四川沈毅,2008.04.19 提供)如图 1 所示,连 A_1B,A_1C,设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R,记 $\angle PAC$,$\angle PAB$,$\angle PBA$,$\angle PBC$,$\angle PCB$,$\angle PCA$ 分别为 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$,则有

$$BA_2 = BA_1 \cdot \cos\angle A_1BC = 2R\sin\alpha_2 \cdot \cos\alpha_1$$

同理可得

$$A_2C = 2R\sin\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2$$

于是有

$$\frac{BA_2}{A_2C} = \frac{\cos\alpha_1\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2\sin\alpha_1}$$

类似方法得到

$$\frac{CB_2}{B_2A} = \frac{\cos\beta_1\sin\beta_2}{\cos\beta_2\sin\beta_1}$$

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{\cos\gamma_1\sin\gamma_2}{\cos\lambda_2\sin\gamma_1}$$

因此得到

$$\frac{S_{\triangle A_2B_2C_2}}{S_{\triangle ABC}} =$$

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2+\cos\alpha_2\cos\beta_2\cos\gamma_2\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1}{\sin A\sin B\sin C} =$$

$$\frac{\cos\alpha_1\cos\beta_1\cos\gamma_1\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1+\cos\alpha_2\cos\beta_2\cos\gamma_2\sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2}{\sin A\sin B\sin C} =$$

(易证有 $\sin\alpha_1\sin\beta_1\sin\gamma_1 = \sin\alpha_2\sin\beta_2\sin\gamma_2$)

$$-\frac{\frac{1}{8}(\sin 2\alpha_1\sin 2\beta_1\sin 2\gamma_1 + \sin 2\alpha_2\sin 2\beta_2\sin 2\gamma_2)}{\sin A\sin B\sin C} \leqslant$$

$$\frac{1}{4}$$

(见第六章"三角几何不等式" 例24) 原命题获证,当点p为$\triangle ABC$内心时取等号.

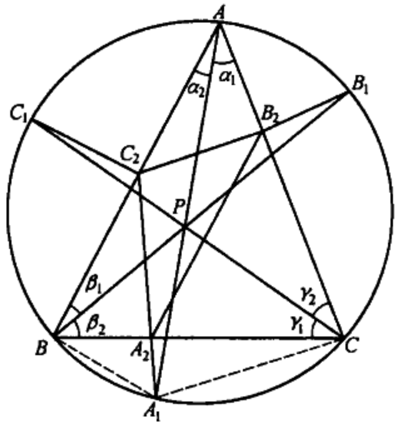


图1

124. 简证:(1) 当$a \geqslant b \geqslant c$时,有

$$\frac{2(a-c)^2}{2c^2-ca+2a^2}-\frac{2(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}=$$

$$(1-\frac{3ac}{2c^2-ca+2a^2})-(1-\frac{3ab}{2a^2-ab+2b^2})=$$

$$\frac{3ab}{2c^2-ca+2a^2}-\frac{3ac}{2a^2-ab+2b^2}=$$

$$\frac{6a(a^2-bc)(b-c)}{(2c^2-ca+2a^2)(2a^2-ab+2b^2)} \geqslant$$

$$0$$

即

$$\frac{(a-c)^2}{2c^2-ca+2a^2} \geqslant \frac{(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}$$

同理可得

$$\frac{(a-c)^2}{2c^2-ca+2a^2} \geqslant \frac{(b-c)^2}{2b^2-bc+2c^2}$$

于是

$$\sum \frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}-\frac{1}{3}\sum a=\sum\left(\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}-\frac{2a-b}{3}\right)=$$

$$\frac{1}{3}\sum\frac{(2b-a)(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}=$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(a-\frac{c}{2})(a-c)^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{(2b-a)(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}\right]+$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(a-\frac{c}{2})(a-c)^2}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{(2c-b)(b-c)^2}{2b^2-bc+2c^2}\right]\geqslant$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(a-\frac{c}{2})(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}+\frac{(2b-a)(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}\right]+$$

$$\frac{1}{3}\left[\frac{(a-\frac{c}{2})(b-c)^2}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{(2c-b)(b-c)^2}{2b^2-bc+2c^2}\right]=$$

$$\frac{1}{6}\left[\frac{(4b-c)(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}+\right.$$

$$\left.\frac{(a-b+3c)(b-c)^2}{2b^2-bc+2c^2}\right]\geqslant$$

$$0$$

故当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时,原式成立.

(2) 当 $a\geqslant c\geqslant b$,且 $2b\geqslant a$ 时,有

$$\sum\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}-\frac{1}{3}\sum a=\frac{1}{3}\sum\frac{(2b-a)(a-b)^2}{2a^2-ab+2b^2}\geqslant 0$$

即原式成立.

(3) 当 $a\geqslant c\geqslant b$,且 $2b\leqslant a$ 时,有

$$\frac{a^3}{2a^2-ab+2b^2}-\frac{a}{2}=\frac{a^2(a-2b)}{2(2a^2-ab+2b^2)}\geqslant 0 \quad ①$$

$$\frac{b^3}{2b^2-bc+2c^2}+\frac{c}{9}-\frac{b}{3}=\frac{2c^3-7bc^2+5b^2c+3b^3}{9(2b^2-bc+2c^2)}=$$

$$\frac{3b(2b-c)^2+2(c-b)(2b-c)^2+b^2(c-b)}{9(2b^2-bc+2c^2)}\geqslant 0 \quad ②$$

$$\frac{c^3}{2c^2-ca+2a^2}+\frac{a}{6}-\frac{4c}{9}=\frac{6a^3-19a^2c+14ac^2+2c^3}{18(2c^2-ca+2a^2)}=$$

$$\frac{6a(a-c)^2+11c(a-c)^2-12c^2(a-c)+3c^3}{18(2c^2-ca+2a^2)}\geqslant 0 \quad ③$$

由式 ①,②,③ 即知原式成立.

综上原命题获证.

125. 简证:由于 AP,BQ,CR 过同一点 O,由塞瓦(Ceva)定理有$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$,因此,可设$\frac{BP}{PC}=\frac{z}{y},\frac{CQ}{QA}=\frac{x}{z},\frac{AR}{RB}=\frac{y}{x},x,y,z\in\mathbf{R}^+$,于是有

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=0$$

由此易得

$$(x+y+z)\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{CB} \quad ①$$

$$(x+y+z)\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{AC}+y\overrightarrow{BC} \quad ②$$

另外,由$\frac{BP}{PC}=\frac{z}{y}$可得到

$$(y+z)\overrightarrow{OP}=y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC} \quad ③$$

将①、②两式代入式③,并整理可得到

$$\overrightarrow{OP}=\frac{xy\overrightarrow{AB}+xz\overrightarrow{AC}}{(y+z)(x+y+z)}$$

于是,有

$$|\overrightarrow{OP}|=\left|\frac{xy\overrightarrow{AB}+xz\overrightarrow{AC}}{(y+z)(x+y+z)}\right|\leqslant\frac{xy|\overrightarrow{AB}|+xz|\overrightarrow{AC}|}{(y+z)(x+y+z)}\leqslant$$

$$\frac{(xy+xz)a}{(y+z)(x+y+z)}=$$

$$\frac{xa}{x+y+z}$$

同理可得

$$|\overrightarrow{OQ}|\leqslant\frac{ya}{x+y+z},|\overrightarrow{OR}|\leqslant\frac{za}{x+y+z}$$

(注意到 $BC=a$ 为最大边)因此,便得到

$$|OP|+|OQ|+|OR|<\frac{xa}{x+y+z}+\frac{ya}{x+y+z}+\frac{za}{x+y+z}=a$$

注:1. 用完全类似方法可以得到

$$|OA|+|OB|+|OC|<2a$$

2. 用完全类似证法可将以上结论向 n 维空间单形推广:设 O 为 n 维空间单形 $A_1A_2\cdots A_{n+1}$ 内任意一点,直线 $A_iO(i=1,2,\cdots,n+1)$ 与顶点 A_i 所对的面交于点 $B_i(i=1,2,\cdots,n+1)$,a 为此单形中最长的棱长,则

(1) $\sum_{i=1}^{n}|OB_i|<a$;

(2) $\sum_{i=1}^{n}|OA_i|<na$.

126. 简证：原式$\Leftrightarrow \sum \frac{9a^2+9abc+9-31a}{a^2+abc+1} \geqslant 0$.

不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，显然有 $9(a+b)<31$ 等，所以容易证明

$$9a^2+9abc+9-31a \leqslant 9b^2+9abc+9-31b \leqslant 9c^2+9abc+9-31c$$

$$\frac{1}{a^2+abc+1} \leqslant \frac{1}{b^2+abc+1} \leqslant \frac{1}{c^2+abc+1}$$

因此，由切比雪夫(Chebyshev)不等式有

$$3\sum \frac{9a^2+9abc+9-31a}{a^2+abc+1} \geqslant \sum (9a^2+9abc+9-31a) \cdot \sum \frac{1}{a^2+abc+1}$$

于是只要证明

$$\sum (9a^2+9abc+9-31a) \geqslant 0$$

它等价于

$$9\sum a^2+27abc+27-31(\sum a) \geqslant 0$$

因为 $a+b+c=1$，所以只要证明

$$9\sum a^2+27abc-4 \geqslant 0 \quad ①$$

即

$$9\sum a\sum a^2+27abc-4(\sum a)^3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$5(\sum a)^3-18\sum a\sum bc+27abc \geqslant 0 \quad ②$$

由于

$$5[(\sum a)^3-4\sum a\sum bc+9abc] \geqslant 0$$

$$2(\sum a\sum bc-9abc) \geqslant 0$$

将以上两式相加即得式②，因此式①成立，原命题获证. 从以上证明过程可知，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时原式取等号.

127. 简证：当 $0<\lambda \leqslant n$ 时，笔者证明孙老师的猜想成立，为此，先证以下引理.

引理：设 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n, \lambda>0$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i=1$，则

$$\sum \frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda x_1}} \leqslant \frac{\sqrt{n+\lambda}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}} \sum \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}} \quad ①$$

式①又等价于

$$\sum \left(\frac{\sqrt{n+\lambda}}{\sqrt{1+\lambda x_1}}-\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}}{1+\sqrt{1+\lambda x_1}}\right) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}-\sqrt{1+\lambda x_1}}{\sqrt{1+\lambda x_1}\,(1+\sqrt{1+\lambda x_1})} \geqslant 0 \qquad ②$$

由对称性，不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n$，于是有

$$\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}-\sqrt{1+\lambda x_1} \leqslant \sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}-\sqrt{1+\lambda x_2} \leqslant \cdots \leqslant \sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}-\sqrt{1+\lambda x_n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}\,(1+\sqrt{1+\lambda x_1})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_2}\,(1+\sqrt{1+\lambda x_2})} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_n}\,(1+\sqrt{1+\lambda x_n})}$$

根据切比雪夫不等式，有

$$式②左边 \geqslant \frac{1}{n}\sum\left(\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}-\sqrt{1+\lambda x_1}\right)\cdot\sum\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}\,(1+\sqrt{1+\lambda x_1})}$$

因此，要证式②只要证

$$\sum\left(\sqrt{1+\frac{\lambda}{n}}-\sqrt{1+\lambda x_1}\right) \geqslant 0$$

即

$$\sqrt{n^2+n\lambda} \geqslant \sum \sqrt{1+\lambda x_1} \qquad ③$$

由柯西不等式，有

$$n\cdot\sum(1+\lambda x_1) \geqslant \left(\sum \sqrt{1+\lambda x_1}\right)^2$$

注意到 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$，即得式③.

应用引理中式①及第三章"放缩法证明不等式"例12证二中的不等式

$$\sum \sqrt{x_1}\cdot\sum\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}} \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n+\lambda}} \qquad ④$$

其中，$x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$，且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1, 0 < \lambda \leqslant n$，可以得到

$$\sum \sqrt{x_1}\cdot\sum\frac{1}{1+\sqrt{1+\lambda x_1}} \leqslant \sum\sqrt{x_1}\cdot\frac{\sqrt{n+\lambda}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}}\sum\frac{1}{\sqrt{1+\lambda x_1}} \leqslant \frac{\sqrt{n+\lambda}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}}\cdot\frac{n^2}{\sqrt{n+\lambda}} \leqslant \frac{n^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}}$$

故原命题在 $0 < \lambda \leqslant n$ 式成立. 由以上证明可知，当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n =$

$\frac{1}{n}$ 时原式取等号.

孙老师猜想在 $\lambda > n$ 时不成立. 如取, $\lambda = 23, x_1 \to 1, x_2 \to 0$, 这时猜想不等式左边 $= \frac{4\sqrt{6}+21}{46} > \frac{8(5-\sqrt{2})}{46} =$ 右边, 故不成立.

注: 1. 孙老师猜想发表在《不等式研究通讯》(中国不等式研究小组主办, 内刊)2008 年第 2 期, 孙文彩文:"美国数学问题 11250 及其研究背景". 孙老师将 $\lambda = 2$ 时的不等式于2006年9月刊于《美国数学月刊》, 题号为11250; 孙老师将 $\lambda = 3$ 时的不等式发表在《中学数学教学参考》(陕西)2006 年第四期上.

2. 由上述证明过程可得以下命题.

命题: 设 $x_i > 0, i = 1,2,\cdots,n$, 且 $\sum_{i=1}^{n} = 1, \lambda > 0, a > 0$, 则

$$\sum \sqrt{x_1} \cdot \sum \frac{1}{a+\sqrt{1+\lambda x_1}} \leqslant \frac{n^2}{a\sqrt{n}+\sqrt{n+\lambda}}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$ 时原式取等号.

128. 简证: 若 $\sum (b-c)^n = 0$, 原命题显然成立.

若 $\sum (b-c)^n \neq 0$, 记

$$f(x) = \left[\sum (b-c)^n\right]x^2 - \left[\sum (b+c)(b-c)^n\right]x + \left[\sum bc(b-c)^n\right]$$

为关于 x 的二次函数.

(1) 当 $a \geqslant b \geqslant c$ 时.

若 n 为偶数时

$$f(a) = (b-c)^n(a-b)(a-c) \geqslant 0$$
$$f(b) = (c-a)^n(b-a)(b-c) \leqslant 0$$

因此, $f(x) = 0$ 必有实数解, 则

$$\Delta = \left[\sum (b+c)(b-c)^n\right]^2 - 4\left[\sum (b-c)^n\right]\left[\sum bc(b-c)^n\right] \geqslant 0$$

即原命题成立.

若 n 为奇数时

$$\sum (b-c)^n = (b-c)^n - [(a-b)+(b-c)]^n + (a-b)^n < 0$$

这时二次函数 $f(x)$ 的二次项系数小于零, 函数 $f(x)$ 的图象为开口向下的抛物线, 又

$$f(a) = (b-c)^n(a-b)(a-c) \geqslant 0$$

故抛物线与 x 轴必相交, 因此有

$$\Delta = \left[\sum (b+c)(b-c)^n\right]^2 - 4\left[\sum (b-c)^n\right]\left[\sum bc(b-c)^n\right] \geqslant 0$$

即原命题成立.

(2) 当 $a \geqslant c \geqslant b$ 时,用完全类似的方法也可证原命题成立.

综上,原命题获证.

129. 简证:由正弦定理可知,原式等价于

$$16\sin B\sin C - 4\sin^2 A - 9 \geqslant 0 \qquad ①$$

不妨设 $c \geqslant b \geqslant a$,则$\frac{\pi}{2} \geqslant \angle C \geqslant \angle B \geqslant \angle A$,$\angle A \leqslant \frac{\pi}{3}$,下面分两种情况证明①时.

(1) 当$\frac{\pi}{2} \geqslant \angle C \geqslant \angle B \geqslant \frac{\pi}{3} \geqslant \angle A$时,则有 $\sin C \geqslant \sin B \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin A \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$,于是

$$16\sin B\sin C - 4\sin^2 A - 9 \geqslant 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 9 \geqslant 0$$

故式①成立.

(2) 当$\frac{\pi}{2} \geqslant \angle C \geqslant \frac{\pi}{3} \geqslant \angle B \geqslant \angle A$时,由$\frac{\pi}{2} \geqslant \angle C = \pi - \angle A - \angle B \geqslant \pi - 2\angle B > 0$,有 $\sin C \geqslant \sin 2B$,于是得到

$$\begin{aligned} 16\sin B\sin C - 4\sin^2 A - 9 \geqslant\ & 16\sin B\sin 2B - 4\sin^2 B - 9 = \\ & 32\sin^2 B\cos B - 4\sin^2 B - 9 = \\ & 32(1-\cos^2 B)\cos B - 4(1-\cos^2 B) - 9 = \\ & -32\cos^3 B + 4\cos^2 B + 32\cos B - 13 = \\ & (1 - 2\cos B)(16\cos^2 B + 6\cos B - 13) \end{aligned}$$

又由于 $\angle B \leqslant \frac{\pi}{3}$,$\frac{\pi}{2} \geqslant \pi - 2\angle B$,由此得到$\frac{\pi}{4} \leqslant \angle B \leqslant \frac{\pi}{3}$,因此,$\frac{1}{2} \leqslant \cos B \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$,于是

$$1 - 2\cos B \leqslant 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$16\cos^2 B + 6\cos B - 13 \leqslant 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 13 \leqslant$$

$$3\sqrt{2} - 5 < 0$$

因此得到

$$16\sin B\sin C - 4\sin^2 A - 9 = (1 - 2\cos B)(16\cos^2 B + 6\cos B - 13) \geqslant 0$$

故式①成立.

综上,原命题获证,且由以上证明可知当且仅当 $a = b = c$,即 $\triangle ABC$ 为等

边三角形时取等号.

130. 简证：记

$$s_1 = a + b + c = 1, s_2 = bc + ca + ab, s_3 = abc$$

$$w = \sqrt{s_1^2 - 3s_2} = \sqrt{1 - 3s_2} \quad (0 \leqslant w \leqslant 1)$$

则

原式左边 - 右边 =

$27[(\lambda - 1)^3 s_3^2 + (\lambda - 2)s_3 + s_2^2 + (\lambda - 2)s_2^3 + (\lambda^2 - 5\lambda + 4)s_2 s_3] - (\lambda + 2)^3 s_3 =$

$27(\lambda - 1)^3 s_3^2 - (\lambda^3 + 6\lambda^2 - 15\lambda + 62)s_3 + 27s_2^2 + 27(\lambda - 2)s_2^3 +$

$27(\lambda^2 - 5\lambda + 4)s_2 s_3 \geqslant$

$\dfrac{(\lambda - 1)^3(1 - 3w^2 + 2w^3)^2}{27} - \dfrac{(\lambda^3 + 6\lambda^2 - 15\lambda + 62)(1 - 3w^2 + 2w^3)}{27} +$

$3(1 - w^2)^2 + (\lambda - 2)(1 - w^2)^3 + \dfrac{(\lambda^2 - 5\lambda + 4)(1 - w^2)(1 - 3w^2 + 2w^3)}{3} =$

(据第七章“应用基本不等式证明不等式”最后附录中推论 3)

$\dfrac{w^2}{27}[3(-\lambda^3 + 12\lambda + 16) + 2(\lambda^3 - 3\lambda^2 - 24\lambda - 28)w + 9(\lambda^3 - 3\lambda + 2)w^2 +$

$6(-2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 10)w^3 + (4\lambda^3 - 12\lambda^2 - 15\lambda + 50)w^3] =$

$\dfrac{(\lambda + 2)w^3}{27}[3(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) + 2(\lambda^2 - 5\lambda - 14)w + 9(\lambda^2 - 2\lambda + 1)w^2 -$

$6(2\lambda^2 - 7\lambda + 5)w^3 + (4\lambda^2 - 20\lambda + 25)w^4] =$

$\dfrac{(\lambda + 2)w^3(1 - w)^2}{27}[3(-\lambda^2 + 2\lambda + 8) - 2(2\lambda^2 - \lambda - 10)w + (4\lambda^2 - 20\lambda + 25)w^2] =$

$\dfrac{(\lambda + 2)w^3(1 - w)^2}{27}[3(\lambda + 2)(4 - \lambda) - 2(2\lambda - 5)(\lambda + 2)w + (2\lambda - 5)^2 w^2]$

记$f(w) = 3(\lambda + 2)(4 - \lambda) - 2(2\lambda - 5)(\lambda + 2)w + (2\lambda - 5)^2 w^2 (0 \leqslant w \leqslant 1)$，则当$0 < \lambda \leqslant \dfrac{5}{2}$时，显然有$f(w) \geqslant 0$；当$\lambda > \dfrac{5}{2}$时，易知此时函数$f(w)$的图象与 w 轴必有两个不同交点，且其对称轴为$w = \dfrac{\lambda + 2}{2\lambda - 5} > 0$，因此，当$0 \leqslant w \leqslant 1$时，使得$f(w) \geqslant 0$的充要条件是$f(1) \geqslant 0$，即

$$f(1) = 3(\lambda + 2)(4 - \lambda) - 2(2\lambda - 5)(\lambda + 2) + (2\lambda - 5)^2 \geqslant 0$$

由此得到

$$\frac{5}{2} < \lambda \leqslant 3\sqrt{3} - 2$$

综上得到

$$0 < \lambda \leqslant 3\sqrt{3} - 2$$

即 $\lambda_{\min} = 3\sqrt{3} - 2$.

131. 简证:设 $s_1 = \sum x = 1, s_2 = \sum yz, s_3 = xyz$,经变换,原式等价于

$$s_1 - 2s_2^2 - (9 + 4\sqrt{2})s_3 + (18 + 12\sqrt{2})s_2 s_3 \geqslant 0 \quad ①$$

今证式①. 应用第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中定理 2 的推论 3,记 $w^2 = 1 - 3s_2$,即 $s_2 = \frac{1 - w^2}{3}$,则

$$\text{式①左边} \geqslant \frac{1 - w^2}{3} - 2 \cdot \left(\frac{1 - w^2}{3}\right)^2 - (9 + 4\sqrt{2}) \cdot \frac{1 - 3w^2 + 2w^3}{27} +$$

$$(18 + 12\sqrt{2}) \cdot \frac{(1 - w^2)(1 - 3w^2 + 2w^3)}{81} =$$

$$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{27}(1 - w)[(3\sqrt{2} - 4) - 2w]^2 \geqslant$$

$$0$$

即式①成立,原式得证,且易知取等号条件.

132. 简证:分以下两种情况证明.

(1) 若 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$,则有

$$\sum \frac{3a^4 + a^2b^2}{a^3 + b^3} - 2\sum a =$$

$$\left(\sum \frac{3a^4 + a^2b^2}{a^3 + b^3} - 2\sum \frac{a^3}{a^2 - ab + b^2}\right) + \left(2\sum \frac{a^3}{a^2 - ab + b^2} - 2\sum a\right) =$$

$$\sum \left(\frac{3a^4 + a^2b^2}{a^3 + b^3} - \frac{2a^3}{a^2 - ab + b^2}\right) + 2\sum \left(\frac{a^3}{a^2 - ab + b^2} - a\right) =$$

$$\sum \frac{a^2(a - b)^2}{a^3 + b^3} + \sum \frac{a^3 - b^3}{a^2 - ab + b^2} =$$

$$\sum \frac{a^2(a - b)^2}{a^3 + b^3} + \left(\frac{1}{a^2 - ab + b^2} - \frac{1}{c^2 - ca + a^2}\right)(a^3 - b^3) +$$

$$\left(\frac{1}{b^2 - bc + c^2} - \frac{1}{c^2 - ca + a^2}\right)(b^3 - c^3) =$$

$$\sum \frac{a^2(a - b)^2}{a^3 + b^3} + \frac{[(a^2 - ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(a + b - c)](a - b)(b - c)}{(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)} -$$

$$\frac{[(a^2 + ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(-a + b + c)](a - b)(b - c)}{(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)} =$$

$$\sum \frac{a^2(a - b)^2}{a^3 + b^3} + \frac{2(a - b)(b - c)(a - c)\sum b^2c^2}{(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)} \geqslant$$

$$0$$

原式成立.

(2) 若 $a \geqslant c \geqslant b \geqslant 0$,则有

$$\sum \frac{3a^4+a^2b^2}{a^3+b^3}-2\sum a=$$

$$\sum\left(\frac{3a^4+a^2b^2}{a^3+b^3}-a-b\right)=$$

$$\sum \frac{(2a+b)(a^2+b^2)(a-b)}{a^3+b^3}=$$

$$\left[\frac{(2a+b)(a^2+b^2)(a-c)}{a^3+b^3}-\frac{(2c+a)(c^2+a^2)(a-c)}{c^3+a^3}\right]+$$

$$\left[\frac{(2a+b)(a^2+b^2)(c-b)}{a^3+b^3}-\frac{(2b+c)(b^2+c^2)(c-b)}{b^3+c^3}\right]=$$

$$\left[\frac{a(a^2+b^2)}{a^3+b^3}+\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}-\frac{c(c^2+a^2)}{c^3+a^3}-\frac{c^2+a^2}{c^2-ca+a^2}\right](a-c)+$$

$$\left[\frac{a(a^2+b^2)}{a^3+b^3}+\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}-\frac{b(b^2+c^2)}{b^3+c^3}-\frac{b^2+c^2}{b^2-bc+c^2}\right](c-b)=$$

$$\left[\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^3+b^3}-1\right)-\left(\frac{c^2+a^2}{c^2-ca+a^2}-1\right)+\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}-1\right)-\right.$$

$$\left.\left(\frac{c^2+a^2}{c^2-ca+a^2}-1\right)\right](a-c)+\left[\left(\frac{a(a^2+b^2)}{a^3+b^3}-1\right)-\left(\frac{b(b^2+c^2)}{b^3+c^3}-1\right)+\right.$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-ab+b^2}-1\right)-$$

$$\left.\left(\frac{b^2+c^2}{b^2-bc+c^2}-1\right)\right](c-b)=$$

$$\left[\frac{b^2(a-b)}{a^3+b^3}+\frac{a^2(a-c)}{c^3+a^3}+\left(\frac{ca}{c^2-ca+a^2}-\frac{ab}{a^2-ab+b^2}\right)\right](a-c)+$$

$$\left[\frac{b^2(a-b)}{a^3+b^3}+\frac{c^2(c-b)}{b^3+c^3}+\left(\frac{bc}{b^2-bc+c^2}-\frac{ab}{a^2-ab+b^2}\right)\right](c-b)=$$

$$\left[\frac{b^2(a-b)}{a^3+b^3}+\frac{a^2(a-c)}{c^3+a^3}+\frac{a(a^2-bc)(c-b)}{(c^2-ca+a^2)(a^2-ab+b^2)}\right](a-c)+$$

$$\left[\frac{b^2(a-b)}{a^3+b^3}+\frac{c^2(c-b)}{b^3+c^3}+\frac{b(ac-b^2)(a-c)}{(b^2-bc+c^2)(a^2-ab+b^2)}\right](c-b)\geqslant$$

$$0$$

原式也成立.

综上,原命题获证.

注:本题从不同角度对原命题进行等价变换,从而得到结论,这种“从不同角度看问题”的思考方法值得关注.

133. 简证一:(叶中豪提供) 设 $\frac{BD}{BC}=x,\frac{DC}{BC}=y$,则 $x+y=1$,且易得

$$\frac{S_1}{S}=x^2,\ \frac{S_3}{S}=y^2,\ \frac{S_2}{S}=2xy$$

应用加权平均值,有

$$\max\{x^2,2xy,y^2\}\geqslant\frac{x^2(2x-y)^2+2xy(4x^2-xy+4y^2)+y^2(2y-x)^2}{(2x-y)^2+(4x^2-xy+4y^2)+(2y-x)^2}=$$

$$\frac{4}{9}(x+y)^2=\frac{4}{9}$$

即
$$\max\{S_1,S_2,S_3\}\geqslant\frac{4}{9}S$$

简证二:用反证法.

假设 $x^2<\frac{4}{9}(x+y)^2,y^2<\frac{4}{9}(x+y)^2,2xy<\frac{4}{9}(x+y)^2$,即

$$\begin{cases}-5x^2+8xy+4y^2>0\\4x^2+8xy-5y^2>0\\4x^2-10xy+4y^2>0\end{cases}$$

令引进参数 $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}^+$,设

$$\begin{cases}-5x^2+8xy+4y^2=\alpha\\4x^2+8xy-5y^2=\beta\\4x^2-10xy+4y^2=\gamma\end{cases}$$

由上消去 x,y,得

$$4\alpha+4\beta+\gamma=2\sqrt{\alpha+4\beta+4\gamma}\cdot\sqrt{4\alpha+\beta+4\gamma}$$

然而　　上式右边 $\geqslant 4\alpha+4\beta+8\gamma$　(柯西不等式)

于是,有

$$4\alpha+4\beta+\gamma\geqslant4\alpha+4\beta+8\gamma\Leftrightarrow r\geqslant 8r\quad(r\in\mathbf{R}^+)$$

这显然不可能,故假设不成立.从而原命题获证.

134. 简证

$$\frac{3}{m+2abc}-\sum\frac{1}{m+a^2(b+c)}=$$

$$\sum[\frac{1}{m+2abc}-\frac{1}{m+a^2(b+c)}]=$$

$$\frac{1}{m+2abc}\sum\frac{a^2(b+c)-2abc}{m+a^2(b+c)}=$$

$$\frac{1}{m+2abc}\sum\frac{a[c(a-b)-b(c-a)]}{m+a^2(b+c)}=$$

$$\frac{1}{m+2abc}\sum a(b-c)[\frac{b}{m+b^2(c+a)}-\frac{c}{m+c^2(a+b)}]=$$

$$\frac{1}{m+2abc}\sum \frac{a(m-abc)(b-c)^2}{[m+b^2(c+a)][m+c^2(a+b)]} \geqslant 0$$

故原式成立,易知其等号条件.

135. 简证:两次应用柯西不等式,有

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{s_1-x_i}} \geqslant \frac{s_1^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^3(s_1-x_i)}}$$

又

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^3(s_1-x_i)} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i \cdot \sum_{i=1}^{n}x_i^2(s_1-x_i)} = \sqrt{s_1(s_1s_2-3s_3)}$$

由以上两式即得证,且易知当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时取等号.

取 $n=3$,并可证 $\frac{s_1^2}{s_1s_2-3s_3} \geqslant \frac{s_2}{s_1s_2-s_3} = \frac{s_2}{(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)}$,因此,可得到第三章"放缩法证明不等式"中例 11 中的不等式.

136. 简证:若 $c=0$,原式显然成立;若 $c \neq 0$,则

原式左边 - 右边 =

$$(c^2+d^2+4b^2-4bd)a^2-4b^2c \cdot a+(b^2c^2+b^2d^2) =$$

$$(c^2+d^2+4b^2-4bd)\left(a-\frac{2b^2c}{c^2+d^2+4b^2-4bd}\right)^2+\frac{b^2(c^2+d^2-2bd)^2}{c^2+d^2+4b^2-4bd} \geqslant 0$$

137. 简证

$$\left(\frac{a}{b+kd}+\frac{b}{c+ka}+\frac{c}{d+kb}+\frac{d}{a+kc}\right) \cdot$$
$$[a(b+kd)+b(c+ka)+c(d+kb)+d(a+kc)] \geqslant$$
$$(a+b+c+d)^2$$

于是,只要证

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{a(b+kd)+b(c+ka)+c(d+kb)+d(a+kc)} \geqslant \frac{4}{1+k}$$

即

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{(ab+bc+cd+da)(1+k)} \geqslant \frac{4}{1+k} \Leftrightarrow$$
$$(a+b+c+d)^2 \geqslant 4(ab+bc+cd+da) \Leftrightarrow$$
$$(a+c-b-d)^2 \geqslant 0$$

故原式成立.由以上证明可知,当且仅当 $a=b=c=d$,或 $k=1$,且 $a+c=b+d$ 时,原式取等号.

138. 简证

原式 $\Leftrightarrow 3(192+48\sum\cot^2A+9\sum\cot^2B\cot^2C)\leqslant$

$$512+192\sum\cot^2A+72\sum\cot^2B\cot^2C+27\cot^2A\cot^2B\cot^2C\Leftrightarrow$$

$$48\sum\cot^2A+45\sum\cot^2B\cot^2C+27\cot^2A\cot^2B\cot^2C\geqslant 64 \qquad ①$$

设 $x=\cot B\cot C, y=\cot B\cot C, z=\cot A\cot B$，则 $x+y+z=1$，这时式①等价于

$$48\sum\frac{yz}{x}+45\sum x^2+27xyz\geqslant 64$$

即

$$48\sum y^2z^2+45xyz\sum x^2+27(xyz)^2\geqslant 64xyz\Leftrightarrow$$

$$48(\sum yz)^2-90xyz\sum yz-115xyz+27(xyz)^2\geqslant 0 \qquad ②$$

令 $w=\sqrt{1-3\sum yz}$，即 $\sum yz=\frac{1-w^2}{3}$，则由第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中定理2推论3，有

$$xyz\leqslant\frac{1-3w^2+2w^3}{27}=\frac{(1-w)^2(1+2w)}{27}$$

又由于 $48(\sum yz)^2-90xyz\sum yz-115xyz+27(xyz)^2$ 是关于 xyz 递减，因此，要证式②，只需证

$$48\left(\frac{1-w^2}{3}\right)^2-90\,\frac{1-3w^2+2w^3}{27}\,\frac{1-w^2}{3}-115\,\frac{1-3w^2+2w^3}{27}+$$

$$\frac{(1-3w^2+2w^3)^2}{27}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(1-w)^2[144(1+w)^2-30(1-w^2)(1+2w)-115(1+2w)+$$

$$(1-w)^2(1+2w)^2]\geqslant 0$$

$$w^2(1-w)^2(171+56w+4w^2)\geqslant 0$$

成立，故式②成立，原命题获证，易知当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，原式取等号.

139. 简证：原式等价于

$$\sum(x^2-y^2)^2\geqslant 2\sum xy(x^2-y^2) \qquad ①$$

当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时，有

$$\sum xy(x^2-y^2)=(x+y+z)(x-y)(y-z)(x-z)\geqslant 0$$

因此，要证式①，只要证当 $x\geqslant y\geqslant z$ 时式①成立即可，这时

$\sum(x^2-y^2)^2-2\sum xy(x^2-y^2)=$

$(x^2-y^2)^2+(x^2-y^2+y^2-z^2)^2+(y^2-z^2)^2-2xy(x^2-y^2)-$
$2yz(y^2-z^2)+2xz(x^2-y^2+y^2-z^2)=$
$2[(x^2-y^2)^2+(x^2-y^2)(y^2-z^2)+(y^2-z^2)^2-x(x^2-y^2)(y-z)+$
$z(y^2-z^2)(x-y)]\geqslant$
$2[(x^2-y^2)^2+(x^2-y^2)(y^2-z^2)-x(x^2-y^2)(y-z)]=$
$2(x^2-y^2)(x^2-y^2+y^2-z^2-xy+xz)=$
$2(x^2-y^2)(x^2-xy+xz-z^2)\geqslant$
0

即式 ① 成立,从而原式获证.

140. 简证:因为

$$\sum\sqrt{a+a^4}\geqslant\sqrt{(\sum\sqrt{a})^2+(\sum a^2)^2}$$

所以只需证

$$(\sum\sqrt{a})^2+(\sum a^2)^2\geqslant(\sqrt{3}+1)\sum a$$

若令$\sqrt{a}=x,\sqrt{b}=y,\sqrt{c}=z$,即证

$$(\sum x)^2+(\sum x^4)^2\geqslant(\sqrt{3}+1)\sum x^2(\text{其中}\sum y^2z^2=1)\Leftrightarrow$$

$$(\sum x)^2\cdot(\sum y^2z^2)^{\frac{3}{2}}+(\sum x^4)^2-(\sqrt{3}+1)\sum x^2\cdot(\sum y^2z^2)^{\frac{3}{2}}\geqslant 0 \quad ①$$

因为

$$\begin{aligned}(\sum x)^2&=\sum x^2+2\sum yz=\\&\sum x^2+2\sqrt{\sum y^2z^2+2xyz\sum x}\geqslant\\&\sum x^2+2\sqrt{\sum y^2z^2}\end{aligned}$$

所以要证式 ①,只需证

$$(\sum x^2+2\sqrt{\sum y^2z^2})(\sum y^2z^2)^{\frac{3}{2}}+[(\sum x^2)^2-2\sum y^2z^2]^2-$$
$$(\sqrt{3}+1)\sum x^2(\sum y^2z^2)^{\frac{3}{2}}\geqslant 0 \quad ②$$

令$\sum x^2=u,\sqrt{\sum y^2z^2}=v$,则$v\geqslant\sqrt{3}v$,且式 ② 变为

$$(u+2v)\cdot v^3+(u^2-2v^2)^2-(\sqrt{3}+1)uv^3\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$u^4-4u^2v^2-\sqrt{3}uv^3+6v^4\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(u-\sqrt{3}v)[(u+\sqrt{3}v)(u^2-v^2)-\sqrt{3}v^3]\geqslant 0 \quad ③$$

因为

$$u-\sqrt{3}v\geqslant 0$$

$$(u+\sqrt{3}v)(u^2-v^2)-\sqrt{3}v^3\geqslant 2\sqrt{3}\cdot 2v^2-\sqrt{3}v^3=3\sqrt{3}v^3\geqslant 0$$

所以式③成立,从而式②、①成立,由证明中可知,式②、③不可能同时取等号,故原式获证.

141. 简证:为证明方便,作如下变换:设$x=2a,y=2b,z=2c$,这时原命题等价于:

设$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$,且满足$a+b+c=1$,则

$$\sum\sqrt{9-32bc}\geqslant 7 \qquad ①$$

当且仅当$a=b=c=\frac{1}{3}$,或a,b,c中有一个为零,其余两个都等于$\frac{1}{2}$时取等号.

下面我们来证明式①,有

$$\text{式}①\Leftrightarrow(\sqrt{9-32bc}+\sqrt{9-32ac})^2\geqslant(7-\sqrt{9-32ab})^2\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{9-32bc}\cdot\sqrt{9-32ac}+7\sqrt{9-32ab}\geqslant$$
$$20+16bc+16ac-16ab$$

将上式两边再次平方整理,得到

$$7\sqrt{729-2\,592\sum bc+9\,216abc-32\,768(abc)^2}\geqslant$$
$$-61+128(\sum bc)^2-512abc+464\sum bc$$

因此,要证式①,只要证式②成立.

由于
$$s_1^3-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$$
(参见第一章"等价变换法证明不等式"中例14)因此得到

$$s_2\leqslant\frac{1+9s_3}{4}$$

因此,要证式②,又只要证

$$7\sqrt{729-2\,592\cdot\frac{1+9s_3}{4}+9\,216s_3-32\,768s_3^2}\geqslant$$
$$-61+128(\frac{1+9s_3}{4})^2-512s_3+464\cdot\frac{1+9s_3}{4}\Leftrightarrow$$
$$7\sqrt{81+3\,384s_3-32\,768s_3^2}\geqslant$$
$$63+676s_3+648s_3^2$$

将上式两边平方并整理,得到

$$s_3(1\,260-33\,504s_3-13\,689s_3^2-6\,561s_3^3)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$s_3(1-27s_3)(1\,260+516s_3+243)\geqslant 0$$

此式显然成立,因此式②成立,从而式①获证,由以上证明易得到取等号条件.

142. 简证:令$a_1+b_1=u,a_2+b_2=v$,则由$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2=m^2$,有

$\frac{m^2}{u}=a_1-b_1,\frac{m^2}{v}=a_2-b_2$,于是

$$(a_1+b_2)(a_2+b_1)-m^2=$$

$$[\frac{1}{2}(u+\frac{m^2}{u})+\frac{1}{2}(v-\frac{m^2}{v})][\frac{1}{2}(v+\frac{m^2}{v})+\frac{1}{2}(u-\frac{m^2}{u})]-m^2=$$

$$\frac{1}{4}[(u+v)+(\frac{m^2}{u}-\frac{m^2}{v})][(u+v)-(\frac{m^2}{u}-\frac{m^2}{v})]-m^2=$$

$$\frac{1}{4}[(u+v)^2-m^4(\frac{1}{u}-\frac{1}{v})^2]-m^2=$$

$$\frac{1}{4u^2v^2}[u^2v^2(u+v)^2-m^4(u-v)^2-4m^2u^2v^2]=$$

$$\frac{1}{4u^2v^2}[(u^2v^2-m^4)(u+v)^2-4uvm^2(uv-m^2)]=$$

$$\frac{uv-m^2}{4u^2v^2}[uv(u+v)^2+m^2(u-v)^2]$$

因此,得到

$$\frac{(a_1+b_2)(a_2+b_1)-m^2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)-m^2}=\frac{uv(u+v)^2+m^2(u-v)^2}{4u^2v^2}\geqslant\frac{(u+v)^2}{4uv}$$

即得原式,易知其取等号条件.

143. 简证:将原式齐次化,得到

$$\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2-yz}\leqslant\frac{4\sum x\sum yz}{(y+z)(z+x)(x+y)} \quad ①$$

记 $s_1=\sum x=1,s_2=\sum yz,s_3=xyz$,将式①去分母并经整理,得到

$$式①\Leftrightarrow(s_2-8s_2^2+20s_2^3-16s_2^4)+(3-17s_2+38s_2^2-32s_2^3)s_3+(1-6s_2)s_3^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$s_2(1-4s_2)(1-2s_2)^2+(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+(1-6s_2)s_3^2\geqslant 0 \quad ②$$

当 $1-4s_2\geqslant 0$,且 $1-6s_2\geqslant 0$ 时,式②显然成立;

当 $1-4s_2\geqslant 0$,且 $1-6s_2\leqslant 0$ 时,由于 $s_2^2\geqslant 3s_2s_3=3s_3$,因此,要证式②成立,只要证

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+\frac{1}{3}(1-6s_2)s_2^2s_3\geqslant 0$$

又由于

$$\frac{1}{3}(1-6s_2)s_2^2s_3\geqslant-\frac{1}{3}(1-2s_2)s_2^2s_3$$

因此,又只要证

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3-\frac{1}{3}(1-2s_2)s_2^2s_3\geqslant 0$$

易证上式成立,因此,式②成立.

当 $1-4s_2\leqslant 0$ 时,记 $s_2=\frac{1-w^2}{3}(w\geqslant 0)$,根据第四章“应用基本不等式证明不等式”最后附录中定理2推论3,$s_3\geqslant\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}$,这时,有

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+(1-6s_2)s_3^2-$$
$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}-$$
$$(1-6s_2)[\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}]^2\geqslant$$
$$[s_3-\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}]\{(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)+$$
$$(1-6s_2)[s_3+\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}]\}\geqslant$$
$$[s_3-\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}][(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)+2(1-6s_2)s_3]\geqslant$$
$$[s_3-\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}][(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)+\frac{2}{3}(1-6s_2)s_2^2]$$

(注意到当 $1-4s_2\leqslant 0$ 时,有 $1-6s_2\leqslant 0$) 得

$$上式\geqslant 0$$

即有

$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)s_3+(1-6s_2)s_3^2\geqslant$$
$$(1-2s_2)(3-11s_2+16s_2^2)\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}+$$
$$(1-6s_2)[\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}]^2$$

因此,要证式②成立,只要证

$$\frac{1-w^2}{3}\cdot[1-\frac{4(1-w^2)}{3}][1-\frac{2(1-w^2)}{3}]^2+$$
$$[1-\frac{2(1-w^2)}{3}][3-\frac{11(1-w^2)}{3}+16(\frac{1-w^2}{3})^2]\cdot$$
$$\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}+(1-\frac{6(1-w^2)}{3})[\frac{(1-2w)(1+w)^2}{27}]^2\geqslant 0$$

经整理,得到

$$\frac{(1+w)(2w-1)}{27^2}(-8w^2+8w^3-50w^4+28w^5-100w^6-32w^7)\geqslant 0$$

另外,由 $1-4s_2\leqslant 0$,得到 $2w-1\leqslant 0$,又 $1+w>0$,因此,只要证

$$-8w^2+8w^3-50w^4+28w^5-100w^6-32w^7\leqslant 0$$

而上式易证成立,事实上,有

$$-8w^2+8w^3-50w^4+28w^5-100w^6-32w^7=$$
$$-8w^2(1-\frac{w}{2})^2-14w^4(1-w)^2-34w^4-86w^6-32w^7\leqslant$$
$$0$$

因此,当 $1-4s_2\leqslant 0$ 时,式 ② 也成立.

综上,式 ① 成立,故原式获证,易证当且仅当 $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$,或 x,y,z 中,有一个为零,其余两个都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$时,原式取等号.

144. 简证:先证以下引理.

引理:设 $0\leqslant a\leqslant 1\leqslant b$,则

(1) $ab\leqslant\sqrt{a^2+b^2-1}$;

(2) $a+b-1\leqslant\sqrt{a^2+b^2-1}$;

(3) 若 $3(a+b)\leqslant 5+ab$,则

$$a+b-\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-1}+1$$

证:(1) $a^2+b^2-1-a^2b^2=(1-a^2)(b^2-1)\geqslant 0$.

(2) $a^2+b^2-1-(a+b-1)^2=2(1-a)(b-1)\geqslant 0$.

(3) 原式等价于

$$\sqrt{a^2+b^2-1}\geqslant 2a+2b-ab-2=ab+2(1-a)(b-1)\Leftrightarrow$$
$$(\sqrt{a^2+b^2-1})^2\geqslant[ab+2(1-a)(b-1)]^2\Leftrightarrow$$
$$(1-a)(b-1)(5-3a-3b+ab)\geqslant 0$$

上式成立,原式获证.

由(3) 易得若 $a^2+b^2<2$,则

$$a+b-\frac{1}{2}ab\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-1}+1\qquad(※)$$

下面先用数学归纳法证明猜想在 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$ 时,有

$$2+(n-2)x_1x_2\cdots x_n\geqslant\sum x_2x_3\cdots x_n\qquad(1)$$

当 $n=2$ 时,由 $2+x_1^2+x_2^2\geqslant\frac{1}{2}(x_1+x_2)^2$,即得 $2\geqslant x_1+x_2$,故当 $n=2$ 时,

式(1) 成立.

假设当 $n = k$ 时命题成立,即在 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 = k$ 时,有

$$2 + (n-2)x_1x_2\cdots x_k \geqslant \sum x_2\cdots x_k \quad ①$$

当 $n = k+1$ 时,由 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_k^2 + x_{k+1}^2 = k+1$ 可知,在 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}$ 中,必有一个不大于1,同时必有一个不小于1,不妨设 $0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \leqslant x_2$,下面分两种情况:

(1) 若 $x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2$,则 $x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_{k+1}^2 \leqslant k-1$,于是

$$\sum x_2\cdots x_{k+1} - (k-1)x_1x_2\cdots x_{k+1} =$$
$$(x_1 + x_2)x_3x_4\cdots x_{k+1} + x_1x_2(x_4x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_5\cdots x_{k+1} +$$
$$x_3x_5\cdots x_k - (k-1)x_3x_4\cdots x_{k+1}) \quad ②$$

由于

$$x_4x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_4\cdots x_k - (k-1)x_3x_4\cdots x_{k+1} \geqslant$$
$$\sqrt{\frac{x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_{k+1}^2}{k-1}} \cdot (x_4x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_4\cdots x_k) - (k-1)x_3x_4\cdots x_{k+1} \geqslant$$
$$(x_3x_4\cdots x_{k+1})^{\frac{1}{k-1}} \cdot (k-1)(x_3x_4\cdots x_{k+1})^{\frac{k-2}{k-1}} - (k-1)x_3x_4\cdots x_{k+1} = 0$$

因此

式②右边 $\leqslant$

$$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1} + 1)x_3x_4\cdots x_{k+1} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}(x_4x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_5\cdots x_{k+1} +$$
$$x_3x_4\cdots x_k - (k-1)x_3x_4\cdots x_{k+1}) =$$
$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1}(x_4x_5\cdots x_{k+1} + x_3x_5\cdots x_{k+1} + \cdots + x_3x_4\cdots x_k) +$$
$$x_3x_4\cdots x_{k+1} - (k-2)\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 1} \cdot (x_3x_4\cdots x_{k+1}) \leqslant$$

2(据式①)

故当 $n = k+1$ 时,式(1) 成立.

(2) 若 $1 < x_1^2 + x_2^2 < 2$,则 $x_3^2 + x_4^2 + \cdots + x_{k+1}^2 < k$,即

$$\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_3\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_4\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_{k+1}\right)^2 < k-1$$

于是

$$\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_4\right)\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_5\right)\cdots\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_{k+1}\right) +$$
$$\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_3\right)\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_5\right)\cdots\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_{k+1}\right) + \cdots +$$
$$\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_3\right)\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_4\right)\cdots\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_k\right) -$$

$$(k-1)\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_3\right)\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_4\right)\cdots\left(\sqrt{\frac{k-1}{k}}x_{k+1}\right) \geqslant 0$$

即

$$x_4x_5\cdots x_{k+1}+x_3x_5\cdots x_{k+1}+\cdots+x_3x_4\cdots x_k \geqslant \sqrt{\frac{(k-1)^3}{k}}x_3x_4\cdots x_{k+1}$$

因此,有

$$x_4x_5\cdots x_{k+1}+x_3x_5\cdots x_{k+1}+\cdots+x_3x_4\cdots x_k-\frac{2k-3}{2}x_3x_4\cdots x_{k+1} \geqslant$$

$$x_1x_2\left(\sqrt{\frac{(k-1)^3}{k}}x_3x_4\cdots x_{k+1}-\frac{2k-3}{2}x_3x_4\cdots x_{k+1}\right) \geqslant 0$$

所以,可得到

$$\sum x_2\cdots x_{k+1}-(k-1)x_1x_2\cdots x_{k+1}=$$

$$\left(x_1+x_2-\frac{1}{2}x_1x_2\right)x_3x_4\cdots x_{k+1}+x_1x_2(x_4x_5\cdots x_{k+1}+x_3x_5\cdots x_{k+1}+$$

$$x_3x_4\cdots x_k-\frac{2k-3}{2}x_3x_4\cdots x_{k+1}) \leqslant$$

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}+1\right)x_3x_4\cdots x_{k+1}+\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}(x_3x_5\cdots x_{k+1}+x_3x_5\cdots x_{k+1}+\cdots+$$

$$x_3x_4\cdots x_k-\frac{2k-3}{2}x_3x_4\cdots x_{k+1}) \leqslant$$

(根据式(*))

$$x_3x_4\cdots x_{k+1}+\sqrt{x_1^2+x_2^2-1}[x_4x_5\cdots x_{k+1}+x_3x_5\cdots x_{k+1}+\cdots+x_3x_4\cdots x_k]-$$

$(k-2)x_3x_4\cdots x_{k+1} \leqslant 2$(据式①)

故当 $n=k+1$ 时,式(1) 也成立.综上,式(1) 获证.

现在再证明原命题.

由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 \leqslant n$,因此总存在一个 $\alpha>0$,使得

$$(x_1+\alpha)^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$$

于是,根据式(1) 有

$$2+(n-2)(x_1+\alpha)x_2\cdots x_n \geqslant$$

$$x_2x_3\cdots x_n+(x_1+\alpha)(x_3x_4\cdots x_n+x_2x_4\cdots x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_{n-1}) \Leftrightarrow$$

$$2+(n-2)x_1x_2\cdots x_n-\sum x_2x_3\cdots x_n \geqslant$$

$$\alpha[x_3x_4\cdots x_n+x_2x_4\cdots x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_{n-1}-(n-2)x_2x_3\cdots x_n] \quad ③$$

另外,由 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant n$,得到 $n\geqslant x_2^2+\cdots+x_n^2$,因此

$x_3x_4\cdots x_n+x_2x_4\cdots x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_{n-1}-(n-2)x_2x_3\cdots x_n\geqslant$

$\sqrt{\frac{x_2^2+x_3^2+\cdots+x_n^2}{n}}(x_3x_4\cdots x_n+x_2x_4\cdots x_n+\cdots+x_2x_3\cdots x_{n-1})-(n-2)x_2x_3\cdots x_n\geqslant$

$\sqrt{\frac{(n-1)(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{2}{n-1}}}{n}}(n-1)(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{n-2}{n-1}}-(n-2)x_2x_3\cdots x_n=$

$[\sqrt{\frac{(n-1)^3}{n}}-(n-2)]x_1x_2\cdots x_n\geqslant$

$0(n\geqslant 2)$

由此可知,式③右边不小于零,故原命题成立.

注:以上证明参考了《中学数学教学》(安徽),2008 年第 2 期,秦显明文:"对一个五元不等式的证明".

145. 笔者于 2009 年 4 月 24 日对刘健老师的猜想证明如下:

(1) 当 $R_2R_3\geqslant bc$ 时

$(R_2+R_3)(R_3+R_1)(R_1+R_2)=$

$R_2R_3(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2^2+R_3^2+R_2R_3+R_3R_1+R_1R_2)\geqslant$

$R_2R_3(R_1+R_2+R_3)\geqslant$

$bc(b+c)$

(由费马定理可知,当 $\angle A\geqslant\frac{2\pi}{3}$ 时,有 $R_1+R_2+R_3\geqslant b+c$) 当且仅当 $R_1=0$,即点 P 与点 A 重合时,上式取等号.

(2) 当 $R_2R_3<bc$ 时,记 $\angle BPC=\alpha,\angle CPA=\beta,\angle APB=\gamma$,首先由于

$$\begin{aligned}3+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)&=3+2\cos\alpha+2(\cos\beta+\cos\gamma)=\\&1+4\cos^2\frac{\alpha}{2}+4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\\&1+4\cos^2\alpha-4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\\&(1-2\cos\frac{\alpha}{2})^2+4\cos\frac{\alpha}{2}(1-\cos\frac{\beta-\gamma}{2})\geqslant\\&0\end{aligned}$$

(注意到当点 P 在 $\triangle ABC$ 内部或边界上时,有 $0\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$) 当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$ 时,上式取等号,因此

$$R_1R_2R_3[3+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)]\geqslant 0 \quad ①$$

当且仅当$\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$,或$R_1R_2R_3=0$时,式①取等号.

另外,易知有

$$b^2(R_1+R_2-c)+c^2(R_1+R_3-b)\geqslant 0 \qquad ②$$

当且仅当$R_1=0$,即点P与点A重合时,式②取等号.

由式①、②得到

$$\begin{aligned}&b^2(R_1+R_2-c)+c^2(R_1+R_3-b)\geqslant\\&-R_1R_2R_3[3+2(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)]=\\&-R_1R_2R_3-2R_1R_2R_3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)\end{aligned} \qquad ③$$

当且仅当$R_1=0$,即点P与点A重合时,式③取等号.

又由于$\frac{2\pi}{3}\leqslant\angle A<\pi$,因此

$$1\leqslant-2\cos A \qquad ④$$

于是,由式④及已知条件$R_2R_3<bc$,得到

$$R_2R_3<-2bc\cos A$$

因此,得到

$$R_1R_2R_3\leqslant-2R_1bc\cos A \qquad ⑤$$

当且仅当$R_1=0$,即点P与点A重合时,式⑤取等号.

由式③、⑤可得到

$$\begin{aligned}&b^2(R_1+R_2-c)+c^2(R_1+R_3-b)\geqslant\\&2R_1bc\cos A-2R_1R_2R_3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&b^2(R_1+R_2)+c^2(R_1+R_3)-2R_1bc\cos A+\\&2R_1R_2R_3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)\geqslant\\&bc(b+c)\Leftrightarrow\\&(b^2+c^2-2bc\cos A)R_1+b^2R_2+c^2R_3+\\&2R_1R_2R_3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)\geqslant\\&bc(b+c)\Leftrightarrow\\&a^2R_1+b^2R_2+c^2R_3+2R_1R_2R_3(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+1)\geqslant\\&bc(b+c)\end{aligned}$$

由三角形中的余弦定理,有

$$a^2=R_2^2+R_3^2-2R_2R_3\cos\alpha$$
$$b^2=R_3^2+R_1^2-2R_3R_1\cos\beta$$
$$c^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\gamma$$

将它们分别代入上式左边,并经整理,便得到

$$(R_2+R_3)(R_3+R_1)(R_1+R_2)\geqslant bc(b+c)$$

当且仅当 $R_1=0$,即点 P 与点 A 重合时取等号.

综上(1),(2)可知,原式已获证,当且仅当点 P 重合于点 A 时原式取等号.

第九章

《ALGEBRAIC INEQUALITIES》摘录

说明:以下是选自罗马尼亚 Vasile Cirtoaje 主编的《Algebraic Inequalities. Old and New Methods》(《代数不等式 旧的与新的方法》)一书中的第1章和第8章的题目.这些题目最早是由上海复旦大学武炳杰同学提供给笔者的,并帮笔者作了中文翻译.后来笔者曾托东北师大附中马腾宇同学于2007年7月25日至7月26日在越南河内参加第四十八届国际数学奥林匹克竞赛期间买到一本,2007年8月23日才收到此书,在此之前,一直未见到原始解答.因此,在本章中所给出的解答,绝大多数是在2007年8月23日之前本人所作,还有几个题目解答录自原书.解答后面括号内注明了该题的解答时间与解答来源.后来笔者将解答与原书中的解答作了比较,发现有的解答与原书中的解答相同,但多数解答与其不同(也许有的解答不如原书中的解答简捷),这里就不再录入原书中的解答了,请读者参阅原书.

在此,笔者向武炳杰、马腾宇两位同学表示感谢!

杨学校

二〇〇七年八月三十一日

Chapter 1

Warm-up problem set

1. Let a,b,c,d be real numbers such that $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Prove that

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \leqslant 8$$

2. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$a^3+b^3+c^3-3abc \geqslant \left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3$$

3. Let a,b,c be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

4. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^3+b^3+c^3=3$. Prove that

$$a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4 \leqslant 3$$

5. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1 \geqslant 2(ab+bc+ca)$$

6. If a,b,c are distinct real numbers, then

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geqslant 2$$

7. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$(a^2-bc)\sqrt{b+c}+(b^2-ca)\sqrt{c+a}+(c^2-ca)\sqrt{a+b} \geqslant 0$$

8. If a,b,c,d are non-negative numbers, then

$$\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{b-c}{b+2c+d}+\frac{c-d}{c+2d+a}+\frac{d-a}{d+2a+b} \geqslant 0$$

9. Let a,b,c be non-negative numbers such that

$$a^2+b^2+c^2=a+b+c$$

Prove that

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \leqslant ab+bc+ca$$

10. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of them are zero. Then

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geqslant 1$$

11. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geqslant 1$$

12. Let a,b,c be positive numbers and let

$$E(a,b,c) = a(a-b)(a-c) + b(b-c)(b-a) + c(c-a)(c-b)$$

Prove that

(a) $(a+b+c)E(a,b,c) \geqslant ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2$;

(b) $2(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})E(a,b,c) \geqslant (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$.

13. Let a,b,c and x,y,z be real numbers such that $a+x \geqslant b+y \geqslant c+z \geqslant 0$ and $a+b+c = x+y+z$. Prove that

$$ay + bx \geqslant ac + xz$$

14. Let $a,b,c \in [\frac{1}{3},3]$. Prove that

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \geqslant \frac{7}{5}$$

15. Let a,b,c and x,y,z be non-negative numbers such that

$$a+b+c = x+y+z$$

Prove that

$$ax(a+x) + by(b+y) + cz(c+z) \geqslant 3(abc + xyz)$$

16. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$4(a+b+c)^3 \geqslant 27(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)$$

17. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{1}{2ab^2+1} + \frac{1}{2bc^2+1} + \frac{1}{2ca^2+1} \geqslant 1$$

18. If a,b,c,d are positive numbers, then

$$\frac{1}{a^2+ab} + \frac{1}{b^2+bc} + \frac{1}{c^2+cd} + \frac{1}{d^2+da} \geqslant \frac{4}{ac+bd}$$

19. If $a,b,c \in [\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{2}]$, then

$$\frac{3}{a+2b} + \frac{3}{b+2c} + \frac{3}{c+2a} \geqslant \frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a}$$

20. Let a,b,c be non-negative numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+2} + \frac{1}{b^2+2} + \frac{1}{c^2+2} \leqslant 1$$

21. Let a,b,c be non-negative real numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \leqslant \frac{3}{2}$$

22. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\leqslant 1$$

23. Let a,b,c be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

(a) $\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}\geqslant 0$;

(b) $\frac{a-1}{b+c}+\frac{b-1}{c+a}+\frac{c-1}{a+b}\geqslant 0$.

24. Let a,b,c,d be non-negative numbers such that $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$. Prove that

$$(a+b)(c+d)\geqslant 2(ab+cd)$$

25. Let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ be positive numbers such that $a_1a_2\cdots a_n=1$. Prove that

$$\frac{1}{1+(n-1)a_1}+\frac{1}{1+(n-1)a_2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)a_n}\geqslant 1$$

26. Let a,b,c,d be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Prove that

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\geqslant abcd$$

27. If a,b,c are positive real numbers, then

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}}+\sqrt{\frac{2b}{b+c}}+\sqrt{\frac{2c}{c+a}}\leqslant 3$$

28. If a,b,c,d are positive real numbers, then

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a}\right)^2\geqslant 1$$

29. Let a,b,c be positive numbers such that $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$. If $a\leqslant b\leqslant c$, then

$$ab^2c^3\geqslant 1$$

30. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of them are zero. Then

$$\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2}{c^2+a^2}+\frac{c^2}{a^2+b^2}\geqslant\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

31. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geqslant(a+1)(b+1)(c+1)(abc+1)$$

32. If a,b,c,d are non-negative numbers, then

$$3(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)\geqslant 1+abc+a^2b^2c^2$$

33. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2)\geqslant\left(\frac{1+abcd}{2}\right)^2$$

34. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^3$$

35. Let a,b,c,d be positive numbers such that $abcd=1$. Prove that

$$\frac{1}{1+ab+bc+ca}+\frac{1}{1+bc+cd+db}+\frac{1}{1+cd+da+ac}+$$
$$\frac{1}{1+da+ab+bd} \leqslant 1$$

36. If a,b,c and x,y,z are real numbers, then

$$4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2) \geqslant 3(bcx+cay+abz)^2$$

37. If $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$, then

$$(a+b+c+d+e)^2 \geqslant 8(ac+bd+ce)$$

For $e>0$, determine when equality occurs.

38. If a,b,c,d are real numbers, then

$$6(a^2+b^2+c^2+d^2)+(a+b+c+d)^2 \geqslant 12(ab+bc+cd)$$

39. If a,b,c are positive numbers, then

$$\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geqslant 1+\sqrt{1+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)}}$$

40. If a,b,c,d are positive numbers, then

$$5+\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-2} \geqslant (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

41. If a,b,c,d are positive numbers, then

$$\frac{a-b}{b+c}+\frac{b-c}{c+d}+\frac{c-d}{d+a}+\frac{d-a}{a+b} \geqslant 0$$

42. If $a,b,c>-1$, then

$$\frac{1+a^2}{1+b+c^2}+\frac{1+b^2}{1+c+a^2}+\frac{1+c^2}{1+a+b} \geqslant 2$$

43. Let a,b,c and x,y,z be positive real numbers such that

$$(a+b+c)(x+y+z)=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$$

Prove that

$$abcxyz < \frac{1}{36}$$

44. Let a,b,c be positive numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a} \geqslant 3$$

45. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab} \geqslant \frac{3}{ab+bc+ca}$$

46. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}\geqslant\frac{3}{ab+bc+ca}$$

47. Let a,b,c be positive numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca}\geqslant 5$$

48. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$12+9abc\geqslant 7(ab+bc+ca)$$

49. Let a,b,c be non-negative numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$a^3+b^3+c^3+7abc\geqslant 10$$

50. If a,b,c are positive numbers such that $abc=1$, then

$$(a+b)(b+c)(c+a)+7\geqslant 5(a+b+c)$$

51. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\leqslant\frac{1}{a+b+c}$$

52. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a+b+c\geqslant 3$. Prove that

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{a+b^2+c}+\frac{1}{a+b+c^2}\leqslant 1$$

53. Let a,b,c be non-negative numbers such that $ab+bc+ca=3$. If $r\geqslant 1$, then

$$\frac{1}{r+a^2+b^2}+\frac{1}{r+b^2+c^2}+\frac{1}{r+c^2+a^2}\leqslant\frac{3}{r+2}$$

54. Let a,b,c be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{5}{(1+a)(1+b)(1+c)}\geqslant 1$$

55. Let a,b,c be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\geqslant\frac{3}{ab+bc+ca}$$

56. If a,b,c are real numbers, then

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\geqslant(1+a)(1+b)(1+c)$$

57. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geqslant 2$$

58. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geqslant 2$$

59. Let a, b, c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}$$

60. Let a, b, c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{2a}{3a^2+bc}+\frac{2b}{3b^2+ca}+\frac{2c}{3c^2+ab}$$

61. Let a, b, c be positive numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \geqslant 18$$

62. Let a, b, c be non-negative numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{1}{6-ab}+\frac{1}{6-bc}+\frac{1}{6-ca} \leqslant \frac{3}{5}$$

63. Let $n \geqslant 4$ and let $a_1, a_2, \cdots, a_n$ be real numbers such that

$$a_1+a_2+\cdots+a_n \geqslant n \quad \text{and } a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant n^2$$

Prove that

$$\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \geqslant 2$$

64. Let a, b, c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

65. Let a, b, c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} \geqslant a+b+c$$

66. Let a, b, c be non-negative numbers such that

$$(a+b)(b+c)(c+a)=2$$

Prove that

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab) \leqslant 1$$

Chapter 8

Final problem set

1. Let a, b, c be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+1}} \geqslant 3$$

2. Let a,b,c be positive numbers such that $abc=1$. Prove that

$$\sqrt{\frac{a}{b+3}}+\sqrt{\frac{b}{c+3}}+\sqrt{\frac{c}{a+3}}\geqslant\frac{3}{2}$$

3. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a+b+c=3$. Prove that

$$\frac{5-3bc}{1+a}+\frac{5-3ca}{1+b}+\frac{5-3ab}{1+c}\geqslant ab+bc+ca$$

4. Let a,b,c,d be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Prove that

$$(abc)^3+(bcd)^3+(cda)^3+(dab)^3\leqslant 4$$

5. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\sqrt{\frac{a}{4a+5b}}+\sqrt{\frac{b}{4b+5c}}+\sqrt{\frac{c}{4c+5a}}\leqslant 1$$

6. Let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ be positive numbers. Prove that

(a) $$\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2}{(a_1^2+1)(a_1^2+1)\cdots(a_n^2+1)}\leqslant\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}};$$

(b) $$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{(a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdots(a_n^2+1)}\leqslant\frac{(2n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{2^n n^{n-1}}.$$

7. Let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ and $b_1,b_2,\cdots,b_n$ be real numbers. Prove that

$$a_1b_1+\cdots+a_nb_n+\sqrt{(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)}\geqslant$$
$$\frac{2}{n}(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)$$

8. Let k and n be positive integers with $k<n$, and let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ be real numbers such that $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. Prove that

$$(a_1+a_2+\cdots a_n)^2\geqslant n(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_na_k)$$

in the following cases:

(a) for $n=2k$;

(b) for $n=4k$.

9. Let a,b,c,d be positive numbers such that $abcd=1$. Prove that

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\geqslant 1$$

10. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$9(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)\geqslant 8(a^2b^2c^2+abc+1)^2$$

11. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$\frac{(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)}\geqslant\frac{1+abcd}{2}$$

12. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Then

$$\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\geqslant\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

13. Let a,b,c be positive numbers, and let

$$x=a+\frac{1}{b}-1,\ y=b+\frac{1}{c}-1,\ z=c+\frac{1}{a}-1$$

Prove that

$$xy+ya+zx\geqslant 3$$

14. Let a,b,c be positive numbers, no two of which are zero. If n is a positive integer, then

$$\frac{2a^n-b^n-c^n}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^n-c^n-a^n}{c^2-ca+a^2}+\frac{2c^n-a^2-b^n}{a^2-ab+b^2}\geqslant 0$$

15. Let $0\leqslant a\leqslant b$ and let $a_1,a_2,\cdots,a_n\in[a,b]$. Prove that

$$a_1+a_2+\cdots+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_n\cdots a_n}\leqslant(n-1)(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2$$

16. Let a,b,c and x,y,z be positive numbers such that $x+y+z=a+b+c$. Prove that

$$ax^2+by^2+cz^2+xyz\geqslant 4abc$$

17. Let a,b,c and x,y,z be positive numbers such that $x+y+z=a+b+c$. Prove that

$$\frac{x(3x+a)}{bc}+\frac{y(3y+a)}{ca}+\frac{z(3z+a)}{ab}\geqslant 12$$

18. Let a,b,c be positive numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Prove that

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$$

19. Let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ be positive numbers such that $a_1a_2\cdots a_n=1$. Prove that

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{4n}{n+a_1+a_2+\cdots+a_n}\geqslant n+2$$

20. Let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ be positive numbers such that $a_1a_2\cdots a_n=1$. Prove that

$$a_1+a_2+\cdots+a_n-n+1\geqslant\sqrt[n-1]{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n+1}$$

21. Let $r>1$ and let a,b,c be non-negative numbers such that $ab+bc+ca=3$. Prove that

$$a^r(b+c)+b^r(c+a)+c^r(a+b)\geqslant 6$$

22. Let a,b,c be positive real numbers such that $abc\geqslant 1$. Prove that

(a) $a^{\frac{a}{b}}b^{\frac{b}{c}}c^{\frac{c}{a}}\geqslant 1$;

(b) $a^{\frac{a}{b}}b^{\frac{b}{c}}c^{c}\geqslant 1$.

23. Let a,b,c,d be non-negative numbers. Prove that

$$4(a^3+b^3+c^3+d^3)+15(abc+bcd+cda+dab)\geqslant (a+b+c+d)^3$$

24. Let a,b,c be positive numbers such that $(a+b-c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c})=4$. Prove that

$$(a^4+b^4+c^4)(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4})\geqslant 2\ 304$$

25. Let a,b,c be positive numbers. Prove that

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}>\frac{2}{ab+bc+ca}$$

26. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}>1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

27. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Then

$$\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\geqslant 6$$

28. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Then

$$\frac{b+c}{2a^2+bc}+\frac{c+a}{2b^2+ca}+\frac{a+b}{2c^2+ab}\geqslant\frac{6}{a+b+c}$$

29. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}\geqslant 2(ab+bc+ca)$$

30. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Then

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+ab}}\geqslant 0$$

31. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$(a^2-bc)\sqrt{a^2+4bc}+(b^2-ca)\sqrt{b^2+4ca}+(c^2-ab)\sqrt{c^2+4ab}\geqslant 0$$

32. If a,b,c are positive numbers, then

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{8a^2+(b+c)^2}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{8b^2+(c+a)^2}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{8c^2+(a+b)^2}}\geqslant 0$$

33. If a,b,c are non-negative numbers, then

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\leqslant\frac{3}{2}(a+b+c)$$

34. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Then

$$21+18abc\geqslant 13(ab+bc+ca)$$

35. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Then

$$\frac{1}{5-2ab}+\frac{1}{5-2bc}+\frac{1}{5-2ca}\leqslant 1$$

36. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2=3$. Then

$$(2-ab)(2-bc)(2-ca)\geq 1$$

37. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a+b+c=2$. Prove that

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\leq 1$$

38. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Then

$$\frac{a^3+3abc}{(b+c)^2}+\frac{b^3+3abc}{(c+a)^2}+\frac{c^3+3abc}{(a+b)^2}\geq a+b+c$$

39. Let a,b,c be positive numbers such that $a^4+b^4+c^4=3$. Then

(a) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3$;

(b) $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

40. If a,b,c are positive numbers, then

$$\frac{a^3-b^3}{a+b}+\frac{b^3-c^3}{b+c}+\frac{c^3-a^3}{c+a}\leq\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{8}$$

41. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\leq\frac{1}{3}$$

42. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{1}{5(a^2+b^2)-ab}+\frac{1}{5(b^2+c^2)-bc}+\frac{1}{5(c^2+a^2)-ca}\geq\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

43. Let a,b,c be non-negative real numbers such that $a^2+b^2+c^2=1$. Prove that

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\leq\frac{3}{4}$$

44. Let a,b,c be non-negative numbers such that $a^2+b^2+c^2=1$. Prove that

$$\frac{1}{3+a^2-2bc}+\frac{1}{3+b^2-2ca}+\frac{1}{3+c^2-2ab}\leq\frac{9}{8}$$

45. If a,b,c are positive numbers, then

$$\frac{4a^2-b^2-c^2}{a(b+c)}+\frac{4b^2-c^2-a^2}{b(c+a)}+\frac{4c^2-a^2-b^2}{c(a+b)}\leq 3$$

46. If a,b,c are positive numbers such that $abc=1$, then

$$a^2+b^2+c^2+6\geq\frac{3}{2}\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

47. Let $a_1,a_2,\cdots,a_n$ be positive numbers such that $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. Prove that

$$a_1a_2\cdots a_n(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\cdots+\frac{1}{a_n}-n+3)\leqslant 3$$

48. Let a,b,c be the side lengths of a triangle. If $a^2+b^2+c^2=3$, then

$$ab+bc+ca\geqslant 1+2abc$$

49. Let a,b,c be the side lengths of a triangle. If $a^2+b^2+c^2=3$, then

$$a+b+c\geqslant 2+abc$$

50. If a,b,c are the side lengths of a non-isosceles triangle, then

(a) $\left|\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+c}{b-c}+\frac{c+a}{c-a}\right|>5$;

(b) $\left|\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2-c^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2-a^2}\right|>3$.

51. Let a,b,c be the lengths of the sides of a triangle. Prove that

$$a^2(\frac{b}{c}-1)+b^2(\frac{c}{a}-1)+c^2(\frac{a}{b}-1)\geqslant 0$$

52. Let a,b,c be the lengths of the sides of a triangle. Prove that

$$(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\geqslant 6(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$$

53. If $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\in[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$, then

$$\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\frac{a_2-a_3}{a_3+a_4}+\cdots+\frac{a_6-a_1}{a_1+a_2}\geqslant 0$$

54. Let a,b,c be positive numbers such that $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$. Prove that

$$\frac{a^5-a^2}{a^5+b^2+c^2}+\frac{b^5-b^2}{a^2+b^5+c^2}+\frac{c^5-c^2}{a^2+b^2+c^5}\geqslant 0$$

55. Let x,y,z be positive numbers such that $x+y+z\geqslant 3$. Then

$$\frac{1}{x^3+y+z}+\frac{1}{x+y^3+z}+\frac{1}{x+y+z^3}\leqslant 1$$

56. Let $x_1,x_2,\cdots,x_n$ be positive numbers such that $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$. If $a>1$, then

$$\sum\frac{x_1^a}{x_1^a+x_2+\cdots+x_n}\geqslant 1$$

57. Let $x_1,x_2,\cdots,x_n$ be positive numbers such that $x_1,x_2\cdots x_n\geqslant 1$. If $n\geqslant 3$ and $\frac{-2}{n-2}\leqslant a<1$, then

$$\sum\frac{x_1^a}{x_1^a+x_2+\cdots+x_n}\leqslant 1$$

58. Let $x_1,x_2,\cdots,x_n$ be positive numbers such that $x_1x_2\cdots x_n\geqslant 1$. If $a>1$,

then

$$\sum \frac{x_1}{x_1^\alpha + x_2 + \cdots + x_n} \leqslant 1$$

59. Let $x_1, x_2, \cdots, x_n$ be positive numbers such that $x_1x_2\cdots x_n \geqslant 1$. If $-1-\frac{2}{n-2} \leqslant a < 1$, then

$$\sum \frac{x_1}{x_1^\alpha + x_2 + \cdots + x_n} \geqslant 1$$

60. Let $n \geqslant 3$ be an integer and let p be a real number such that $1 < p < n-1$. If $0 < x_1, x_2, \cdots, x_n \leqslant \frac{pn-p-1}{p(n-p-1)}$ such that $x_1x_2\cdots x_n = 1$, then

$$\frac{1}{1+px_1} + \frac{1}{1+px_2} + \cdots + \frac{1}{1+px_n} \geqslant \frac{n}{1+p}$$

61. Let a, b, c be positive numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geqslant 1$$

62. Let a, b, c be positive numbers such that $abc = 1$. Prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geqslant 10(a + b + c)$$

63. Let a, b, c be non-negative numbers such that $ab + bc + ca = 3$. Prove that

$$\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc} + \frac{b(c^2+a^2)}{b^2+ca} + \frac{c(a^2+b^2)}{c^2+ab} \geqslant 3$$

64. If a, b, c are positive numbers, then

$$a + b + c + \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geqslant \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

65. If a, b, c are positive numbers, then

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

66. If a, b, c are given non-negative numbers, find the minimum value $E(a, b, c)$ of the expression

$$E = \frac{ax}{y+z} + \frac{by}{z+x} + \frac{cz}{x+y}$$

for any positive numbers x, y, z.

67. Let a, b, c be positive real numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geqslant a^2 + b^2 + c^2$$

68. Let a, b, c be non-negative numbers such that $a + b + c = 3$. Prove that

$$(a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2) \leqslant 12$$

69. Let a,b,c be non-negative real numbers such that $a+b+c=1$. Prove that

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\geqslant 2$$

70. If a,b,c are non-negative numbers , then

$$a^3+b^3+c^3+3abc\geqslant \sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}$$

71. If a,b,c are non-negative numbers , then

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)\geqslant \frac{15}{16}(1+a+b+c)^2$$

72. Let a,b,c,d be positive real numbers such that $abcd=1$. Prove that

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2)\geqslant (a+b+c+d)^2$$

73. If $x_1,x_2,\cdots,x_n$ are non-negative numbers, then

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant (n-1)\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}+\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}}$$

74. If k is a real number and $x_1,x_2,\cdots,x_n$ are positive number , then

$$(n-1)(x_1^{n+k}+x_2^{n+k}+\cdots+x_n^{n+k})+x_1x_2\cdots x_n(x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k)\geqslant$$
$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)(x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_n^{n+k-1})$$

75. Let a,b,c be non-negative numbers, no two of which are zero. Prove that

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

附:第九章《ALGEBRIC INEQUALITLES》摘录参考答案

Chapter 1

Warm-up problem set

1. (2007.01.15) 简证:即证$(\sum a^2)^3\geqslant(\sum a^3)^2$. 此式易由以下所得

$$(\sum a^2)^3=(\sum a^2)^2\cdot\sum a^2\geqslant\sum a^4\cdot\sum a^2\geqslant(\sum a^3)^2$$

2. (2007.01.15) 简证

$$a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(b-a)^2+(c-a)^2+(a-b)^2]\geqslant$$
$$\frac{1}{2}(a+b+c)[(b-a)^2+(c-a)^2]\geqslant$$

$$\frac{1}{4}(a+b+c)(b-a+c-a)^2 \geqslant$$

$$2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3$$

3. (2007.01.15) 简证：见第三章"放缩法证明不等式"中例8.

4. (2007.02.26) 简证：若 $x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$，则 $xyz \geqslant \prod(-x+y+z)$，即 $\sum x^3+3xyz \geqslant \sum yz(y+z)$. 以下将用到此式，由于

$$9\sum b^4c^4 = 9\sum(b^3c^3\cdot bc) \leqslant 3\sum b^3c^3(b^3+c^3+1) =$$

$$3\sum b^3c^3(b^3+c^3)+3\sum b^3c^3 =$$

$$\sum b^3c^3(b^3+c^3)+2\sum b^3c^3(b^3+c^3)+3\sum b^3c^3 \leqslant$$

$$(\sum a^9+3a^3b^3+2\sum b^3c^3cb^3+c^3)+3\sum b^3c^3 =$$

$$\sum a^3(\sum a^6+\sum b^3c^3)+3\sum b^3c^3 =$$

$$\sum a^3\cdot(\sum a^6+2\sum b^3c^3) = (\sum a^3)^3 = 27$$

(注意到 $\sum a^2=3$).

注：若 $a^3+b^3+c^3 \leqslant 3\lambda^3$，则 $3\sum b^4c^4 \leqslant \lambda^2\cdot(\sum a^3)^2$. 证法同上.

5. (2007.01.16) 简证：在 $1-a,1-b,1-c$ 中必有两个同时不大于零或同时不小于零，不妨设它们是 $1-b,1-c$，于是 $(1-b)(1-c) \geqslant 0$，因此

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1-2(ab+bc+ca) =$$

$$(a-1)^2+(b-c)^2+2a(1-b)(1-c) \geqslant 0$$

6. (2007.01.16) 简证：由对称性，不妨设 $a>b>c$，则易证

$$\frac{a}{b-c} > \frac{a-c}{b}$$

于是

$$\frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2}+\frac{c^2}{(a-b)^2} \geqslant \frac{a^2}{(b-c)^2}+\frac{b^2}{(c-a)^2} \geqslant$$

$$\frac{(a-c)^2}{b^2}+\frac{b^2}{(a-c)^2} > 2$$

7. (2007.01.21) 简证：设 $b+c=x^2, c+a=y^2, a+b=z^2, x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-}$，则原式变为

$$\sum[(-x^2+y^2+z^2)^2-(x^2-y^2+z^2)(x^2+y^2-z^2)]x \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum(y^4+z^4-x^2y^2-x^2z^2)x \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum xy(x-y)(x^2-y^2) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum xy(x+y)(x-y)^2 \geqslant 0$$

8. (2007.01.11) 简证

$$原式 \Leftrightarrow \sum\left(\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{1}{2}\right) \geqslant 2 \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{3a+c}{a+2b+c} \geqslant 4 \quad ①$$

今证式①. 应用柯西不等式有

$$[(3a+c)(a+2b+c)+(3b+d)(b+2c+d)+$$
$$(3c+a)(c+2d+a)+(3d+b)(d+2a+b)] \cdot$$
$$\left(\frac{3a+c}{a+2b+c}+\frac{3b+d}{b+2c+d}+\frac{3c+a}{c+2d+a}+\frac{3d+b}{d+2a+b}\right) \geqslant$$
$$(4\sum a)^2$$

又由于

$$(3a+c)(a+2b+c)+(3b+d)(b+2c+d)+$$
$$(3c+a)(c+2d+a)+$$
$$(3d+b)(d+2a+b)=$$
$$4(\sum a)^2$$

由此即得式①.

9. (2007.01.25) 简证一：原命题即证

$$(\sum a)^2 \cdot \sum b^2c^2 \leqslant (\sum a^2)^2 \cdot \sum bc$$

若记 $s_1=\sum a, s_2=\sum bc, s_3=abc$，则上式等价于

$$s_1^4 s_2-5s_1^2 s_2^2+4s_2^3+2s_1^3 s_3 \geqslant 0$$

此式易由第四章“应用基本不等式证明不等式”最后附录中定理 2 的推论 3 证得.

(2007.01.25) 简证二：因为

$$\sum a^4+2\sum a=\sum(a^4+a+a) \geqslant 3\sum a^2,\ \sum a^2=\sum a$$

所以 $$\sum a^4 \geqslant \sum a^2 \Leftrightarrow (\sum a^2)^2-2\sum b^2c^2 \geqslant (\sum a)^2-2\sum bc$$

所以 $$\sum b^2c^2 \leqslant \sum bc$$

10. (2007.01.17) 简证一：令 $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c}, x,y,z \in \mathbf{R}^+$，则原命题变为：已知 $x,y,z \in \mathbf{R}^+$，且 $xyz=1$，求证

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+z+z^2} \geqslant 1 \quad ①$$

为证式 ①,先证当 $xy \geqslant 1$ 时,有

$$\frac{1}{1+x+x^2}+\frac{1}{1+y+y^2} \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{xy}+xy} \quad ②$$

式 ②$\Leftrightarrow (2+x+y+x^2+y^2)(1+\sqrt{xy}+xy) \geqslant$

$2(1+x+x^2)(1+y+y^2) \Leftrightarrow$

$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2[(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2(\sqrt{xy}-1)+xy(x+y)+\sqrt{xy}-1] \geqslant 0$

由 $xy \geqslant 1$ 即知上式成立.

今证式 ①. 由 $xyz=1$ 知,总可设 $xy \geqslant 1$,因此,要证式 ①,只要证

$$\frac{2}{1+\sqrt{xy}+xy}+\frac{1}{1+z+z^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2z}{1+\sqrt{z}+z}+\frac{1}{1+z+z^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$z^3-z^2\sqrt{z}-z\sqrt{z}+z \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$z(z+\sqrt{z}+1)(\sqrt{z}-1)^2 \geqslant 0$$

即式 ① 成立. 故原命题获证.

(2007.01.17) 简证二

$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geqslant 1 \Leftrightarrow$

$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geqslant \frac{ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \Leftrightarrow$

$\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}-\frac{ab}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}-\frac{b^2}{a^2+ab+b^2} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\frac{b^2(b^2-ac)+ab(ab-c^2)}{(b^2+bc+c^2)(a^2+ab+b^2)}+\frac{ac(ac-b^2)+ab(c^2-ab)}{(c^2+ac+a^2)(a^2+ab+b^2)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$ab(ab-c^2)[\frac{1}{b^2+bc+c^2}-\frac{1}{a^2+ac+c^2}]+$

$(b^2-ac)[\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}-\frac{ac}{a^2+ac+c^2}] \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$ab(ab-c^2)(a^2+ac-b^2-bc)+(b^2-ac)[ab(ab-c^2)+c^2(b^2-ac)] \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \geqslant abc(ab^2+bc^2+ca^2) \Leftrightarrow$

$b^2(a^2-bc)^2+c^2(b^2-ca)^2+a^2(c^2-ab)^2 \geqslant 0$

故原式成立.

11. (2007.01.17) 简证: 见"第三章. 放缩法证明不等式"中例 6.

12. (2007.01.07) 简证:$E(a,b,c)=\frac{1}{2}\sum(-a+b+c)(b-c)^2$.

(a) 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则

$$原式 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum(a+b+c)(-a+b+c)(b-c)^2 \geqslant \sum bc(b-c)^2 \Leftrightarrow$$

$$\sum(-a^2+b^2+c^2)(b-c)^2 \geqslant 0$$

此式在所设 $a \geqslant b \geqslant c$ 下易证.

(b) 不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则

$$原式 \Leftrightarrow \sum[(bc+ca+ab)(-a+b+)-abc](b-c)^2 \geqslant 0$$

此式在 $a \geqslant b \geqslant c$ 情况下易证成立.

13. (2008.08.29,摘译自原书) 简证

$$\begin{aligned} ay+bx = ac-xz = a(y-c)+x(b-z) = \\ a(a+b-x-z)+x(b-z) = \\ a(a-x)+(a+x)(b-z) = \\ \frac{1}{2}(a-x)^2+\frac{1}{2}(a^2-x^2)+(a+x)(b-z) = \\ \frac{1}{2}(a-x)^2+\frac{1}{2}(a+x)(a+2b-x-2z) = \\ \frac{1}{2}(a-x)^2+\frac{1}{2}(a+x)(b+y-c-z) \geqslant 0 \end{aligned}$$

14. (2007.02.10) 简证:原式经去分母整理后等价于

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geqslant 5(c-b)(c-a)(b-a) \qquad ①$$

由式①可知,只要证在 $c \geqslant b \geqslant a$ 情况下式①成立即知原命题成立.这时式①又等价于

$$f(a) = (3b-2c)a^2+(3c-2b)(b+c)a+(3b-2c)bc \geqslant 0 \qquad ②$$

若 $3b-2c \geqslant 0$,式②显然成立,且当且仅当 $3b=2c$ ($b,c \in [\frac{1}{3},3]$) 及 $a=0$ 时取等号,不合题意,故取不到等号.

若 $2c-3b>0$,则 $f(a)$ 为 a 的二次函数,且二次项系数为负,这时其图象为开口向下的抛物线,由 $a,b,c \in [\frac{1}{3},3]$ 及 $2c-3b>0$ 知 $\frac{1}{3} \leqslant a \leqslant b \leqslant 2$,因此,我们只要证 $f(2) \geqslant 0$,$f(\frac{1}{3}) \geqslant 0$,即证得式②成立.这时

$$\begin{aligned} f(2) = 4(3b-2c)+2(3c-2b)(b+c)+(3b-2c)bc = \\ 2(3-b)c^2+(3b^2+2b-8)c+4b(3-b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = (3b^2+2b-8)^2-32b(b-3)^2 = (b-2)(9b^3-2b^2+144b-32) = \\ (b-2)[(9b^3-2b^2+48b)+32(3b-1)] \leqslant 0 \end{aligned}$$

(注意到 $\frac{1}{3}<c \leqslant 3$) 所以 $f(2) \geqslant 0$,易知在 $a,b,c \in [\frac{1}{3},3]$ 情况下,取不到等

号. 因为

$$f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{9}(3b-2c)+\frac{1}{3}(3c-2b)(b+c)+(3b-2c)bc =$$

$$\frac{1}{9}[(27c-6)b^2-(18c^2-3c-3)b+9c^2-2c]$$

$$\Delta = (18c^2-3c-3)^2-12c(9c-2)^2 = 3(c-3)(3c-1)(36c^3+1) \leqslant 0$$

(注意到$\frac{1}{3} < c \leqslant 3$) 又

$$27c-6>0$$

所以$f(\frac{1}{3}) \geqslant 0$,当且仅当$a=\frac{1}{3}, b=1, c=3$时取等号.

综上知式①成立,故原命题成立,且知,当且仅当$a=\frac{1}{3}, b=1, c=3$时,原命题中不等式取等号.

注:更广泛有:设$a,b,c \in [m,M](M > n \geqslant 0)$,则

$$\left|\prod \frac{b+c}{b-c}\right| \geqslant \frac{(M+m)(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2}{(M-m)(\sqrt{M}-\sqrt{m})^2}$$

当且仅当$a=M, b=\sqrt{Mm}, c=m$,或$c=M, b=\sqrt{Mm}, a=m$,或$b=M, c=\sqrt{Mm}, a=m$,或$a=M, c=\sqrt{Mm}, b=m$,或$c=M, a=\sqrt{Mm}, b=m$,或$b=M, a=\sqrt{Mm}, c=m$时取等号.

见第七章"其他不等式证明例子"中例42.

15.(2007.01.30)简证:因为

$$(ax^2+by^2+cz^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \geqslant (x+y+z)^2 = (a+b+c)^2$$

所以
$$ax^2+by^2+cz^2 \geqslant \frac{abc(\sum a)^2}{\sum bc} \geqslant 3abc$$

同理
$$a^2x+b^2y+c^2z \geqslant 3xyz$$

将以上两式左右两边分别相加即得.

16.(2005.03.12)简证:见第三章"放缩法证明不等式"中例5.

17.(2007.01.17)简证一:原式等价于$1+ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 4a^3b^3c^3$,又由$a+b+c=3$,得$abc \leqslant 1$.又$ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 3abc$,故

$$1+ab^2+bc^2+ca^2 \geqslant 1+3abc \geqslant 4a^3b^3c^3$$

(2007.01.17)简证二

$$\sum \frac{1}{2ab^2+1} \geqslant 1 \Leftrightarrow \sum \frac{1}{2ab^2+1} - 3 \geqslant -2 \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{ab^2}{2ab^2+1} \leqslant 1$$

又由 $2ab^2+1 = ab^2+ab^2+1 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^4}$ 等可知

$$\sum \sqrt[3]{\frac{a^3b^6}{a^2b^4}} \leqslant 3 \Leftrightarrow \sum \sqrt[3]{ab^2} \leqslant \sum (\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}b+\frac{1}{3}b)$$

故原式成立.

18.（2007.02.10）简证一：由柯西不等式有

$$\sum \frac{a+b}{a} \cdot \sum \frac{1}{a^2+ab} \geqslant (\sum \frac{1}{a})^2$$

故只要证 $(ac+bd)\cdot(\sum \frac{1}{a})^2 \geqslant 4(\sum \frac{a+b}{a})$ 成立即可. 此时

$$\begin{aligned}
&(ac+bd)\cdot(\sum \frac{1}{a})^2 - 4(\sum \frac{a+b}{a}) = \\
&(ac+bd)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{ad}+\frac{2}{bc}+\frac{2}{bd}+\frac{2}{cd}) - \\
&(16+\frac{4b}{a}+\frac{4c}{b}+\frac{4d}{c}+\frac{4a}{d}) = \\
&[(4+\frac{2c}{d}+\frac{2a}{b}+\frac{2ac}{bd}+\frac{2d}{a}+\frac{2b}{c}+\frac{2bd}{ac})-16] + \\
&[(\frac{bd}{a^2}+\frac{b}{d}+\frac{2b}{a})-\frac{4b}{a}] + [(\frac{ac}{b^2}+\frac{c}{a}+\frac{2c}{b})-\frac{4c}{b}] + \\
&[(\frac{bd}{c^2}+\frac{d}{b}+\frac{2d}{c})-\frac{4d}{c}] + [(\frac{ac}{d^2}+\frac{a}{c}+\frac{2a}{d})-\frac{4a}{d}] \geqslant 0
\end{aligned}$$

（2007.02.11）简证二：去证更强式

$$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+cd}+\frac{1}{d^2+da} \geqslant \frac{2}{\sqrt{abcd}} \quad ①$$

记 $a = \max\{a,b,c,d\}$，则

$$\begin{aligned}
\text{式①左边} &= \frac{1}{b}(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b}) + \frac{1}{b^2+bc} + \frac{1}{d}(\frac{1}{c}-\frac{1}{c+d}) + \frac{1}{d^2+da} = \\
&(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}) + [\frac{1}{b^2+bc}-\frac{1}{b(a+b)}] + \\
&[\frac{1}{d^2+da}-\frac{1}{d(c+d)}] = \frac{1}{ab}+\frac{1}{cd}+ \\
&\frac{(a-c)(d-b)(b^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{bd(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \quad ②
\end{aligned}$$

另外

$$\text{式①左边} = \frac{1}{a^2+ab} + \frac{1}{c}(\frac{1}{b}-\frac{1}{b+c}) + \frac{1}{c^2+cd} + \frac{1}{a}(\frac{1}{d}+\frac{1}{d+a}) =$$

$$(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad})+[\frac{1}{c^2+cd}-\frac{1}{c(b+c)}]+$$

$$[\frac{1}{a^2+ab}-\frac{1}{a(d+a)}]=\frac{1}{bc}+\frac{1}{ad}+$$

$$\frac{(a-c)(d-b)(a^2+c^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{ac(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)} \quad ③$$

由 ②、③ 两式可知，必有一式成立，故式 ① 成立，从而可得原式.

注：若记式 ① 左边为 T，则由 ②、③ 式得到

$$ac[T-(\frac{1}{ad}+\frac{1}{bc})]+bd[T-(\frac{1}{ab}+\frac{1}{cd})]=0$$

所以
$$T=\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}}{ac+bd}\geqslant\frac{2}{\sqrt{abcd}}$$

19. (2007.02.24) 简证一：因为

$$\frac{3}{a+2b}-\frac{2}{a+b}=\frac{a-b}{(a+2b)(a+b)}=\frac{a-b}{6ab-(a-b)(2b-a)}$$

又
$$\frac{a-b}{6ab}-\frac{a-b}{6ab-(a-b)(2b-a)}=\frac{-(a-b)^2(2b-a)}{6ab(a+2b)(a+b)}\leqslant 0$$

（注意 $2b\geqslant\sqrt{2}\geqslant a$）所以

$$\frac{3}{a+2b}-\frac{2}{a+b}\geqslant\frac{a-b}{6ab}=\frac{ac-bc}{6abc}$$

同理有
$$\frac{3}{b+2c}-\frac{2}{b+c}\geqslant\frac{ab-ac}{6ab},\ \frac{3}{c+2a}-\frac{2}{c+a}\geqslant\frac{bc-ab}{6abc}$$

将以上三式左右两边分别相加即得.

(2007.03.01) 简证二

$$\sum\frac{3}{a+2b}-\sum\frac{2}{a+b}=\sum\frac{a-b}{(a+2b)(a+b)}=$$

$$\sum\frac{a-b}{(a+2b)(a+b)}-\sum\frac{a-b}{6ab}=$$

$$\sum\frac{(a-b)^2(2b-a)}{6ab(2a+b)(a+b)}\geqslant 0$$

20. (2007.01.17) 简证一：原式等价于

$$\sum b^2c^2+a^2b^2c^2\geqslant 4$$

令 $bc=x, ca=y, ab=z, x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则 $x+y+z=3$，于是去证

$$\frac{\sum x}{3}\cdot\sum x^2+xyz\geqslant 4\cdot(\frac{\sum x}{3})^3$$

此式易证.

(2007.01.19) 简证二：原式等价于

$$\sum\left(\frac{1}{a^2+2}-\frac{1}{2}\right)\leqslant-\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sum\frac{a^2}{a^2+2}\geqslant 1$$

此式可由柯西不等式得到，即

$$\sum\frac{a^2}{a^2+2}\geqslant\frac{(\sum a)^2}{\sum a^2+6}=\frac{(\sum a)^2}{(\sum a)^2}=1$$

21. (2007.01.17) 简证：原式等价于

$$3+\sum a^2\geqslant\sum b^2c^2+3a^2b^2c^2$$

令 $bc=x,ca=y,ab=z,x,y,z\in\overline{\mathbf{R}^-}$，则 $x+y+z=3$，于是去证

$$3\cdot\left(\frac{\sum x}{3}\right)^3+\sum\frac{yz}{x}\cdot\left(\frac{\sum x}{3}\right)^2\geqslant\frac{\sum x}{3}\cdot\sum x^2+3xyz\Leftrightarrow$$

$$3xyz+\sum y^2z^2\geqslant$$

$$xyz\sum x^2+3(xyz)^2$$

记 $s_1=\sum x=3,s_2=\sum yz,s_3=abc$，则上式又等价于

$$s_2^2+2s_2s_3-12s_3-3s_3^2\geqslant 0 \qquad ①$$

由于 $s_2\geqslant\sqrt{3s_1s_3}=3\sqrt{s_3}$，因此，要证式 ① 只要证

$$9s_3+6\sqrt{s_3}-12s_3-3s_3^2\geqslant 0$$

即

$$2\sqrt{s_3}-s_3-s_3^2\geqslant 0$$

由已知条件 $x+y+z=3$ 知 $xyz\leqslant 1$，故易证上式成立.

22. (2006.10.03) 简证：原式等价于

$$2+abc\geqslant a^2c+b^2a+c^2b$$

此式证明可参见第七章“其他不等式证明例子”中例 38.

23. (a) 简证一：$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$，则

$$\frac{a-1}{b}+\frac{b-1}{c}+\frac{c-1}{a}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-y)z}{y^2}+\frac{(y-z)x}{z^2}+\frac{(z-x)y}{x^2}\geqslant 0 \qquad ①$$

再令 $yz=\lambda,zx=u,xy=v,\lambda,u,v\in\mathbf{R}^+$，则式 ① 变为

$$\frac{u(u-\lambda)}{v\lambda}+\frac{v(v-u)}{\lambda u}+\frac{\lambda(\lambda-v)}{uv}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$u^2(u-\lambda)+v^2(v-u)+\lambda^2(\lambda-v)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\lambda^3+u^3+v^3\geqslant\lambda u^2+uv^2+v\lambda^2$$

此式易由排序不等式得到.

简证二：原式等价于

$$\sum \frac{a}{b} \geqslant \sum \frac{1}{a} = \sum bc \quad ②$$

因为

$$\sum \frac{a}{b} \cdot \sum ab \geqslant (\sum a)^2$$

所以

$$\sum \frac{a}{b} \geqslant \frac{(\sum a)^2}{\sum bc} \quad ③$$

又因为

$$\sum \frac{a}{b} \cdot \sum \frac{1}{ab} \geqslant (\sum \frac{1}{a})^2 = (\sum bc)^2$$

所以

$$\sum \frac{a}{b} \geqslant \frac{(\sum bc)^2}{\sum \frac{1}{ab}} = \frac{(\sum bc)^2}{\sum a} \quad ④$$

若$\sum a \geqslant \sum bc$,则由式③得到

$$\sum \frac{a}{b} \geqslant \sum bc$$

若$\sum a \leqslant \sum bc$,则由式④得到

$$\sum \frac{a}{b} \geqslant \sum bc$$

简证三：式②又一证明见第八章“练习”题95.

(b)(2007.01.18)简证：当$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$时

$$\frac{a-1}{b+c}+\frac{b-1}{c+a}+\frac{c-1}{a+b} = (a+b+c-1)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}) - 3 \geqslant$$

$$(3\sqrt[3]{abc}-1) \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0$$

当$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b} \leqslant \frac{3}{2}$时

$$\frac{a-1}{b+c}+\frac{b-1}{c+a}+\frac{c-1}{a+b} = (a+b+c-1)(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}) - 3 =$$

$$\sum a \cdot \sum \frac{1}{b+c} - \sum \frac{1}{b+c} - 3 =$$

$$\frac{1}{2}\sum (b+c) \cdot \sum \frac{1}{b+c} - \sum \frac{1}{b+c} - 3 \geqslant$$

$$\frac{9}{2}-\frac{3}{2}-3=0$$

24.（2007.01.26）简证：记 $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2=r^2(r\geqslant 0)$，即

$$(a+b)^2-3ab=(c+d)^2-3cd=r^2$$

于是，有

$$(a+b)^2(c+d)^2-4(ab+cd)^2=(r^2+3ab)(r^2+3cd)-4(ab+cd)^2=$$
$$r^4+3r^2(ab+cd)+abcd-4(ab)^2-4(cd)^2=$$
$$(r^2-ab)(r^2-cd)+4ab(r^2-ab)+4cd(r^2-cd)=$$
$$(a-b)^2(c-d)^2+4ab(a-b)^2+4cd(c-d)^2\geqslant$$
$$0$$

25.（2007.02.09）简证一：可将原题推广为：设 $a_i>0,i=1,2,\cdots,n$，且 $a_1,a_2,\cdots,a_n=1$，则当 $\lambda\geqslant n-1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda a_i}\geqslant\frac{n}{1+\lambda} \quad ①$$

今证式 ① 成立. 令 $a_i=\frac{x_1x_2\cdots x_n}{x_i^n},x_i>0,i=1,2,\cdots,n$，则式 ① 等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^n}{x_i^n+\lambda x^1x_2\cdots x_n}\geqslant\frac{n}{1+\lambda}\quad(\lambda\geqslant n-1) \quad ②$$

由柯西不等式，有

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^n+\lambda x_1x_2\cdots x_n)\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^n}{x_i^n+\lambda x_1x_2\cdots x_n}\geqslant(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\frac{n}{2}})^2=$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^n+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_i^{\frac{n}{2}}y_j^{\frac{n}{2}}\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_i^n+n(n-1)x_1x_2\cdots x_n$$

因此，要证式 ② 成立，只需证

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^n+n(n-1)x_1x_2\cdots x_n}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^n+\lambda x_1x_2\cdots x_n)}\geqslant\frac{n}{1+\lambda}$$

即 $$(1+\lambda)\sum_{i=1}^{n}x_i^n+(1+\lambda)(n^2-n)x_1x_2\cdots x_n\geqslant n\sum_{i=1}^{n}x_i^n+\lambda n^2x_1x_2\cdots x_n$$

因为 $$\lambda+1\geqslant n$$

所以 $$(1+\lambda-n)\sum_{i=1}^{n}x_i^n\geqslant n(1+\lambda-n)x_1x_2\cdots x_n$$

所以又只需证

$$n(1+\lambda-n)x_1x_2\cdots x_n+(1+\lambda)(n^2-n)x_1x_2\cdots x_n \geqslant \lambda n^2 x_1x_2\cdots x_n$$

此式显然成立,则式②成立.即式①成立,原命题获证.

(2007.02.11)简证二:用反证法.

记$\dfrac{1}{1+(n-1)a_i}=x_i(i=1,2,\cdots,n)$,反设$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i<1$,则

$$(n-1)^n\cdot\prod_{i=1}^{n}a_i=\prod_{i=1}^{n}\frac{(1-x_i)}{x_i}>\prod_{j=1}^{n}\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-x_j)}{x_j}\geqslant(n-1)^n$$

(应用均值不等式)由此得$\prod\limits_{i=1}^{n}a_i>1$与$\prod\limits_{i=1}^{n}a_i=1$矛盾.故原命题成立.

26. (2007.01.20)简证一:原式等价于$1-\sum a+\sum bc-\sum bcd\geqslant 0$,注意到$\sum a^2=1$,记$s_1=\sum a,s_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd,s_3=\sum bcd$,即

$$\sum a^2\cdot\sqrt{\sum a^2}-\sum a\cdot\sum a^2+\sum bc\cdot\sqrt{\sum a^2}-\sum bcd\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\sum a^2}(s_1^2-s_2)\geqslant s_1(s_1^2-2s_2)+s_3\Leftrightarrow$$
$$(s_1^2-2s_2)(s_1^2-s_2)^2\geqslant(s_1^3-2s_1s_2+s_3)^2\Leftrightarrow$$
$$s_1^2s_2^2-2s_1^3s_3+4s_1s_2s_3-2s_2^3-s_3^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(s_1^2-2s_2)(s_2^2-2s_1s_3)\geqslant s_3^2 \quad (※)$$

因为
$$s_1^2-2s_2\geqslant\frac{2}{3}s_2,s_2^2-2s_1s_3\geqslant\frac{1}{4}s_1s_3$$

(这两式易证)所以要证式(※),只要证
$$\frac{2}{3}s_2\cdot\frac{1}{4}s_1s_3\geqslant s_3^2$$

即
$$s_1s_2\geqslant 6s_3$$

此式易证成立.

式(※)也可另证如下

$$式(※)\Leftrightarrow\sum a^2\cdot(b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2b^2+a^2c^2+b^2d^2-2abcd)\geqslant (\sum bcd)^2 \quad ①$$

但由于
$$a^2c^2+b^2d^2-2abcd=(ac-bd)^2\geqslant 0 \quad ②$$

又由柯西不等式有
$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2+a^2b^2)\geqslant (abc+bcd+cda+dab)^2 \quad ③$$

由②、③两式即知式①成立.

(2007.08.29,摘译自原书)简证二:由于$2cd\leqslant c^2+d^2=1-a^2-b^2$,因此,

有

$$2(1-a)(1-b)-2cd \geqslant 2(1-a)(1-b)-1+a^2+b^2=$$
$$(1-a-b)^2 \geqslant 0$$

即
$$(1-a)(1-b) \geqslant cd$$

同理有$(1-c)(1-d) \geqslant ab$,由以上两式 即可得原式.

27. (2004.01.22) 简证:见第三章"放缩法证明不等式"中例10.

28. (2007.01.20) 简证:原式等价于

$$\frac{1}{(1+\frac{b}{a})^2}+\frac{1}{(1+\frac{c}{b})^2}+\frac{1}{(1+\frac{d}{c})^2}+\frac{1}{(1+\frac{a}{d})^2} \geqslant 1$$

令$\frac{b}{a}=x,\frac{c}{b}=y,\frac{d}{c}=z,\frac{a}{d}=w$,知上式又等价于

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+w)^2} \geqslant 1$$

其中,$x,y,z,w \in \mathbf{R}^-$,且 $xyzw=1$.

上式证明可参见第七章"其他不等式证明例子"中例12.

29. (2007.02.21) 简证一:用反证法.

设$a<\frac{1}{b^2c^3}$,由于$c \geqslant b \geqslant a$,则$c \geqslant 1$,否则若$c<1$,则有$a+b+c<3$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>3$矛盾. 同时$a \leqslant 1$,否则若$a>1$,则$a+b+c>3$,$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<3$,矛盾.

又因为
$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

所以
$$0 \geqslant a-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-(b+c)=(b+c)\frac{1-bc}{bc}$$

所以
$$bc \geqslant 1$$

因为
$$a<\frac{1}{b^2c^3}\text{(假设)}$$

所以

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-b-c=a-\frac{1}{a}<\frac{1}{b^2b^3}-b^2b^3 \Leftrightarrow$$
$$bc^3+b^2c^2-b^3c^3-b^2c^4<1-b^4c^6$$

即

$$b^4c^6-b^3c^3-b^2(c^4-c^2)+bc^3-1<0 \qquad (※)$$

但

$$b^4c^6-b^3c^3-b^2(c^4-c^2)+bc^3-1 \geqslant b^3c^5-b^3c^3-b^2c^2(c^2-1)+c^2-1=$$

$$(b^3c^3-b^2c^2+1)(c^2-1)\geqslant 0$$

与式(※)矛盾.

故原式成立.

(2007.02.21)简证二:因为

$$\sum\frac{1}{a}=\sum a$$

所以
$$\sum bc=abc\sum a\leqslant\frac{1}{3}(\sum bc)^2$$

所以
$$\sum bc\geqslant 3$$

所以

$$ab^2c^3=a^2b^2c^2\cdot\frac{c}{a}\geqslant\frac{1}{3}a^2b^2c^2\cdot(\frac{c}{a}+\frac{b}{b}+\frac{a}{c})\geqslant$$

$$\frac{1}{3}a^2b^2c^2\cdot\frac{1}{3}\sum a\cdot\sum\frac{1}{a}=$$

(应用契贝谢夫不等式)

$$\frac{1}{9}a^2b^2c^2(\sum\frac{1}{a})^2=\frac{1}{9}(\sum bc)^2\geqslant 1$$

30. (2007.01.30)简证:因对称性,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$\sum\frac{a^2}{b^2+c^2}-\sum\frac{a}{b+c}=\sum\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{(b^2+c^2)(b+c)}=$$

$$[\frac{ab+ac}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{ba}{(c^2+a^2)(c+a)}-\frac{ca}{(a^2+b^2)(a+b)}](a-b)+$$

$$[\frac{ac}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{bc}{(c^2+a^2)(c+a)}-\frac{ca+cb}{(a^2+b^2)(a+b)}](b-c)=$$

$$[\frac{ab}{(b^2+c^2)(a+c)}-\frac{ab}{(a^2+c^2)(a+c)}](a-b)+$$

$$[\frac{ac}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{ac}{(a^2+b^2)(a+b)}](a-b)+$$

$$[\frac{ac}{(b^2+c^2)(b+c)}-\frac{ac}{(a^2+b^2)(a+b)}](b-c)+$$

$$[\frac{bc}{(a^2+c^2)(a+c)}-\frac{bc}{(a^2+b^2)(a+b)}](a-b)\geqslant$$

0

31. (2007.01.24)简证:我们将证明较之更强的式子

$$2(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\geqslant$$
$$(a+1)(b+1)(c+1)\cdot\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)} \quad ①$$

为证式①,先证

$$2(a^2+1)^3 \geqslant (a+1)^3(a^3+1) \quad ②$$

$$\begin{aligned}2(a^2+1)^3-(a+1)^3(a^3+1) &= a^6-3a^5+3a^4-2a^3+3a^2-3a+1 = \\ &(a^3-1)^2-3a^2(a^3-1)+3a(a^3-1) = \\ &(a^3-1)(a^3-3a^2+3a-1) = \\ &(a^3-1)(a-1)^3 = \\ &(a-1)^4(a^2+a+1)\end{aligned}$$

因此,式 ② 成立,同理有

$$2(b^2+1)^3 \geqslant (b+1)^3(b^3+1) \quad ③$$

$$2(c^2+1)^3 \geqslant (c+1)^3(c^3+1) \quad ④$$

将 ②、③、④ 三式左右两边分别相乘得

$$8\prod(a^2+1)^3 \geqslant \prod(a+1)^4 \cdot \prod(a^2-a+1) = \prod(a+1)^3 \cdot \prod(a^3+1)$$

即得式 ①.

又由赫尔德不等式,有

$$\prod(a^3+1) \geqslant (\prod a+1)^3$$

即得原式.

注:由上证明得到一个很好的等式

$$2(a^2+1)^3 = (a+1)^4(a^2-a+1)+(a-1)^4(a^2+a+1)$$

或 $2(a^2+b^2)^3 = (a+b)^4(a^2-ab+b^2)+(a-b)^4(a^2+ab+b^2)$

32. (2007.01.21) 简证:因为

$$3(1-a+a^2)^3-(1+a^3+a^6) = (1-a)^4(2-a+2a^2) \geqslant 0$$

同理还有二式,所以

$$\begin{aligned}&[3(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)]^3 \geqslant \\ &(1+a^3+a^6)(1+b^3+b^6)(1+c^3+c^6) \geqslant \\ &[1+abc+(abc)^2]^3\end{aligned}$$

由此即得证.

注:(1) 注意不等式 $3(1-a+a^2)^2 \geqslant 1+a^2+a^4$, $3(1-a+a^2)^3 \geqslant 1+a^3+a^6$ 等的应用.

(2) 由 $2(1-a+a^2)^2 \geqslant 1+a^4$(见以下题 33 证明) 知,本题结论强于 Chapter 8 中题 28 的结论.

(3) 由 $(1-a+a^2)^2 \leqslant 1-a^2+a^4$,易得 $(1-a+a^2)^{2n} \leqslant 1-a^{2n}+a^{2n+1}$.

33. (2007.01.21) 简证:因为

$$2(1-a+a^2)^2-(1+a^4) = (1-a)^4 \geqslant 0$$

即

$$2(1-a+a^2)^2 \geqslant (1+a^4)$$

同理

$$2(1-b+b^2)^2 \geqslant (1+b^4)$$
$$2(1-c+c^2)^2 \geqslant (1+c^4)$$
$$2(1-d+d^2)^2 \geqslant (1+d^4)$$

所以

$$4(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geqslant$$
$$\sqrt{(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4)} \geqslant$$
$$\sqrt{(1+abcd)^4}$$

即得原式.

注:由上证明得到一等式 $2(1-a+a^2)^2 = (1+a^4)+(1-a^4)$.

34. (2007.01.21) 简证

$$\text{原式左边} = (ab+b^2+a^2)(b^2+bc+c^2)(a^2+c^2+ac) \geqslant (ac+ab+bc)^3$$

(应用赫尔德不等式).

注:该题的推广可参阅第四章"应用基本不等式证明不等式"中的例22.

35. (2007.02.01) 简证

$$\frac{1}{1+ab+bc+ca} \leqslant \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{d}+\sqrt{a^2b^2d}+\sqrt{b^2c^2d}+\sqrt{c^2a^2d} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}} \geqslant \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \Leftrightarrow$$
$$ab+bc+ca \geqslant \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$$

此式显然成立. 另外还有三式,然后将这四式左右两边分别相加即得.

36. (2007.01.30) 简证:记

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2) - 3(bcx+cay+abz)^2 = \\ &[4(b^2+y^2)(c^2+z^2)-3b^2c^2]x^2 - 6abc(cy+bz)x + \\ &[4a^2\cdot(b^2+y^2)(c^2+z^2) - 3a^2(cy+bz)^2] \end{aligned}$$

因为

$$4(b^2+c^2)(c^2+z^2) - 3b^2c^2 > 0$$

又

$$\begin{aligned} \Delta &= 36(abc)^2(cy+bz)^2 - 4[4(b^2+y^2)(c^2+z^2)-3b^2c^2]\cdot \\ &[4a^2(b^2+y^2)(c^2+z^2) - 3a^2(cy+bz)^2] = \\ &16a^2(b^2+y^2)(c^2+z^2)[3b^2c^2+3(cy+bz)^2-4(b^2+y^2)(c^2+z^2)] = \\ &-16a^2(b^2+y^2)(c^2+z^2)[(bc-2yz)^2+(bz-cy)^2] \leqslant 0 \end{aligned}$$

所以 $f(x) \geqslant 0$,即原式成立.

37. (2007.01.22) 简证：记

$$f(e) = (a+b+c+d+e)^2 - 8(ac+bd+ce) =$$
$$e^2 + 2(a+b+d-3c)e + (a+b+c+d)^2 - 8(ac+bd)$$

其判别式为

$$\Delta = 4(a+b+d-3c)^2 - 4(a+b+c+d)^2 + 32(ac+bd) =$$
$$8(c-b)(c-d) \leqslant 0$$

(注意到 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$) 所以

$$f(e) \geqslant 0$$

即原式成立.

由以上解题过程可知,当且仅当 $(c-b)(c-d)=0$ 且 $e=-(a+b+d-3c)$,即 $b=c$ 且 $e=2b-a-d$,或 $c=d$ 且 $e=2c-a-b$ 时取等号.

注:本题条件可放宽为 $b \geqslant c \geqslant d, a,b,c,d \in \mathbf{R}$ 即可.

38. (2007.01.30) 简证：记

$$f(b) = 6(a^2+b^2+c^2+d^2) + (a+b+c+d)^2 - 12(ab+bc+cd) =$$
$$7b^2 - 2b(5a+5c-d) + 6(a^2+c^2+d^2) + (a+c+d)^2 - 12cd$$

因为

$$\Delta = 4[(5a+5c-d)^2 - 42(a^2+c^2+d^2) - 7(a+c+d)^2 + 84cd] =$$
$$-48(2a^2+2c^2+4d^2+2ad-3ac-5cd) =$$
$$-48[(a-c+d)^2 + (a-\frac{c}{2})^2 + 3(\frac{c}{2}-d)^2] \leqslant$$
$$0$$

所以 $f(b) \geqslant 0$,即原式成立.

39. (2007.02.01) 简证：记 $s_1 = \sum a, s_2 = \sum bc, s_3 = abc$,则原式等价于

$$(\sqrt{\sum a \cdot \sum \frac{1}{a}} - 1)^2 \geqslant 1 + \sqrt{\sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{a^2}} \Leftrightarrow$$

$$\sum a \cdot \sum \frac{1}{a} \geqslant 2\sqrt{\sum a \cdot \sum \frac{1}{a}} + \sqrt{\sum a^2 \cdot \sum \frac{1}{a^2}} \Leftrightarrow$$

$$(\frac{s_1 s_2}{s_3})^3 \geqslant [2\sqrt{\frac{s_1 s_2}{s_3}} + \sqrt{\frac{(s_1^2 - 2s_2)(s_2^2 - 2s_1 s_3)}{s_3^2}}]^2 \Leftrightarrow$$

$$s_2^3 + s_1^3 s_3 - 4s_1 s_2 s_3 \geqslant 2 \cdot \sqrt{s_1 s_2 s_3 (s_1^2 - 2s_2) s_2^2 - 2s_1 s_3} \Leftrightarrow$$

$$s_1 s_3 (s_1^2 - 2s_2) + s_2(s_2^2 - 2s_1 s_3) \geqslant 2 \cdot \sqrt{s_1 s_3 (s_1^2 - 2s_2) \cdot s_2 (s_2^2 - 2s_1 s_3)}$$

此式显然成立,原式获证.

注:从证明中可知,当且仅当 $s_1^3 s_3 - s_2^3 = (a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 0$ 时原式取等号.

40. (2007.02.01) 简证：原式等价于

$$2\sum a^2\cdot\sum\frac{1}{a^2}-2\geqslant(\sum a\cdot\sum\frac{1}{a})^2-10\sum a\cdot\sum\frac{1}{a}+25 \qquad ①$$

记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc$，则

$$式①\Leftrightarrow\frac{2(s_1^2-2s_2)(s_2^2-2s_1s_3)}{s_3^2}-\frac{s_1^2s_2^2}{s_3^2}+\frac{10s_1s_2}{s_3}-27\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(s_1s_2)^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-4s_1^3s_3-27s_3^2\geqslant 0 \qquad ②$$

式②$\Leftrightarrow=[c+(a+b)]^2[(a+b)c+ab]^2+18abc[c+(a+b)][(a+b)c+ab]-$
$4[(a+b)c+ab]^3-4abc(c+a+b)^3-27a^2b^2c^2=$
$(a-b)^2c^4-2(a+b)(a-b)^2c^3+(a^2+b^2+4ab)(a-b)^2c^2-$
$2ab(a+b)(a-b)^2c+a^2b^2(a-b)^2=$
$(a-b)^2[c^4-2(a+b)c^3+(a^2+b^2+4ab)c^2-2ab(a+b)+a^2b^2]=$
$(a-b)^2[c^4-2(a+b)c^3++(a+b)^2c^2+2abc^2-2ab(a+b)c+a^2b^2]=$
$(a-b)^2[c^2-(a+b)c+ab]^2=$
$(a-b)^2(c-a)^2(a-b)^2\geqslant 0$

故式①成立，原式获证.

注：(1) 由证明中得到以下命题：设 $a,b,c\in\mathbf{R}$，记

$$s_1=a+b+c,s_2=bc+ca+ab,s_3=abc$$

则
$$(s_1s_2)^2+18s_1s_2s_3-4s_2^3-4s_1^3s_3-27s_3^2\geqslant 0$$

当且仅当 a,b,c 中有两个相等时取等号.

(2) 由本章题 39 和题 40 可得到以下有趣不等式链，即有以下命题：

设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，记 $\sum a\cdot\sum\frac{1}{a}=x,\sum a^2\cdot\sum\frac{1}{a^2}=y$，则

$$(1+\sqrt{1+\sqrt{y}})^2\leqslant x \qquad ①$$

$$x\leqslant\sqrt{2y-2}+5 \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}(x^2-10x+27)\leqslant y \qquad ③$$

$$y\leqslant(x+2\sqrt{x})^2 \qquad ④$$

以上不等式①、④当且仅当 $(\sum bc)^3=abc(\sum a)^3$ 时取等号；不等式②、③当且仅当 a,b,c 中有两个相等时取等号.

41. (2007.01.21) 简证：原式等价于

$$\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{c+a}{d+a}+\frac{d+b}{a+b}\geqslant 4 \qquad (※)$$

式(※)左边 $=(\frac{a+c}{b+c}+\frac{c+a}{d+a})+(\frac{b+d}{c+d}+\frac{d+b}{a+b})=$

$$\frac{(a+c)(d+a)+(b+c)(c+a)}{(b+c)(d+a)}+$$

$$\frac{(b+d)(a+b)+(c+d)(d+b)}{(c+d)(a+b)}\geqslant$$

$$\frac{(a+c)(a+b+c+d)}{(\frac{a+b+c+d}{2})^2}+\frac{(b+d)(a+b+c+d)}{(\frac{a+b+c+d}{2})^2}=$$

$$4$$

由上证明可知，当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$ 时，原式取等号.

42. (2007.01.22) 简证：见第三章"放缩法证明不等式"中例 13.

43. (2007.01.30) 简证：因为

$$(a+b+c)(x+y+z)=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$$

所以

$$(\sum a)^2\cdot(\sum x)^2=4\sum a^2\cdot\sum x^2\Leftrightarrow$$

$$(\sum a^2+2\sum bc)(\sum x^2+2\sum yz)=4\sum a^2\cdot\sum x^2\Leftrightarrow$$

$$4\sum bc\cdot\sum yz+2\sum a^2\sum yz+2\sum x^2\sum bc=3\sum a^2\cdot\sum x^2=12$$

所以

$$6=2\sum bc\cdot\sum yz+\sum a^2\cdot\sum yz+\sum x^2\cdot\sum bc\geqslant$$

$$2\sum bc\cdot\sum yz+2\sqrt{\sum a^2\cdot\sum x^2\cdot\sum bc\cdot\sum yz}=$$

$$2\sum bc\cdot\sum yz+4\sqrt{\sum bc\cdot\sum yz}$$

即

$$(\sqrt{\sum bc\cdot\sum yz}-1)(\sqrt{\sum bc\cdot\sum yz}+3)\leqslant 0$$

所以

$$\sqrt{\sum bc\cdot\sum yz}\leqslant 1$$

所以

$$1\geqslant(\sum bc)^2\cdot(\sum yz)^2\geqslant$$

$$3abc\cdot\sum a\cdot 3xyz\cdot\sum x=$$

$$36abcxyz$$

所以

$$abcxyz\leqslant\frac{1}{36}$$

但由以上证明过程取等号条件可知，$abcxyz\neq\frac{1}{36}$，故 $abcxyz<\frac{1}{36}$.

44. (2007.01.22) 简证：证法应用第八章"练习"中题 61 或题 62 结论.

45. (2007.02.01) 简证：原式经去分母后等价于

$$\sum bc\cdot\sum(b^2+ca)(c^2+ab)-3\prod(a^2+bc)\geqslant 0 \qquad ①$$

由对称性,不妨设 c 最小,则

$$\sum bc\sum(b^2+ca)(c^2+ab)-3\prod(a^2+bc)=$$
$$(a+b)^2c^4+(a+b)^3c^3+[(a^2+b^2)(a+b)^2+ab(a^2+b^2+ab)]c^2+$$
$$ab(a+b)(2a^2+2b^2+ab)c+a^2b^2(a^2+b^2+ab)-$$
$$3[abc^4+(a^3+b^3)c^3+2a^2b^2c^2+ab(a^3+b^3)c+a^3b^3]=$$
$$(a^2+b^2-ab)c^4-(a+b)(2a^2+2b^2-5abc)c^3+$$
$$(a^4+b^4+3a^3b+3ab^3-3a^2b^2)c-$$
$$ab(a+b)(a^2+b^2-4ab)c+a^2b^2(a-b)^2=$$
$$[(a-b)^2c^4-2(a+b)(a-b)^2c^3+(a+b)^2(a-b)^2c]+$$
$$[ab(a-b)^2c^2-ab(a+b)(a-b)^2c+a^2b^2(a-b)^2]+$$
$$abc^4+ab(a+b)c^3+ab(2a^2+2b^2+ab)c^2+2a^2b^2(a+b)c=$$
$$(a-b)^2(a+b-c)^2c+ab(a-c)(b-c)(a-b)^2+$$
$$abc(c^3+2a^2b+2a^2c+2ab^2+2b^2c+ac^2+bc^2+abc)\geqslant$$
$$0$$

故式 ① 成立,原式获证.

46. (2007.02.02) 简证一:原式经去分母后等价于

$$\sum bc\cdot\sum(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)-3\prod(b^2-bc+c^2)\geqslant 0 \qquad ①$$

为以下计算方便,记 $a+b=x,ab=y$,则

式 ① 左边 $=[c^4-xc^3+(3x^2-7y)c^2-(x^3-3xy)c+(x^4-5xy^2+7y^2)]\cdot$
$(xc+y)-3[(x^2-3y)c^4-(x^3-3xy)c^3+(x^4-4x^2y+3y^2)c^2-$
$y(x^3-3xy)c+y^2(x^2-3y)]=$
$xc^5-(4x^2-10y)c^4+(6x^3-17xy)c^3-(4x^4-17x^2y+16y^2)c^2+$
$(x^5-3x^3y)c+(x^4-8x^2y+16y^2)=$
$xc(c^2-2xc+x^2)^2+10yc^4+17xyc^3+(17x^2y-16y^2)c^2+$
$3x^3yc+(x^2-4y)^2\geqslant 0$

注意有 $17x^2-16y^2\geqslant 68y^2-16y^2=52y^2\geqslant 0$.

注:对于三元如 a,b,c 对称式不等式,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,然后展开成以 c 为主元的多项式 $f(c)$,记 $x=a+b,y=ab$,则 $x^2\geqslant 4y$,最后再经配方证之.

注意当 $a+b=x,ab=y$ 时,有 $a^2+b^2=x^2-xy,a^3+b^3=x^3-3xy,a^4+b^4=x^4-4x^2y+2y^2,a^5+b^5=x^5-5x^3y+5xy^2,\cdots$

(2007.01.24) 简证二:设 $a\geqslant b\geqslant c$,则

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}\geqslant\frac{1}{b^2},\ \frac{1}{c^2-ca+a^2}\geqslant\frac{1}{a^2},\ \frac{1}{bc+ca+ab}\leqslant\frac{1}{ab}$$

于是只要证

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}\geqslant\frac{3}{ab}$$

此式易证.

47. 简证一：原式等价于

$$12+abc\sum bc-5\sum bc\geqslant 0 \quad ①$$

不妨设 a 最小，则由已知条件 $a+b+c=3$，可知 $0\leqslant a\leqslant 1, 2\leqslant b+c\leqslant 3$，现在我们先来证明

$$12+abc\sum bc-5\sum bc\geqslant$$

$$12-\frac{5}{4}(b+c)^2-5a(b+c)+\frac{1}{16}a(b+c)^4+\frac{1}{4}a^2(b+c)^3\Leftrightarrow$$

$$[5-\frac{1}{4}a(b+c)^2-abc-a^2(b+c)]\cdot(\frac{b-c}{2})^2\geqslant 0$$

由此，只要证

$$5-\frac{1}{4}a(b+c)^2-abc-a^2(b+c)\geqslant 0$$

$$\text{上式左边}\geqslant 5-\frac{1}{4}a(b+c)^2-\frac{1}{4}a(b+c)^2-a^2(b+c)=$$

$$5-\frac{1}{2}a(3-a)^2-a^2(3-a)=$$

$$\frac{1}{2}(10-9a+a^3)>$$

$$0$$

（注意到 $0\leqslant a\leqslant 1$）于是，要证式 ① 成立，只要证

$$12-\frac{5}{4}(b+c)^2-5a(b+c)+\frac{1}{16}a(b+c)^4+\frac{1}{4}a^2(b+c)^3\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$12-\frac{5}{4}(3-a)^2-5a(3-a)+\frac{1}{16}a(3-a)^4+\frac{1}{4}a^2(3-a)^3\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(1-a)^2(12-15a+18a^2-3a^3)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(1-a)^2[3(1-a)(4-a)+3a^2(5-a)]\geqslant 0$$

由 $0\leqslant a\leqslant 1$ 知上式成立，故式 ① 成立.

（2007.01.23）简证二：由第一章“等价变换法证明不等式”中例 14，有

$$s_1^2-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$$

又 $s_1=3$，因此得到

$$s_2\leqslant\frac{9+3s_3}{4}$$

于是,要证原式成立只需证

$$s_3+\frac{48}{9+3s_3}\geqslant 5\Leftrightarrow(s_3-1)^2\geqslant 0$$

故原式成立.

48.(2007.02.03)简证:由本章 Chapter 8 中题 34,有

$$21+18abc\geqslant 13\sum bc$$

因此,只需证

$$\frac{12+9abc}{7}\geqslant\frac{21+18abc}{13}$$

即

$$1\geqslant abc$$

此式由条件 $a^2+b^2+c^2=3$ 知成立,原式获证.

49.(2007.02.04)简证:记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc=3,s_3=abc$,则原式等价于

$$s_1^3-3s_1s_2+10s_3\geqslant 10$$

即

$$s_3\geqslant\frac{10-s_1^3+9s_1}{10} \qquad ①$$

下面分两种情况证之.

(1)若 $3\leqslant s_1\leqslant\frac{-3+\sqrt{129}}{2}$ 时(注意到 $s_1\geqslant\sqrt{3s_2}=3$),因为

$$s_1^3-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$$

(见第一章"等价变换法证明不等式" 中例 14)$s_2=3$,所以

$$s_3\geqslant\frac{-s_1^3+12s_1}{9}$$

所以要证式 ①,只要证

$$\frac{-s_1^3+12s_1}{9}\geqslant\frac{10-s_1^3+9s_1}{10}\Leftrightarrow$$

$$s_1^3-39s_1+90\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(s_1-3)(s_1^2+3s_1-30)\leqslant 0 \qquad ②$$

因为

$$3\leqslant s_1\leqslant\frac{-3+\sqrt{129}}{2}$$

$$s_1^2+3s_1-30=\left(s_1-\frac{-3+\sqrt{129}}{2}\right)\left(s_1+\frac{-3+\sqrt{129}}{2}\right)\leqslant 0$$

所以当 $3\leqslant s_1\leqslant\frac{-3+\sqrt{129}}{2}$ 时,式 ② 成立,从而式 ① 成立.

(2) 若 $s_1 > \dfrac{-3+\sqrt{129}}{2}$ 时,因为

$$s_1^2 s_2 + 3s_1 s_3 - 4s_2^2 = \frac{s_2(s_1^3 - 4s_1 s_2 + 9s_3) + 3s_3(s_1^2 - 3s_2)}{s_1} \geqslant 0$$

又

$$s_2 = 3$$

所以

$$s_3 \geqslant \frac{36 - 3s_1^2}{3s_1} = \frac{12 - s_1^2}{s_1} \geqslant 0$$

所以要证式 ①,只要证

$$\frac{12 - s_1^2}{s_1} \geqslant \frac{10 - s_1^3 + 9s_1}{10}$$

即

$$s_1^4 - 19s_1^2 - 10s_1 + 120 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(s_1 - 3)(s_1^3 + 3s_1^2 - 10s_1 - 40) \geqslant 0 \qquad ③$$

因为

$$s_1 > \frac{-3+\sqrt{129}}{2} > 4$$

所以

$$s_1^3 + 3s_1^2 - 10s_1 - 40 = s_1(s_1^2 + 3s_1 - 10) - 40 >$$
$$4 \times (4^2 + 3 \times 4 - 10) - 40 = 32 > 0$$

又

$$s_1 - 3 \geqslant 0$$

所以当 $s_1 > \dfrac{-3+\sqrt{129}}{2}$ 时,式 ③ 成立. 从而式 ① 成立.

综上,原命题获证.

注:对于三个不小于零的数 a,b,c,记 $s_1 = \sum a, s_2 = \sum bc, s_3 = abc$,则有以下常用式子

$$s_1^3 - 4s_1 s_2 + 9s_3 \geqslant 0$$
$$s_1^4 - 5s_1^2 s_2 + 6s_1 s_3 + 4s_2^2 \geqslant 0$$
$$s_1^2 s_2 + 3s_1 s_3 - 4s_2^2 \geqslant 0$$

50. (2007.01.30) 简证:由本章题 55,有

$$\sum bc \geqslant \frac{9\sum a}{6 + \sum a}$$

于是

$$(a+b)(b+c)(c+a) + 7 - 5\sum a = \sum a \cdot \sum bc + 6 - 5\sum a \geqslant$$
$$\sum a \cdot \frac{9\sum a}{6 + \sum a} + 6 - 5\sum a =$$

$$\frac{4(\sum a-3)^2}{6+\sum a}\geqslant 0$$

51.（2007.02.17）简证

$$\sum\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}=\sum\frac{a^3}{(a^2+a^2+b^2)(a^2+c^2+a^2)}\leqslant$$

$$\sum\frac{a^3}{(a^2+ac+ab)^2}=\sum\frac{a}{(a+b+c)^2}=\frac{1}{a+b+c}$$

52.（2007.02.20）简证

$$\sum\frac{1}{a^2+b+c}-1=\sum\frac{1+b+c}{(a^2+b+c)(1+b+c)}-1\leqslant$$

$$\sum\frac{1+b+c}{(a+b+c)^2}-1=\frac{3+2\sum a}{(\sum a)^2}-1=$$

$$\frac{(1+\sum a)(3-\sum a)}{(\sum a)^2}\leqslant 0$$

53.（2007.02.06）简证：原式经去分母化简后等价于

$$-6r^2+(2r^2-8r)\sum a^2+2(r-1)\sum(a^2+b^2)(a^2+c^2)+$$

$$3\prod(b^2+c^2)\geqslant 0$$

注意到 $\sum bc=3$，即

$$-6r^2\cdot(\frac{\sum bc}{3})^3+(2r^2-8r)\sum a^2\cdot(\frac{\sum bc}{3})^2+2(r-1)\cdot$$

$$[\sum a^4\cdot\frac{\sum bc}{3}+6\sum b^2c^2\cdot\frac{\sum bc}{3}]+3\prod(b^2+c^2)\geqslant 0$$

记 $s_1=\sum a, s_2=\sum bc=3, s_3=abc$，则上式经整理得到

$$6(r-1)s_1^4s_2+(2r^2-32r+51)s_1^2s_2^2-(12r-120)s_1s_2s_3-$$

$$(6r^2-46r+84)s_2^3-54s_1^3s_2-27s_3^2\geqslant\Leftrightarrow 0$$

$$6(r-1)s_2(s_1^2-3s_2)^2+(r-1)2r+6)(s_1^2s^22-3s_2^3)+4(r-1)(s_2^3-3s_1s_2s_3)+$$

$$21s_1^2s_2^2-44s_2^3-54s_1^3s_3+108s_1s_2s_3-27s_3^2\geqslant 0$$

由此可知，由于 $r\geqslant 1$，要证原式成立，只需要证

$$21s_1^2s_2^2-44s_2^3-54s_1^3s_3+108s_1s_2s_3-27s_3^2\geqslant 0 \quad ①$$

因为 $$s_1^2\geqslant 3s_2,\ s_2^2\geqslant 3s_1s_2$$

所以 $$(s_1^2-3s_2)(s_2^2-3s_1s_2)\geqslant 0$$

即 $$s_1^2s_2^2\geqslant 3s_2^2+3s_1^3s_3-9s_1s_2s_3$$

因此,要证式①成立,又只需证

$$21(3s_2^2+3s_1^3s_3-9s_1s_2s_3)\geqslant 44s_2^3+54s_1^3s_3-108s_1s_2s_3+27s_3^2$$

即
$$19s_2^3+9s_1^3s_3\geqslant 81s_1s_2s_3+27s_3^2$$

此式易证,事实上,有

$$19s_2^3+9s_1^3s_3-81s_1s_2s_3-27s_3^2\geqslant 54s_1s_2s_3+9s_1^3s_3-81s_1s_2s_3+(s_2^3-27s_3^2)=$$
$$9s_1s_3(s_1^2-3s_2)+(s_2^3-27s_3^2)\geqslant 0$$

54. (2007.03.10) 简证一: 记 $s_1=\sum a, s_2=\sum bc, s_3=abc=1$,则

原式 $\Leftrightarrow \sum\frac{1}{(1+a)^3}-\frac{3}{\prod(1+a)}-[1-\frac{8}{\prod(1+a)}]\geqslant 0\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\sum\frac{1}{1+a}\cdot\sum(\frac{1}{1+b}-\frac{1}{1+c})^2-\frac{\sum a+\sum bc-6}{\prod(1+a)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{3+2\sum a+\sum bc}{2\prod(1+a)}\cdot\sum\frac{(b-c)^2}{(1+b)^2(1+c)^2}-\frac{\sum a+\sum bc-6}{\prod(1+a)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(3+2\sum a+\sum bc)\cdot\sum(1+a)^2(b-c)^2-2\prod(1+a)^2\cdot$$
$$(\sum a+\sum bc-6)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(3+2s_1+s_2)(2s_1^2+2s_2^2-6s_1-6s_2+2s_1s_2-18)-$$
$$2(2+s_1+s_2)^2(s_1+s_2-6)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$s_1^3-s_1^2-7s_1+2s_2^2+2s_2-2s_1s_2-3\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(s_1-s_2)^2+s_1(s_1-3)^2+(s_2-3)(s_2+5)+4(s_1-3)(s_1-1)\geqslant 0$$

由 $s_1=a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}=3$ 知上式成立,故原式成立.

(2007.05.28) 简证二: 设 $x=\frac{1}{1+a}, y=\frac{1}{1+b}, z=\frac{1}{1+c}$,则由 $abc=1$,得到

$$\prod(\frac{1}{x}-1)=1$$

即
$$1-\sum x+\sum yz-2xyz=0$$

记 $s_1=\sum x, s_2=\sum yz, s_3=xyz$,上式可写为

$$1-s_1+s_2-2s_3=0 \quad ①$$

记原式左边减去右边式子为 $f(s_2)$,则

$$f(s_2)=\sum x^3+5xyz-1=s_1^3-3s_1s_2+8s_3-1$$

由式①得 $2s_3=1-s_1+s_2$,代入上式,并整理,得到

$$f(s_2)=s_1^3-(3s_1-4)s_2-4s_1+3 \quad ②$$

另外,由已知条件及式①,易得

$$0 < s_1 - 1 < s_2 \leqslant \frac{s_1^2}{3}$$

又由于

$$f(s_1 - 1) = s_1^3 - (3s_1 - 4)(s_1 - 1) - 4s_1 + 3 = (s_1 - 1)^3 > 0$$

$$f(\frac{s_1^2}{3}) = s_1^3 - (3s_1 - 4)\cdot\frac{s_1^2}{3} - 4s_1 + 3 = \frac{1}{3}(2s_1 - 3)^2 \geqslant 0$$

因此,由一次线性函数性质知

$$f(s_2) \geqslant 0$$

故原式成立,易证当且仅当 $a = b = c = 1$ 时,原式取等号.

注:由证明过程可知,原题条件可放宽为:设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^{-}}$,且 $abc \leqslant 1$,结论仍成立.

55. 简证一:原式等价于

$$6\sum bc + \sum a\cdot\sum bc - 9\sum a \geqslant 0 \qquad ①$$

不妨设 $a \geqslant 1$,由 $abc = 1$,有

$$6\sum bc + \sum a\cdot\sum bc - 9\sum a = 6bc + 6a(b + c) + a(b^2 + c^2) + a^2(b + c) + bc(b + c) + 3abc - 9a - 9(b + c) = \frac{6}{a} + (b + c)(6a + a^2 - \frac{1}{a} - 9) + a(b + c)^2 - 9a + 1$$

下面我们证明

$$\frac{6}{a} + (b + c)(6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9) + a(b + c)^2 - 9a + 1 \geqslant \frac{6}{a} + 2\cdot\sqrt{bc}(6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9) + 4abc - 9a + 1 \qquad ②$$

式②左边 - 右边 $= (6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9)(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + a(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 =$

$$[6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9 + a(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2](\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 \geqslant (6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9 + 4a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}})(\sqrt{b} - \sqrt{c})^2$$

而 $$6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9 + 4a\cdot\sqrt{\frac{1}{a}} \geqslant 6 + 1 + 1 + 4 - 9 > 0$$

所以式②成立,即

$$6\sum bc + \sum a\cdot\sum bc - 9\sum a \geqslant \frac{6}{a} + 2\sqrt{bc}(6a + a^2 + \frac{1}{a} - 9) +$$

$$4abc-9a+1=\frac{6}{a}+$$
$$2\sqrt{\frac{1}{a}}(6a+a^2+\frac{1}{a}-9)-9a+5 \quad ③$$

令$\sqrt{a}=x$，则$x\geqslant 1$，于是

$$\frac{6}{a}+2\sqrt{\frac{1}{a}}(6a+a^2+\frac{1}{a}-9)-9a+5=$$
$$\frac{6}{x^2}+\frac{2}{x}(6x^2+x^4+\frac{1}{x^2}-9)-9x^2+5=$$
$$\frac{1}{x^3}(2x^6-9x^5+12x^4+5x^3-18x^2+6x+2)=$$
$$\frac{(x-1)^2}{x^3}(2x^4-5x^3+10x+2)$$

易证当$x\geqslant 1$时，$2x^4-5x^3+10x+2\geqslant 0$，下面用初等方法证之，即

$$2x^4-5x^3+10x+2=x^4-5x^3+\frac{25}{4}x^2+(x^4-\frac{25}{4}x^2+10x+2)\geqslant$$
$$(x^2-\frac{5}{2}x)^2+x^4-\frac{25}{4}x^2+12=$$
$$(x^2-\frac{5}{2}x)^2+(x^2-\frac{25}{8})^2+\frac{143}{64}>0$$

于是，由式 ③ 即知式 ① 成立.

(2007.01.27) 简证二：记$s_1=a+b+c$，$s_2=bc+ca+ab$，$s_3=abc=1$，则

$$s_2^3-4s_1s_2s_3+9s_3^2\geqslant 0$$

(见第一章"等价变换法证明不等式"中例 14) 由此有

$$\frac{1}{s_1}\geqslant\frac{4s_2}{s_2^3+9}$$

因此，只要证

$$\frac{8s_2}{s_2^3+9}+\frac{1}{3}\geqslant\frac{3}{s_2}\Leftrightarrow s_2^4-9s_2^3+24s_2^2+9s_2-81\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(s_2-3)[(s_2-3)^3+3(s_2^2-7s_2+18)]\geqslant 0$$

(注意到$s_2\geqslant 3$) 即证得原式.

注：(1) 由以上证明可以看出，若$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且$abc=1$，则必存在最大正数$u$，使$\sum bc\geqslant\dfrac{(3+u)\sum a}{u+\sum a}$成立.

(2) 若$a,b,c\in\overline{\mathbf{R}^-}$，且$abc=1$，则有

$$\frac{9\sum a}{6+\sum a} \leqslant \sum bc \leqslant \frac{(\sum a)^3+9}{4\sum a}$$

56. (2007.01.28) 简证

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}=$$
$$2(1+abc)+\sqrt{2[(\sum bc-1)^2+(\sum a-abc)^2]} \geqslant$$
$$2(1+abc)+\sum bc-1+\sum a-abc=$$
$$1+\sum a+\sum bc+abc=$$
$$(1+a)(1+b)(1+c)$$

57. (2007.01.29) 简证:我们将证明其更强式

$$\sum \frac{a(b+c)}{a^2+bc} \geqslant 2+\frac{8a^2b^2c^2}{\prod(a^2+bc)} \quad ①$$

当 a,b,c 有一个为零时,不妨设 $c=0$,式 ① 变为

$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b} \geqslant 2$$

显然成立.

当 a,b,c 都不为零时,令 $\frac{b}{a}=x,\frac{c}{b}=y,\frac{a}{c}=z,x,y,z \in \overline{\mathbf{R}^-},xyz=1$,则式 ① 变为

$$\sum \frac{1+yz}{y+z} \geqslant 2+\frac{8}{\prod(y+z)} \Leftrightarrow \quad ②$$
$$\sum(1+yz)(x+y)(x+z) \geqslant 2\prod(y+z)+8 \Leftrightarrow$$
$$\sum x^2+3\sum yz+\sum x+(\sum yz)^2 \geqslant 2\sum x \cdot \sum yz+6 \Leftrightarrow$$
$$(\sum x)^2+(\sum yz)^2+\sum(yz+x) \geqslant 2\sum x \cdot \sum yz+6 \quad ③$$

因为 $$xyz=1$$

所以 $$\sum(yz+x) \geqslant 6$$

又 $$(\sum x)^2+(\sum yz)^2 \geqslant 2\sum x \cdot \sum yz$$

所以式 ③ 成立,即式 ② 成立,式 ① 获证.

58. (2007.02.20) 简证

$$\sum \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}=\sum \frac{a(b+c)}{\sqrt{(ab+ac)(a^2+bc)}} \geqslant \sum \frac{2a(b+c)}{ab+ac+a^2+bc}=$$
$$\sum \frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}=\frac{2\sum a(b+c)^2}{(a+b)(b+c)(a+c)}=$$

$$\frac{2(a+b)(b+c)(a+c)+8abc}{(a+b)(b+c)(a+c)} \geqslant 2$$

注:本题解决关键在于分子有理化. 从上证明中可得到更强式

$$\sum \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} \geqslant 2+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$$

当且仅当 $a=b=c$ 或 a,b,c 中有一个为零,另外两个相等时取等号.

59. (2007.02.05) 简证: 由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则

$$\text{原式左边}-\text{右边}=\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(a^2+bc)}-\frac{(a-b)(b-c)}{(c+a)(b^2+ca)}+\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(c^2+ab)}=$$

$$\frac{(a-b)[(a^2-c^2)(b^2+ca)-(b^2-c^2)(a^2+bc)]}{(b+c)(c+a)(a^2+bc)(b^2+ca)}+$$

$$\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(c^2+ab)}=$$

$$\frac{(a-b)^2[c^2(a+b)+c(a^2+ab+b^2)-c^3]}{(b+c)(c+a)(a^2+bc)(b^2+ca)}+$$

$$\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(c^2+ab)} \geqslant 0$$

60. (2007.02.09) 简证: 由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则

$$\sum \frac{1}{b+c}-\sum \frac{2a}{3a^2+bc}=\sum \frac{(a-b)(a-c)+a(a-b)+a(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}=$$

$$\left[\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}-\frac{(a-b)(b-c)}{(c+a)(3b^2+ac)}\right]+$$

$$\left[\frac{a(a-b)}{(b+c)(3a^2+bc)}-\frac{b(a-b)}{(c+a)(3b^2+ac)}\right]+$$

$$\left[\frac{b(b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}-\frac{c(b-c)}{(a+b)(3c^2+ab)}\right]+$$

$$\left[\frac{a(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}-\frac{c(a-c)}{(a+b)(3c^2+ab)}\right]+$$

$$\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(3c^2+ab)}=$$

$$\frac{c(a-b)^2(a^2+ab+b^2+3ac+3bc-c^2)}{(b+c)(c+a)(3a^2+bc)(3b^2+ac)}+$$

$$\frac{c(a-b)^3+c^2(a^2-b^2)}{(b+c)(c+a)(3a^2+bc)(3b^2+ac)}+$$

$$\frac{a(b-c)^3+a^2(b^2-c^2)}{(c+a)(a+b)(3b^2+ac)(3c^2+ab)}+$$

$$\frac{b(a-c)^3+b^2(a^2-c^2)}{(b+c)(a+b)(3a^2+bc)(3c^2+ab)}+$$

$$\frac{(a-c)(b-c)}{(a+b)(3c^2+ab)} \geqslant 0$$

61. (2007.01.23) 简证

$$5\sum a+\frac{3}{abc}=\sum a+\sum a+\sum a+\sum a+\sum a+\frac{\sum a^2}{abc} \geqslant$$

$$6\cdot\sqrt[6]{\frac{(\sum a)^5\cdot\sum a^2}{abc}}$$

于是,只要证

$$6\cdot\sqrt[6]{\frac{(\sum a)^5\cdot\sum a^2}{abc}} \geqslant 18$$

又由于 $\sum a^2=3$,因此,又只需要证

$$\frac{(\sum a)^5\cdot\sum a^2}{abc} \geqslant 81\cdot(\sum a^2)^2$$

即

$$(\sum a)^5 \geqslant 81abc\cdot\sum a^2$$

此式由 Chapter 1 中题 3 已解决.

62. (2007.01.24) 简证: 注意到 $a+b+c=3$,将原式去分母化简后得其等价式

$$36-16\sum bc+13abc-a^2b^2c^2 \geqslant 0$$

因为

$$a+b+c=3$$

所以 a,b,c 中必有一数不大于 1. 不妨设 $0 \leqslant a \leqslant 1$,则

$$36-16\sum bc+13abc-a^2b^2c^2=36-(16-13a)bc-16a(3-a)-a^2(bc)^2 \geqslant$$

$$36-48a+16a^2-(16-13a)(\frac{b+c}{2})^2-a^2(\frac{b+c}{2})^4=$$

$$36-48a+16a^2-(16-13a)\frac{(3-a)^2}{4}-\frac{a^2(3-a)^4}{16}=$$

$$\frac{a}{16}(84-201a+160a^2-54a^3+12a^4-a^5)=$$

$$\frac{a}{16}(1-a)^2(84-33a+10a^2-a^3) \geqslant 0$$

(注意到 $0 \leqslant a \leqslant 1$).

本题也可以先齐次化后证明.

63. (2007.01.30) 简证:因为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant n,\ n \geqslant \sum_{i=1}^{n}(2-a_i)$$

又因为 $$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \geqslant n^2 \quad n \geqslant 4$$

所以

$$\sum (2-a_1)^2 \geqslant n^2 - 4n + 4\sum_{i=1}^{n}(2-a_i) \geqslant n \cdot \sum_{i=1}^{n}(2-a_i) \qquad ①$$

若 $2-a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 均为正,则

$$\sum_{i=1}^{n}(2-a_i)^2 < [\sum_{i=1}^{n}(2-a_i)]^2 \leqslant n \cdot \sum_{i=1}^{n}(2-a_i) \qquad ②$$

式①与②矛盾,故 $2-a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不可能均为正,即

$$\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\} \geqslant 2$$

64. (2007.01.28) 简证:不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则易证

$$(a+c)(a-c)^2 \geqslant (b+c)(b-c)^2$$

于是

$$\sum \frac{a}{b+c} - \frac{13}{6} + \frac{2\sum bc}{3\sum a^2} = (\sum \frac{a}{b+c} - \frac{3}{2}) - \frac{2}{3}(1 - \frac{\sum bc}{\sum a^2}) =$$

$$\frac{\sum (b+c)(b-c)^2}{2\prod (b+c)} - \frac{\sum (b-c)^2}{3\sum a^2} =$$

$$\frac{\sum (a^2+3b^2+3c^2-2\sum bc)(b+c)(b-c)^2}{6\prod (b+c) \cdot \sum a^2}$$

因此,只需证

$$\sum (a^2+3b^2+3c^2-2\sum bc)(b+c)(b-c)^2 \geqslant 0$$

因为

$$c^2+3a^2+3b^2-2\sum bc \geqslant 2\sum a^2 - 2\sum bc \geqslant 0$$

$$b^2+3c^2+3a^2-2\sum bc \geqslant 2\sum a^2 - 2\sum bc \geqslant 0$$

又 $$(a+c)(a-c)^2 \geqslant (b+c)(b-c)^2$$

所以

$$\sum (a^2+3b^2+3c^2-2\sum bc)(b+c)(b-c)^2 \geqslant$$

$$(a^2+3b^2+3c^2-2\sum bc+b^2+3c^2+3a^2-2\sum bc)(b+c)(b-c)^2 =$$

$$(4a^2+4b^2+6c^2-4\sum bc)(b+c)(b-c)^2 \geqslant 0$$

65. (2007.01.23) 简证一

原式左边 - 右边 $= \frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2} - a + \frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2} - b + \frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2} - c =$

$$\frac{ab(a-b)+ac(a-c)}{b^2+c^2}+\frac{bc(b-c)+ba(b-a)}{c^2+a^2}+$$

$$\frac{ca(c-a)+cb(c-b)}{a^2+b^2}=$$

$$ab(a-b)\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{c^2+a^2}\right)+$$

$$bc(b-c)\left(\frac{1}{c^2+a^2}-\frac{1}{a^2+b^2}\right)+$$

$$ac(a-c)\left(\frac{1}{b^2+c^2}-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=$$

$$\sum\frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geqslant 0$$

(2007.01.25) 简证二

$$原式\Leftrightarrow\sum\left[\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+b+c\right]\geqslant 3\sum a\Leftrightarrow$$

$$\sum a^2\cdot\sum\frac{b+c}{b^2+c^2}\geqslant 3\sum a\Leftrightarrow$$

$$\sum\left(\frac{b+c}{b^2+c^2}-\frac{b+c}{2bc}\right)\geqslant\frac{3\sum a}{\sum a^2}-\sum\frac{b+c}{2bc}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sum bc}{abc}-\frac{3\sum a}{\sum a^2}\geqslant\sum\frac{(b+c)(b-c)^2}{2bc(b^2+c^2)}\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{(b+1)(b-c)^2}{bc\sum a^2}\geqslant\sum\frac{(b+c)(b-c)^2}{2bc(b^2+c^2)}\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{a(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{b^2+c^2}(b-c)^2\geqslant 0\qquad①$$

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $a^2-b^2+c^2\geqslant 0,a^2+b^2-c^2\geqslant 0$,且可证得

$$\frac{b(a+c)(a-c)^2}{a^2+c^2}\geqslant\frac{a(b+c)(b-c)^2}{b^2+c^2}\qquad②$$

$$式②\Leftrightarrow b(a+c)-\frac{2abc(a+c)}{a^2+c^2}\geqslant a(b+c)-\frac{2abc(b+c)}{b^2+c^2}\Leftrightarrow$$

$$2abc\left(\frac{b+c}{b^2+c^2}-\frac{a+c}{a^2+c^2}\right)\geqslant c(a-b)\Leftrightarrow$$

$$2ab\cdot\frac{ab+ac+bc-c^2}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}(a-b)\geqslant(a-b)$$

因为 $bc\geqslant c^2,\ a-b\geqslant 0$

所以只需证

$$2ab(ab+ac) \geqslant (a^2+c^2)(b^2+c^2)$$

即
$$2a^2(b^2+bc) \geqslant (a^2+c^2)(b^2+c^2)$$

此式显然成立,故式 ② 成立. 于是

$$\sum \frac{a(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{b^2+c^2}(b-c)^2 \geqslant$$
$$\frac{a(b+c)(-a^2+b^2+c^2)}{b^2+c^2}(b-c)^2 +$$
$$\frac{b(a+c)(a^2-b^2+c^2)}{a^2+c^2}(a-c)^2 \geqslant$$
$$\frac{a(b+c)(b-c)^2}{b^2+c^2}(-a^2+b^2+c^2+a^2-b^2+c^2) =$$
$$\frac{ac^2(b+c)(b-c)^2}{b^2+c^2} \geqslant 0$$

因此,式 ① 成立,从而原命题获证.

66. (2007.01.31) 简证

$$\prod(b+c)^2 - 4\prod(a^2+bc) = [(a+b)c^2+(a+b)^2c+ab(a+b)]^2 -$$
$$[4abc^4+4(a^3+b^3)c^3+8a^2b^2c^2+4ab(a^3+b^3)c+4a^3b^3] =$$
$$(a-b)^2c^4+2(a+b)[2ab-(a-b)^2]c^3+[(a+b)^4+2ab(a-b)^2]c^2 +$$
$$2ab(a+b)[2ab-(a-b)^2]c+a^2b^2(a-b)^2 =$$
$$[c^2-(a+b)c+ab]^2(a-b)^2+4ab(a+b)c^3+4ab(a+b)^2c^2 +$$
$$4a^2b^2(a+b)c \geqslant 0$$

Chapter 8

Final problem set

1. (2007.02.28) 简证: $\sum \sqrt{\frac{a+b}{b+1}} \geqslant 3\sqrt[6]{\frac{\prod(a+b)}{\prod(b+1)}}$,易证$\prod(b+c) \geqslant \prod(b+1)$,事实上有

$$\prod(b+c) - \prod(b+1) = (\sum a-3)(\sum bc-1)+2(\sum bc-3) \geqslant 0$$

故原式成立.

2. (2007.03.27) 简证: 令 $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}$, $x,y,z \in \mathbf{R}^+$,则原式等价

于

$$\sum \frac{y}{\sqrt{zx+3xy}} \geqslant \frac{3}{2} \tag{①}$$

由柯西不等式有

$$\sum y\sqrt{zx+3xy} \cdot \sum \frac{y}{\sqrt{zx+3xy}} \geqslant \left(\sum x\right)^2 \tag{②}$$

又

$$\begin{aligned}\sum y\sqrt{zx+3xy} &\leqslant \sqrt{\sum x \cdot (xyz+3xy^2)} = \\ &\sqrt{3(x+y+z)(x^2y+y^2z+z^2x+xyz)} \leqslant \\ &\sqrt{3(x+y+z)\cdot\frac{4}{27}(x+y+z)^3} = \\ &\frac{2}{3}(x+y+z)^2\end{aligned} \tag{③}$$

(据第三章"放缩法证明不等式"中例5,由②、③式即得式①).

3. (2007.03.30)简证:记 $s_1=a+b+c=3, s_2=bc+ca+ab, s_3=abc$,则

$$\begin{aligned}\sum \frac{5-3bc}{1+a} - \sum bc &= \frac{45-7s_2-3s_2^2+27s_3}{4+s_2+s_3} - s_1 = \\ &\frac{45-11s_2-4s_2^2-s_2s_3+27s_3}{4+s_2+s_3}\end{aligned}$$

因此,只要证

$$45-11s_2-4s_2^2-s_2s_3+27s_3 \geqslant 0 \tag{①}$$

将式①齐次化得等价式

$$5s_1^5-11s_1^3s_2-36s_1s_2^2-27s_2s_3+81s_1^2s_3 \geqslant 0 \tag{②}$$

因为
$$(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)(s_1^2-3s_2) \geqslant 0$$

即
$$s_1^5-7s_1^3s_2+12s_1s_2^2-27s_2s_3+9s_1^2s_3 \geqslant 0$$

所以

$$\begin{aligned}\text{式②左边} &= 5(s_1^5-7s_1^3s_2+12s_1s_2^2-27s_2s_3+9s_1^2s_3) + \\ &24s_2(s_1^3-4s_1s_2+9s_3) + 36s_3(s_1^2-3s_2) \geqslant 0\end{aligned}$$

从而原式成立.

4. (2007.02.29)简证:记 $a^2=x, b^2=y, c^2=z, d^2=w$,于是原式变为去证明

$$\sum (yzw)^{\frac{3}{2}} \leqslant 4 \tag{①}$$

其中,$x,y,z,w \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x+y+z+w=4$.

下面证明式①.

$$16\sum(yzw)^{\frac{3}{2}}=16\sum(yzw\cdot y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}})\leqslant\sum yzw(y+z+w+1)^2=$$
$$\sum yzw(5-x)^2=25\sum yzw-40xyzw+xyzw\cdot\sum x=$$
$$25\sum yzw-36xyzw$$

因此,要证式①,只需证

$$64\geqslant 25\sum yzw-36xyzw$$

注意到 $x+y+z+w=4$,将上式齐次化,得

$$(\sum x)^4-25\sum x\cdot\sum yzw+144xyzw\geqslant 0 \qquad ②$$

即证式②成立.

现应用增量比较法证明式②.为此,设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant w$,且

$$x=w+\alpha+\beta+\gamma,y=w+\alpha+\beta,z=w+\alpha\quad \alpha,\beta,\gamma\in\overline{\mathbf{R}^-}$$

则

$$(\sum x)^4-25\sum x\cdot\sum yzw+144xyzw=$$
$$[4w+(3\alpha+2\beta+\gamma)]^4-25[4w+(3\alpha+2\beta+\gamma)]\cdot[4w^3+3(3\alpha+2\beta+\gamma)w^2+$$
$$2(3\alpha^2+4\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta^2)w+(\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta^2)]+$$
$$144[w^4+(3\alpha+2\beta+\gamma)w^3+(3\alpha^2+4\alpha\beta+2\alpha\gamma+\beta\gamma+\beta^2)w^2+$$
$$(\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2)w]=$$
$$(21\alpha^2+28\alpha\beta+14\alpha\gamma+28\beta\gamma+28\beta^2)w^2+w(13\alpha^3+26\alpha^2\beta+13\alpha^2\gamma+$$
$$35\alpha\beta\gamma+35\alpha\beta^2+22\alpha\gamma^2+21\beta^2\gamma+23\beta\gamma^2+14\beta^3+8\gamma^3)w+2\alpha^3+$$
$$4\alpha^2\beta+2\alpha^2\gamma+11\alpha\beta\gamma+11\alpha\beta^2+9\alpha\gamma^2+(2\beta+\gamma)^3\geqslant 0$$

故式②成立,从而式①成立,原命题获证.

式②另一证法:由以下四个基本不等式

$$s_1^4-4s_1^2s_2+9s_1s_3-16s_4\geqslant 0$$
$$s_1^2s_2-4s_2^2+3s_1s_3\geqslant 0$$
$$s_2^2-3s_1s_3+12s_4\geqslant 0$$
$$s_1s_3-16s_4\geqslant 0$$

(参见《中学数学教学》(安徽),2007 年第 2 期,杨学枝文:“从一道不等式谈起”)可得

$$s_1^4-25s_1s_3+144s_4=(s_1^4-4s_1^2s_2+9s_1s_3-16s_4)+4(s_1^2s_2-4s_2^2+3s_1s_3)+$$
$$16(s_2^2-3s_1s_3+12s_4)+2(s_1s_3-16s_4)\geqslant 0$$

这里

$$s_1=x+y+z+w$$
$$s_2=xy+xz+xw+yz+yw+zw$$

$$s_3 = yzw + xzw + xyw + xyz$$

$$s_4 = xyzw$$

注:同以上证法类似可得下面的命题.

命题:设 $a,b,c,d \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $\sum a^3 = 4$. 求证

$$\sum (bcd)^4 \leqslant 4 \quad ③$$

其中,$x,y,z,w \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x+y+z+w=1$.

简证:令 $a^3 = x, b^3 = y, c^3 = z, d^3 = w$,则 $\sum x = 4$,上式变为去证明

$$3\sum (yzw)^{\frac{4}{3}} = 3\sum (yzw \cdot y^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}w^{\frac{1}{3}}) \leqslant \sum yzw(y+z+w) =$$

$$\sum yzw(4-x) = 4\sum yzw - 4xyzw$$

由此可知,要证式③,只要证

$$\sum yzw - xyzw \leqslant 3$$

注意到 $x+y+z+w=4$,将上式齐次化得

$$3(\sum x)^4 - 64\sum x \cdot \sum yzw + 256xyzw \geqslant 0 \quad ④$$

由以上式②及 $\sum x \cdot \sum yzw \geqslant 16xyzw$,即得式④.

以上证法可以进一步将上述两个命题推广,但需用到下面的猜想.

猜想:设 $x_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n$,记

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, s_{n-1} = x_2x_3\cdots x_n + x_1x_3\cdots x_n + \cdots + x_1x_2\cdots x_{n-1}, s_n = x_1x_2\cdots x_n$$

则 $$s_1^n - (n-1)^{n-1}s_1s_{n-1} + n^2[(n-1)^{n-1} - n^{n-2}]s_n \geqslant 0$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号.

5. (2007.03.27) 简证:原命题经等价变换后得到

$$\sum \frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{4}\cdot\frac{b}{a}}} \leqslant 2$$

令 $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}, x,y,z \in \mathbf{R}^+$,且 $xyz = 1$,则上式又等价于

$$\sum \frac{1}{\sqrt{1+\frac{5}{4}x}} \leqslant 2$$

此式证明可参见《不等式研究通讯》,2003 年第 3 期(总 36 期),杨学枝文:“对一道不等式问题的解答与研究 —— 谈“做数学”的初浅体会”;还可参见《中学数学研究》(江西),2006 年第 2 期,蒋明斌文:“一道西部数学奥林匹克赛题的溯源与推广”.

6. (2006.08.30) 简证：分别见第七章"其他不等式证明例子" 例 33 中的 (47)、(48) 两式.

7. (2007.08.28, 摘译自原书) 简证：记 $b=\frac{1}{n}\sum b_1, x_i=2b-b_i, i=1, 2,\cdots,n$, 则原不等式等价于

$$\sqrt{\sum a_1^2\cdot\sum b_1^2}\geqslant\sum a_1(2b-b_1) \qquad ①$$

又由于

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}(2b-b_i)^2=4b^2-4b\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

因此 $$\sqrt{\sum a_1^2\cdot\sum b_1^2}=\sqrt{\sum a_1^2\cdot\sum x_1^2}\geqslant\sum a_1(2b-b_1)$$

即得式 ①. 当且仅当 $\frac{2b-b_1}{a_1}=\frac{2b-b_2}{a_2}=\cdots=\frac{2b-b_n}{a_n}\geqslant 0$ 时取等号.

8. (2007.08.29, 摘译自原书) 简证：(a) 我们只需证

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{2k})^2\geqslant 4k(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_ka_{2k})$$

设 $x\in\mathbf{R}$, 且 $a_k\leqslant x\leqslant a_{k+1}$, 我们有

$$(x-a_1)(a_{k+1}-x)+(x-a_2)(a_{k+2}-x)+\cdots+(x-a_k)(a_{2k}-x)\geqslant 0$$

上式可变为

$$4kx(a_1+a_2+\cdots+a_{2k})\geqslant 4k^2x^2+4k(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_ka_{2k})$$

由原不等式, 从而只需证明

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{2k})^2\geqslant 4kx(a_1+a_2+\cdots+a_{2k})-4k^2x^2$$

等价于

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{2k}-2kx)^2\geqslant 0$$

上式取等号条件为

$$a_{j+1}=a_{j+2}=\cdots=a_{j+k}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2k}}{2k}$$

这里 $(j\in\{1,2,\cdots,k-1\})$.

(b) 我们只需证

$$(a_1+a_2+\cdots+a_{4k})^2\geqslant 4k(a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\cdots+a_{4k}a_k)$$

上式等同于

$$(b_1+b_2+\cdots+b_{2k})^2\geqslant 4k(b_1b_{k+1}+b_2b_{k+2}+\cdots+b_kb_{2k})$$

$(b_i=a_i+a_{2k+i}, 1\leqslant i\leqslant 2k)$ 又

$$b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_{2k}$$

由 (a) 的结论知道, 上式成立, 且取等号条件为

$$\begin{cases}a_{j+1}=a_{j+2}=\cdots=a_{j+k}=a\\a_{j+2k+1}=a_{j+2k+2}=\cdots=a_{j+3k}=b\\a_1+a_2+\cdots+a_{4k}=2k(a+b)\end{cases}$$

这里 $a,b\in\mathbf{R},a\leqslant b$,且 $j\in\{1,2,\cdots,k-2\}$.

9.（2007.02.25）简证：见第三章“放缩法证明不等式”中例16.

10.（2007.02.03）简证:因为

$$9(1+a^4)^3-8(1+a^3+a^6)^2=1-16a^3+27a^4-24a^6+27a^8-16a^9+a^{12}=$$
$$(1-a)^4(1+4a+10a^2+4a^3-2a^4+4a^5+10a^6+4a^7+a^8)\geqslant 0$$

所以
$$9(1+a^4)^3\geqslant 8(1+a^3+a^6)^2$$

同理有
$$9(1+b^4)^3\geqslant 8(1+b^3+b^6)^2$$
$$9(1+c^4)^3\geqslant 8(1+c^3+c^6)^2$$

将以上三式左右两边分别相乘,并应用赫尔德不等式,即得

$$9^3[(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)]^3\geqslant 8^3[(1+a^3+a^6)(1+b^3+b^6)(1+c^3+c^6)]^2\geqslant 8^3\cdot(1+abc+a^2b^2c^2)^6$$

由此即得原式.

注:$9(1+a^4)^3\geqslant 8(1+a^3+a^6)^2(a\geqslant 0)$.

11.（2007.02.03）简证：见第七章“其他不等式证明例子”中例6.

12.（2007.02.25）简证一：在平面上取点 P,从 P 出发作线段 $PA=a$, $PB=b$, $PC=c$,且射线 PA 到 PB,PB 到 PC,PC 到 PA 的角均等于120°,连 A,B,C 得 $\triangle ABC$,记 $BC=a'$,$CA=b'$,$AB=c'$,则原式等价于

$$(\sum PA)^2\cdot\sum\frac{1}{a'^2}\geqslant 9$$

因为
$$(\sum PA)^2\geqslant 2\sum b'c'-\sum a'^2$$

（见刘健,Bottema 不等式的推广及应用,《福建中学数学》,1994 年第 1 期,8－10）所以又只需证

$$(2\sum b'c'-\sum a'^2)\cdot\sum\frac{1}{a'^2}\geqslant 9$$

此式为已知不等式.

简证二：记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc$,则有

$$a^2+ab+b^2=s_1^2-s_2-s_1c$$

等,于是原式可写成

$$\sum\frac{1}{s_1^2-s_2-s_1c}\geqslant\frac{9}{s_1^2}\Leftrightarrow$$

$$s_1^6-3s_1^4s_2+9s_1^3s_3-6s_1^2s_2^2+9s_2^3\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$s_2(s_1^2-3s_2)^2+s_1^3(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)\geqslant 0$$

由第一章“等价变换法证明不等式”中例 14 知上式成立.

13. (2007.03.30) 简证：参见第一章“等价变换法证明不等式”中例 22.

14. (2007.04.06) 简证

$$\sum\frac{2a^n-b^n-c^n}{b^2-bc+c^2}=\sum\frac{(a^n-b^n)-(c^n-a^n)}{b^2-bc+c^2}=$$
$$\sum(\frac{1}{b^2-bc+c^2}-\frac{1}{c^2-ca+a^2})(a^n-b^n)=$$
$$\sum\frac{(a+b-c)(a-b)(a^n-b^n)}{(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\sum(a+b-c)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^n-b^n)\geqslant 0 \qquad ①$$

由对称性，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，则 $a-c\geqslant b-c, a^n-c^n\geqslant b^n-c^n, (a-b)\cdot(a^n-b^n)\geqslant 0, (b-c)(b^n-c^n)\geqslant 0, (a-c)(a^n-c^n)\geqslant 0$，因此，有

$$\sum(a+b-c)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^n-b^n)\geqslant$$
$$(b+c-a)(b^2-bc+c^2)(b-c)(b^n-c^n)+$$
$$(c+a-b)(c^2-ca+a^2)(a-c)(a^n-c^n)\geqslant$$
$$[(b+c-a)(b^2-bc+c^2)+(c+a-b)(c^2-ca+a^2)](b-c)(b^n-c^n)\geqslant$$
$$[(b-a)(b^2-bc+c^2)+(a-b)(c^2-ca+a^2)](b-c)(b^n-c^n)\geqslant$$
$$[(c^2-ca+a^2)-(b^2-bc+c^2)](a-b)(b-c)(b^n-c^n)=$$
$$(a+b-c)(a-b)^2(b-c)(b^n-c^n)\geqslant$$
$$0$$

15. (2007.08.29，摘译自原书) 简证：首先我们将证明当 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\{a,b\}$ 时，左边的式子是最大的. 为了证明这一结论，把 $a_2,\cdots,a_n$ 看成是固定的，运用反证法，若

$$f(a_1)=a_1+a_2+\cdots+a_n-n\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

是最大值且 $a<a_1<b$；由于 $f(a_1)>f(a)$ 和 $f(a_1)>f(b)$. 设 $x_i=\sqrt[n]{a_i}$（对于所有的 i），并且设 $c=\sqrt[n]{a}, d=\sqrt[n]{b}(c<x_1<d)$，从

$$f(a_1)-f(a)=x_1^n-c^n-n(x_1-c)x_2\cdots x_n=$$
$$(x_1-c)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}c+\cdots+c^{n-1}-nx_2\cdots x_n)>0$$

我们得到

$$x_1^{n-1}+x_1^{n-2}c+\cdots+c^{n-1}>nx_2\cdots x_n \qquad ①$$

类似地，从

$$f(a_1)-f(b)=x_1^n-d^n-n(x_1-d)x_2\cdots x_n=$$

$$(x_1-d)(x_1^{n-1}+x_1^{n-2}d+\cdots+d^{n-1}-nx_2\cdots x_n)>0$$

我们得到

$$nx_2\cdots x_n>x_1^{n-1}+x_1^{n-2}d+\cdots+d^{n-1} \quad ②$$

式①+②得到

$$x_1^{n-1}+x_1^{n-2}c+\cdots+c^{n-1}>x_1^{n-1}+x_1^{n-2}d+\cdots+d^{n-1}$$

显然这是不成立的,所以能够充分认为当 $a_1,a_2,\cdots,a_n\in\{a,b\}$ 时,左边的式子是最大的,故只需考虑 $a_1=\cdots=a_k=a$ 和 $a_{k+1}=\cdots=a_n=b$,这里 $k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$. 原式归纳为

$$(n-k-1)a+(k-1)b+na^{\frac{k}{n}}b^{\frac{n-k}{n}}\geqslant(2n-2)\sqrt{ab}$$

这个立即可由算术-几何平均值不等式得出.

当 $n\geqslant3$,等号成立条件是当且仅当 $a=0$ 时,其中有一个 a_i 等于0,并且其他 a_i 等于 b.

注:这个不等式是 USA 2000 年 IMO 选拔赛的试题的推广.

当 a,b,c 为正数时,有

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\leqslant3\max\{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2,(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2\}$$

16. (2007.02.01) 简证:参见第一章"等价变换法证明不等式"中例23.

17. (2007.03.30) 简证:经去分母整理,即证明

$$3(ax^2+by^2+cz^2)+(a^2x+b^2y+c^2z)\geqslant12abc \quad ①$$

由上题(16题)有

$$3(ax^2+by^2+cz^2)+3xyz\geqslant12abc \quad ②$$

又由 Chapter 1 中题15的证明知,有

$$a^2x+b^2y+c^2z\geqslant3xyz \quad ③$$

式②+③即得式①.

18. (2007.02.26) 简证:由于 $(\sum\frac{a}{b})\cdot\sum ab\geqslant(\sum a)^2$,因此,只需证

$$\frac{(\sum a)^2}{\sum bc}\geqslant\frac{9}{\sum a}$$

即

$$(\sum a)^3\geqslant9\sum bc \quad (※)$$

而

$$(\sum a)^6-27(\sum bc)^2\sum a^2=$$

$$(\sum a)^6-27(\sum bc)^2[(\sum a)^2-2\sum bc]=$$

$$(\sum a)^6-27(\sum a)^2(\sum bc)^2+54(\sum bc)^3=$$

$$[(\sum a)^2-3\sum bc]^2[(\sum a)^2+6\sum bc]\geqslant 0$$

故式(※)成立,原式获证.

19.（2007.08.28,摘译自原书）简证：由于

$$\frac{1}{n}\sum\frac{1}{a_1}\geqslant\sqrt[n-1]{\frac{\sum\frac{1}{a_1a_2\cdots a_{n-1}}}{n}}=\sqrt[n-1]{\frac{\sum a_1}{n}}$$

并记

$$\sqrt[n-1]{\frac{\sum a_1}{n}}=a$$

因此,只需要证

$$na+\frac{4}{1+a^{n-1}}\geqslant n+2\Leftrightarrow$$

$$(a-1)[n(a^n+1)-2(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)]\geqslant 0 \qquad ①$$

因为

$$a=\sqrt[n-1]{\frac{\sum a_1}{n}}\geqslant 1$$

又

$$n(a^n+1)-2(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)=\sum_{i=0}^{n-1}(a^{n-1}+1-a^{n+i-1}a^i)=$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}(a^i-1)(a^{n-i-1}-1)\geqslant 0$$

故式①成立,原式获证.

20.（2007.08.28,摘译自原书）简证：设 $a=\frac{1}{n}\sum a_1$,则由 $a_1a_2\cdots a_n=1$ 知 $a\geqslant 1$,且

$$a=\frac{\sum a_1}{n}\geqslant\sqrt[n-1]{\frac{\sum a_1a_2\cdots a_{n-1}}{n}}=\sqrt[n-1]{\frac{\sum\frac{1}{a_1}}{n}}$$

即

$$\sum\frac{1}{a_1}\leqslant na^{n-1}$$

因此,要证原式成立,只要证

$$na-n+1\geqslant\sqrt[n-1]{na^{n-1}-n+1}\Leftrightarrow$$

$$[1+(n-1)(1-\frac{1}{a})]^{n-1}\geqslant n-\frac{n-1}{a^{n-1}}$$

又由贝努利不等式知,只需证

$$1+(n-1)^2(1-\frac{1}{a})\geqslant n-\frac{n-1}{a^{n-1}}\Leftrightarrow$$

$$(n-1)[(n-1)(1-\frac{1}{a})-(1-\frac{1}{a^{n-1}})]\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(n-1)(1-\frac{1}{a})[(n-1)-(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^{n-2}})]\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(n-1)(1-\frac{1}{a})[(1-\frac{1}{a})+(1-\frac{1}{a^2})+\cdots+(1-\frac{1}{a^{n-2}})]\geqslant 0$$

由 $a\geqslant 1$ 知,上式显然成立. 原命题获证.

21. (2007.04.06) 简证

$$\sum a^r(b+c)=\sum ab(a^{r-1}+b^{r-1})\geqslant 2\sum(ab\cdot ab^{\frac{r-1}{2}})=$$
$$2\sum(ab)^{\frac{r+1}{2}}\geqslant$$
$$6\cdot(\frac{\sum bc}{3})^{\frac{r+1}{2}}=6$$

(注意到$\frac{r+1}{2}>1$).

22. (2007.08.29,摘译自原书) 简证:(a) 利用代换法 $x=\frac{a}{r}$,$y=\frac{b}{r}$ 和 $z=\frac{c}{r}$,这里 $r=\sqrt[3]{abc}\geqslant 1$,我们有 $xyz=1$ 和

$$a^{\frac{a}{b}}b^{\frac{b}{c}}c^{\frac{c}{a}}=x^{\frac{x}{y}}y^{\frac{y}{z}}z^{\frac{z}{x}}r^{\frac{z}{x}}r^{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}}\geqslant x^{\frac{x}{y}}y^{\frac{y}{z}}z^{\frac{z}{x}}$$

因此,只需证

$$x^{\frac{x}{y}}y^{\frac{y}{z}}z^{\frac{z}{x}}\geqslant 1$$

等价于

$$\frac{x}{y}\ln x+\frac{y}{z}\ln y+\frac{z}{x}\ln z\geqslant 0$$

由 $f(x)=x\ln x$ 是凸函数,通过 Jensen 不等式我们得到

$$\frac{1}{y}\cdot x\ln x+\frac{1}{z}\cdot y\ln y+\frac{1}{x}\cdot z\ln z\geqslant(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})\ln\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}}$$

因此,剩下只需证

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\geqslant\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{x}$$

由算术-几何平均值不等式我们有

$$\frac{x}{y}+2\frac{y}{z}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{x}{y}(\frac{y}{z})^2}=\frac{3}{z}$$

并且,类似有

$$\frac{y}{z}+2\frac{z}{x}\geqslant\frac{3}{x},\ \frac{z}{x}+2\frac{x}{y}\geqslant\frac{3}{y}$$

将上述不等式左右分别相加即得到要求的不等式,当且仅当 $a=b=c=1$ 时,原式取等号.

(b) 把不等式写成下面形式

$$\frac{a}{b}\ln a+\frac{b}{c}\ln b+c\ln c\geqslant 0$$

类似上一题,根据 Jensen 不等式我们得到

$$\frac{1}{b}\cdot a\ln a+\frac{1}{c}\cdot b\ln b+c\ln c\geqslant\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+c\right)\ln\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+c}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1}$$

因此,只需证

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+c\geqslant\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1$$

由 $a\geqslant\frac{1}{bc}$,又只需证

$$\frac{1}{b^2c}+\frac{b}{c}+c\geqslant\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+1$$

这个不等式等价于

$$\frac{1}{b^2}+b+c^2\geqslant\frac{c}{b}+1+c$$

即
$$\left(2c-1-\frac{1}{b}\right)^2+\left(1-\frac{1}{b}\right)^2(4b+3)\geqslant 0$$

故原不等式获证,当且仅当 $a=b=c=1$ 时,原式取等号.

23. (2007.02.27) 简证:记

$$s_1=a+b+c+d$$
$$s_2=ab+ac+ad+bc+bd+cd$$
$$s_3=bcd+acd+abd+abc$$
$$s_4=abcd$$

则

原式左边 − 右边 $=4(s_1^3-3s_1s_2+3s_3)+15s_3-s_1^3=3(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)=$

$$\frac{3}{s_1}(s_1^4-4s_1^2s_2+9s_1s_3-25s_4)+\frac{75s_4}{s_1}\geqslant\frac{75s_4}{s_1}\geqslant 0$$

(参见第一章"等价变换法证明不等式" 中例 14).

24. (2007.08.28,摘译自原书) 简证:由于

$$4=(a+b-c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-$$

$$[(a+b)\frac{1}{c}+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})c]+1\leqslant$$
$$(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})-2\sqrt{(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}+1=$$
$$[\sqrt{(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}-1]^2$$

因此

$$\sqrt{(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}-1\geqslant 2\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 7 \qquad ①$$

于是

$$\sum a^4\cdot\sum\frac{1}{a^4}\geqslant[\sqrt{(a^4+b^4)(\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4})}+1]^2\geqslant[(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2})+1]^2=$$
$$[(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})^2-1]^2\geqslant(7^2-1)^2=2\ 304$$

25. (2007.04.06) 简证：原式只需证去分母后左边减去右边式子不小于零即可. 记 $s_1=\sum a,s_2=\sum bc,s_3=abc$，则

$$\sum bc\cdot\sum(b^2+2ca)(c^2+2ab)-2\prod(a^2+bc)=$$
$$(2s_1^2s_2^2-3s_2^3)-2(4s_1^3s_3-18s_1s_2s_3+2s_2^3+27s_3^2)=$$
$$2(s_1^2s_2^2-4s_2^3+18s_1s_2s_3-4s_1^3s_3-27s_3^2)+s_2^3\geqslant$$
$$0$$

($s_1^2s_2^2-4s_2^3+18s_1s_2s_3-4s_1^3s_3-27s_3^2=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geqslant 0$，可参见本章 Chapter8 题 40 解答).

26. (2007.03.30) 简证

$$\sum\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}-1-\frac{\sum bc}{\sum a^2}=\sum[\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}-\frac{a(b+c)}{\sum a^2}]+$$
$$\frac{2\sum bc}{\sum a^2}-1-\frac{\sum bc}{\sum a^2}=$$
$$\sum\frac{a(b+c)(b-c)^2}{(a^2+2bc)\sum a^2}-\frac{\sum(b-c)^2}{2\sum a^2}=$$
$$\sum\frac{2ab+2ac-a^2-2bc}{2(a^2+2bc)(a^2+b^2+c^2)}(b-c)^2=$$
$$\sum\frac{a^2-2(a-b)(a-c)}{2(a^2+2bc)(a^2+b^2+c^2)}(b-c)^2$$

所以只要证

$$\sum \frac{a^2-2(a-b)(a-c)}{a^2+2bc}(b-c)^2 \geqslant 0 \qquad ①$$

因为

$$\sum \frac{a^2(b-c)^2}{a^2+2bc} \geqslant 0 \qquad ②$$

所以又只要证

$$\sum \frac{-2(a-b)(a-c)(b-c)^2}{a^2+2bc} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum \frac{-(a-b)(a-c)(b-c)^2}{a^2+2bc} \geqslant 0 \qquad ③$$

由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则

$$\text{式③左边} = (a-b)(b-c)(a-c)\left(-\frac{b-c}{a^2+2bc}+\frac{a-c}{b^2+2ac}-\frac{a-b}{c^2+2ab}\right) =$$

$$(a-b)(b-c)(a-c)\left[(b-c)\left(\frac{1}{b^2+2ac}-\frac{1}{a^2+2bc}\right)+\right.$$

$$\left.(a-b)\left(\frac{1}{b^2+2ac}-\frac{1}{c^2+2ab}\right)\right] =$$

$$(a-b)(b-c)(a-c)\left[\frac{(a+b-2c)(a-b)(b-c)}{(b^2+2ac)(a^2+2bc)}+\right.$$

$$\left.\frac{(2a-b-c)(a-b)(b-c)}{(b^2+2ac)(c^2+2ab)}\right] \geqslant 0$$

即式③成立,由式②、③知式①成立,原命题获证.

27. (2007.03.30) 简证:因为

$$\sum \frac{(b+c)^2}{a^2+bc}-6 = \sum\left[\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}-2\right] = \sum \frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2+bc} =$$

$$\sum\left(\frac{1}{c^2+ab}-\frac{1}{b^2+ca}\right)(b^2-c^2) =$$

$$\sum \frac{(b+c)(-a+b+c)(b-c)^2}{(c^2+ab)(b^2+ca)}$$

所以只要证

$$\sum (b+c)(-a+b+c)(a^2+bc)(b-c)^2 \geqslant 0 \qquad ①$$

由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,易知,这时式①中二、三两项非负,且有

$$(b^2+ac)(a-c)^2-(a^2+bc)(b-c)^2 =$$

$$(ab-bc)^2-(ab-ac)^2+c[a(a-c)^2-b(b-c)^2] =$$

$$c(a-b)(2ab-bc-ac)+c[a(a-c)^2-b(b-c)^2] \geqslant 0$$

所以

$$\sum (b+c)(-a+b+c)(a^2+bc)(b-c)^2 \geqslant$$
$$(b+c)(-a+b+c)(a^2+bc)(b-c)^2+$$
$$(c+a)(a-b+c)(b^2+ac)(a-c)^2 \geqslant$$
$$(a^2+bc)(b-c)^2[(b+c)(-a+b+c)+(c+a)(a-b+c)]=$$
$$(a^2+bc)(b-c)^2[(a-b)^2+c(a+b+2c)] \geqslant 0$$

即式①成立.

28. (2007.04.06) 简证：原式只需证去分母后左边减去右边的式子不小于零即可. 记

$$s_1=\sum a, s_2=\sum bc, s_3=abc$$

则

$$\sum a \cdot \sum (2b^2+ca)(2c^2+ab)(b+c)-6\prod (2a^2+bc)=$$
$$s_1(2s_1^3s_2-2s_1s_2^2-6s_1^2s_3)-6(2s_1^3s_3-18s_1s_2s_3+4s_2^3+27s_3^2)=$$
$$2(s_1^4s_2-s_1^2s_2^2-9s_1^3s_3-12s_2^3+54s_1s_2s_3-81s_3^2)=$$
$$2(s_1^4s_2-4s_1^2s_2^2-9s_1^3s_3+45s_1s_2s_3-81s_3^2)+6(s_1^2s_2^2+3s_1s_2s_3-4s_2^3)=$$
$$2(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)(s_1s_2-9s_3)+6s_2(s_1^2s_2+3s_1s_3-4s_2^2)=$$
$$2(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)(s_1s_2-9s_3)+$$
$$\frac{6s_2}{s_1}[s_2(s_1^3-4s_1s_2+9s_3)+3s_3(s_1^2-3s_2)] \geqslant 0$$

($s_1^3-4s_1s_2+9s_3 \geqslant 0$,此式参见第一章“等价变换法证明不等式”中例14).

29. (2007.04.24,陈计转贴于“中学数学答疑热线”网站) 简证一：由 Holder 不等式

$$\left(\sum \frac{a}{a^2+3bc}\right)\left(\sum a\sqrt{a^2+3bc}\right)^2 \geqslant \left(\sum a\right)^3$$

我们只需证

$$(a+b+c)^3 \geqslant 4(bc+ca+ab)^2\left(\frac{a}{a^2+3bc}+\frac{b}{b^2+3ca}+\frac{c}{c^2+3ab}\right)$$

$$(a+b+c)^3-4(bc+ca+ab)^2\left(\frac{a}{a^2+3bc}+\frac{b}{b^2+3ca}+\frac{c}{c^2+3ab}\right)=$$

$$\frac{F(a,b,c)}{(a^2+3bc)(b^2+3ca)(c^2+3ab)}$$

不妨设 $a \leqslant b \leqslant c$,且 $b=a+s, c=a+s+t, s,t \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

$$F(a,b,c)=F(a,a+s,a+s+t)=$$
$$216(s^2+st+t^2)a^7+7(2s+t)(59s^2+59st+98t^2)a^6+$$
$$3(419s^2+838s^3t+1\ 663s^2t^2+1\ 244st^3+279t^4)a^5+$$

$(2s+t)(487s^4+974s^3t+2\ 820s^2t^2+2\ 333st^3+481t^4)a^4+$
$(409s^6+1\ 227s^5t+4\ 600s^4t^2+7\ 155s^3t^3+4\ 704s^2t^4+1\ 331st^5+123t^6)a^3+$
$(2s+t)(45s^6+135s^5t+760s^4t^2+1\ 295s^3t^3+823s^2t^4+198st^5+9t^5)a^2+$
$s(s+t)(8s^6+24s^5t+231s^4t^2+422s^3t^3+297s^2t^4+90st^5+9t^6)a+$
$3s^3t^2(2s+t)(s+t)^3\geqslant 0$

(2007.04.04) 简证二：分两种情况证明.

若$4(a+b)\geqslant 3c,4(b+c)\geqslant 3a,4(c+a)\geqslant 3b$,则

$$(a^2+3bc)(b^2+3ca)-[ab+\frac{3}{2}(a+b)c]^2=$$
$$\frac{3}{4}c(4a^3+4b^3+6abc-3a^2c-3b^2c-4a^2b-4ab^2)=$$
$$\frac{3}{4}c(4a+4b-3c)(a-b)^2\geqslant 0$$

因此得到

$$\sqrt{(a^2+3bc)(b^2+3ca)}\geqslant ab+\frac{3}{2}(a+b)c$$

同理可得另外两式．于是有

$$(\sum a\sqrt{a^2+3bc})^2-4(\sum bc)^2=$$
$$\sum a^4+3abc\sum a-4(\sum bc)^2+2\sum ab\sqrt{(a^2+3bc)(b^2+3ca)}\geqslant$$
$$\sum a^4-5abc\sum a-4\sum b^2c^2+2\sum ab[ab+\frac{3}{2}(a+b)c]=$$
$$\sum a^4-2\sum b^2c^2+abc\sum a=$$
$$\frac{1}{2}\sum[(b+c)^2-a^2](b-c)^2$$

设$a\geqslant b\geqslant c$,易证上式不小于零. 故原式成立.

若$3c\geqslant 4(a+b)$,则

$$a\sqrt{a^2+3bc}\geqslant a\sqrt{a^2+4b(a+b)}=a(a+2b)$$
$$b\sqrt{b^2+3ca}\geqslant b(b+2a)$$

于是,有

$$\sum a\sqrt{a^2+3bc}-2\sum bc\geqslant a(a+2b)+b(b+2c)+c^2-2\sum bc=$$
$$(a+b-c)^2\geqslant 0$$

原命题获证. 由以上证明可知,当且仅当$a=b=c$,或a,b,c中有一个是零,其余两个相等时原命题中不等式取等号.

30. (2007.05.01，陈计提供，见 http://www.mathlinks.ro/ Forum/

viewtopic. php?t = 80731) 简证：记 $D_a = \sqrt{a^2+kbc}, D_b = \sqrt{b^2+kca}, D_c = \sqrt{c^2+kab}, k \geqslant \frac{2}{3}$，则可证较原式更一般的式子

$$\sum \frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+kbc}} \geqslant 0 \qquad ①$$

由于

$$2\sum \frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+kbc}} = \sum\left(\frac{a+c}{D_a}-\frac{b+c}{D_b}\right)(a-b) =$$

$$\sum \frac{[(a+c)D_b-(b+c)D_a](a-b)}{D_aD_b} =$$

$$\sum \frac{(a+c)^2(b^2+ca)-(b+c)^2(a^2+bc)}{D_aD_b[(a+c)D_b+(b+c)D_a]}(a-b) =$$

$$\sum \frac{[k\sum a^2+(k-2)ab+(2k-1)c(a+b)]c(a-b)^2}{D_aD_b[(a+c)D_b+(b+c)D_a]} =$$

$$\sum \frac{[(3k-2)ab+kc^2+(2k-1)c(a+b)]c(a-b)^2}{D_aD_b[(a+c)D_b+(b+c)D_a]} \geqslant 0$$

故式 ① 成立. 取 $k=1$，即得原式.

31. (2007. 08. 28，摘译自原书) 简证：由对称性，设 $a \geqslant b \geqslant c$，且记

$$x=(a^2-bc)(b+c),\ y=(b^2-ca)(c+a),\ z=(c^2-ab)(a+b)$$

$$A=\frac{\sqrt{a^2+4bc}}{b+c},\ B=\frac{\sqrt{b^2+4ca}}{c+a},\ C=\frac{\sqrt{c^2+4ab}}{a+b}$$

则容易验证

$$x+y+z=0 \quad x \geqslant 0,\ z \leqslant 0$$

又
$$x-y=ab(a-b)+2(a^2-b^2)c+(a-b)c^2 \geqslant 0$$

及

$$A^2-B^2=\frac{a^4-b^4+2(a^3-b^3)c+(a^2-b^2)c^2+4abc(a-b)-4(a-b)c^3}{(b+c)^2(c+a)^2} \geqslant$$

$$\frac{4abc(a-b)-4(a-b)c^3}{(b+c)^2(c+a)^2}=\frac{4c(a-b)(ab-c^2)}{(b+c)^2(c+a)^2} \geqslant 0$$

即有 $A-B \geqslant 0$.

又易知有

$$2(Ax+By+Cz)=(A-B)(x-y)-(A+B-2C)z$$

由上已知 $A-B \geqslant 0, x-y \geqslant 0, z \leqslant 0$，因此，若能证 $A+B-2C \geqslant 0$，则

$$Ax+By+Cz \geqslant 0$$

即可证得原式.

要证 $A+B-2C \geqslant 0$，由 $A+B \geqslant 2\sqrt{AB}$ 知，只要证 $AB \geqslant C^2$，又由于

$$AB=\frac{\sqrt{a^2+4bc}\cdot\sqrt{b^2+4ca}}{(b+c)(c+a)}\geqslant\frac{ab+4c\sqrt{ab}}{(b+c)(c+a)}$$

因此,又只要证

$$\frac{ab+4c\sqrt{ab}}{(b+c)(c+a)}\geqslant\frac{c^2+4ab}{(a+b)^2}\Leftrightarrow$$

$$(a+b)^2(ab+4c\sqrt{ab})\geqslant(b+c)(c+a)(c^2+4ab)\Leftrightarrow$$

$$ab(a-b)^2+2c\sqrt{ab}(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+$$

$$[(a+b)^2\sqrt{ab}-(b+c)(c+a)c]+$$

$$c\sqrt{ab}[(a+b)^2-4c\sqrt{ab}]\geqslant 0$$

此式在 $a\geqslant b\geqslant c$ 情况下显然成立,原命题获证. 由证明中知,当且仅当 $a=b=c$,或 a,b,c 中有一个为零,其余两个相等时原不等式取等号.

32. (2007.05.02) 简证:记

$$D_a=\sqrt{8a^2+(b+c)^2},D_b=\sqrt{8b^2+(c+a)^2},D_c=\sqrt{8c^2+(a+b)^2}$$

则

$$\text{原式左边}=\frac{1}{2}\sum\frac{(a-b)(c+a)-(c-a)(a+b)}{D_a}=$$

$$\frac{1}{2}\sum(\frac{a+b}{D_b}-\frac{c+a}{D_c})(b-c)=$$

$$\frac{1}{2}\sum\frac{[(a+b)D_c-(c+a)D_b](b-c)}{D_bD_c}=$$

$$\frac{1}{2}\sum\frac{\{(a+b)^2[8c^2+(a+b)^2]-(c+a)^2[8b^2+(c+a)^2]\}(b-c)}{D_bD_c[(a+b)D_c+(c+a)D_b]}=$$

$$\frac{1}{2}\sum\frac{[4a^3+3a(b^2+c^2)+a(b+c)^2+(b+c)(b^2+c^2)-2a^2(b+c)-14abc](b-c)^2}{D_bD_c[(a+b)D_c+(c+a)D_b]}\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum\frac{[4a^3+\frac{3}{2}a(b+c)^2+a(b+c)^2+\frac{1}{2}(b+c)^3-2a^2(b+c)-\frac{7}{2}a(b+c)^2](b-c)^2}{D_bD_c[(a+b)D_c+(c+a)D_b]}=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{[8a^3-4a^2(b+c)-2a(b+c)^2+(b+c)^3](b-c)^2}{D_bD_c[(a+b)D_c+(c+a)D_b]}=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{(2a+b+c)(2a-b-c)^2(b-c)^2}{D_bD_c[(a+b)D_c+(c+a)D_b]}\geqslant 0$$

33. (2006.11.05) 证:不妨设 $c\geqslant b\geqslant a\geqslant 0$,则

$$\sqrt{c^2+ab}\leqslant\sqrt{c^2+ac}\leqslant c+\frac{a}{2} \qquad ①$$

另外,我们证明

$$\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}\leqslant\frac{c}{2}+a+\frac{3b}{2} \quad ②$$

由于$(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca})^2\leqslant 2(a^2+b^2+bc+ca)$,因此,要证式②,只需证

$$2(a^2+b^2+bc+ca)\leqslant(\frac{c}{2}+a+\frac{3b}{2})^2\Leftrightarrow$$
$$c^2-(4a+2b)c-(4a^2-b^2-12ab)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(c-2a-b)^2+8a(b-a)\geqslant 0$$

此式成立,故式②成立.

由式①+②即得$\sum\sqrt{a^2+bc}\leqslant\frac{3}{2}\sum a=\frac{3}{2}$,当且仅当$b=c=\frac{1}{2},a=0$;或$c=a=\frac{1}{2},b=0$;或$a=b=\frac{1}{2},c=0$时原式取等号.

应用柯西不等式及上述结果:$\sum\sqrt{a^2+bc}\leqslant\frac{3}{2}\sum a$,可得

$$\sqrt{3\sum\frac{1}{a^2+bc}}\geqslant\sum\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\geqslant\frac{9}{\sum\sqrt{a^2+bc}}\geqslant\frac{6}{\sum a}$$

其中$a,b,c\geqslant 0$,当且仅当a,b,c中一个为零,其余两个相等时,以上诸式均取等号.

注:本题最先出现在网站上,这是本人于2006.11.05给出的证明.

34. (2007.02.03)简证一:不妨设a,b,c中,a最小,即有$0\leqslant a\leqslant 1$,下面先证

$$21+18abc-13\sum bc\geqslant 21+18a\cdot\frac{b^2+c^2}{2}-13\cdot\frac{b^2+c^2}{2}-13a\cdot\sqrt{2(b^2+c^2)} \quad ①$$

由

$$\text{式①左边}-\text{右边}=[13+\frac{52a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}+(b+c)}-18a](\frac{b-c}{2})^2\geqslant [13+\frac{26a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}-18a](\frac{b-c}{2})^2$$

因此,要证式①成立,只需证

$$13+\frac{26a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}-18a\geqslant 0 \quad ②$$

若$13-18a\geqslant 0$,则式②成立;

若$13-18a<0$,即$\frac{13}{18}<a\leqslant 1$,则

$$13+\frac{26a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}-18a=13+\frac{26a}{\sqrt{2(3-a^2)}}-18a>$$

$$13+\frac{26\times\frac{13}{18}}{\sqrt{2[3-(\frac{13}{18})^2]}}-18=$$

$$\frac{26\times\frac{13}{18}}{\sqrt{2[3-(\frac{13}{18})^2]}}-5>$$

$$\frac{26\times\frac{13}{18}}{3}-5=\frac{68}{54}>0$$

所以式②也成立.

由此可知,我们只需证

$$21+18a\cdot\frac{b^2+c^2}{2}-13\cdot\frac{b^2+c^2}{2}-13a\cdot\sqrt{2(b^2+c^2)}=$$

$$21+9a(3-a^2)-\frac{13}{2}(3-a^2)-13a\sqrt{2(3-a^2)}\geqslant$$

$$0$$

即

$$3+54a+13a^2-18a^3\geqslant 26a\cdot\sqrt{2(3-a^2)} \qquad ③$$

由 $0\leqslant a\leqslant 1$ 可知,式③左边式子大于零. 因此,要证式③成立,只要证式③平方后的式子成立即可.

由于

$$(3+54a+13a^2-18a^3)^2-[26a\cdot\sqrt{2(3-a^2)}]^2=$$

$$324a^6-468a^5-423a^4+1\,296a^3-1\,062a^2+324a+9=$$

$$(a-1)^2(324a^4+180a^3-387a^2+342a+9)\geqslant 0$$

(注意到 $180a^3-387a^2+342a=a(180a^2-387a+342)>0$) 因此,式③成立,故原命题成立.

简证二: 记 $s_1=\sum a, s_2=\sum bc=\frac{s_1^2-3}{2}, s_3=abc$,则

$$3s_3\geqslant\frac{-s_1^4+16s_2^2}{7s_1}$$

(参见第七章"其他证明不等式例子"中例 14) 于是有

$$21+18abc-13\sum bc\geqslant 21+6\frac{(-s_1^4+16s_2^2)}{7s_1}-13s_2=$$

$$\frac{-6s_1^4+147s_1+96s_2^2-91s_1s_2}{7s_1}=$$

$$\frac{-6s_1^4+147s_1+96(\frac{s_1^2-3}{2})^2-91s_1\cdot\frac{s_1^2-3}{2}}{7s_1}=$$

$$\frac{(s_1-3)^2(36s_1^2+125s_1+48)}{14s_1}\geqslant 0$$

35.（2007.04.06）简证：原式只需证去分母后左边减去右边的式子不小于零即可. 记

$$s_1=\sum a, s_2=\sum bc, s_3=abc$$

则

$$\prod(5-2bc)-\sum(5-2ca)(5-2ab)=50-30\sum bc+16abc\sum a-8(abc)^2$$

可见第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录中的定理 2 证明

$$50-30\sum bc+16abc\sum a-8(abc)^2\geqslant 0$$

36.（2007.04.06）简证

$$\prod(2-bc)-1=7-4\sum bc+2abc\sum a-(abc)^2=$$

$$\frac{1}{8}[50-30\sum bc+16abc\sum a-8(abc)^2+\frac{1}{4}(3-\sum bc)]\geqslant 0$$

（应用了上一题结论）.

37.（2007.04.19）简证：由对称性，不妨设 $a\leqslant b\leqslant c$，则

$$\frac{1}{1+a^2}\leqslant\frac{1+c^2-a^2}{1+c^2}, \frac{1}{1+b^2}\leqslant\frac{1+c^2-b^2}{1+c^2}$$

因此，只需证

$$\frac{(1+c^2-a^2)bc}{1+c^2}+\frac{(1+c^2-b^2)ca}{1+c^2}+\frac{ab}{1+c^2}\leqslant 1\Leftrightarrow$$

$$(1+c^2-a^2)bc+(1+c^2-b^2)ca+ab\leqslant 1+c^2\Leftrightarrow$$

$$c(a+b)(1+c^2)-abc(a+b)\leqslant 1+c^2-ab\Leftrightarrow$$

$$(1+c^2-ab)(ca+bc)\leqslant 1+c^2-ab \quad ①$$

因为

$$a+b+c=2$$

所以

$$1+c^2-ab\geqslant 0$$

所以要证式 ① 成立，又只需证

$$ca+bc\leqslant 1 \quad ②$$

但有

$$1-(ca+bc)=(\frac{a+b+c}{2})^2-(ca+bc)=\frac{1}{4}(a+b-c)^2\geqslant 0$$

因此式②成立,原命题获证,由以上证明知,当且仅当a,b,c中有一数为0,另外两数都等于1时,原式取等号.

38. (2007.04.13) 简证

$$原式左边-右边=\sum\left[\frac{a^3+3abc}{(b+c)^2}-a\right]=\sum\frac{a(a^2-b^2-c^2+bc)}{(b+c)^2}=$$

$$\sum\frac{a(a-b)(a-c)+ab(a-b)-ca(c-a)}{(b+c)^2}=$$

$$\sum\frac{a(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}+\sum\frac{ab(a-b)-ca(c-a)}{(b+c)^2}$$

由对称性,不妨设$a\geqslant b\geqslant c$,则$a-c\geqslant b-c$,于是

$$\sum\frac{a(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}=\frac{a(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}-\frac{b(a-b)(b-c)}{(a+c)^2}+$$

$$\frac{c(a-c)(b-c)}{(a+b)^2}\geqslant$$

$$\frac{a(a-b)(b-c)}{(b+c)^2}-\frac{b(a-b)(b-c)}{(a+c)^2}\geqslant 0$$

因此,由式①知要证原式只要证

$$\sum\frac{ab(a-b)-ca(c-a)}{(b+c)^2}\geqslant 0 \qquad ②$$

$$式②左边=\sum bc(b-c)\left[\frac{1}{(c+a)^2}-\frac{1}{(a+b)^2}\right]=$$

$$\sum\frac{bc(2a+b+c)(b-c)^2}{(c+a)^2(a+b)^2}\geqslant$$

$$0$$

式②成立.

39. 简证:(a) (2003.02.17) 参见第八章“练习”中题57.

(b) (2007.02.04) 由于$\frac{3\sum a^3}{\sum a^2}\geqslant\sqrt[4]{3^3\sum a^4}$ (参见第七章“其他不等式证明例子”例40中的式(64)). 因此,可由本章Chapter8 题83推证得到.

40. (2007.02.27) 简证

$$\sum\frac{a^3-b^3}{a+b}=\sum\frac{(a-b)[(a+b)^2-ab]}{a+b}=-\sum\frac{ab(a-b)}{a+b}=$$

$$\frac{ac(a-b+b-c)}{a+b}-\frac{ab(a-b)}{a+b}-\frac{bc(b-c)}{b+c}=$$

$$\left[\frac{ab(a-b)}{a+c}-\frac{ab(a-b)}{a+b}\right]+\left[\frac{ac(b-c)}{a+c}-\frac{bc(b-c)}{b+c}\right]=$$

$$-\frac{a^2(a-b)(b-c)}{(a+c)(a+b)}+\frac{c^2(a-b)(b-c)}{(a+c)(b+c)}=$$

$$\frac{\sum bc\cdot(a-b)(b-c)(c-a)}{\prod(b+c)}$$

于是,只要证

$$\frac{\sum(b-c)^2}{8}\geqslant\frac{\sum bc}{\prod(b+c)}\left|\prod(b-c)\right|$$

或

$$\frac{\prod(b+c)}{8\sum bc}\sum(b-c)^2\geqslant\left|\prod(b-c)\right| \qquad (※)$$

可用增量比较法证明式(※)(略).

41. (2007.04.03)简证:原式经去分母后即证

$$3\sum a^2(2b+c)(2b+a)(2c+a)(2c+b)\leqslant\prod(2a+b)(2a+c) \qquad ①$$

式①左边 $=3\sum a^2[3b\sum a+(b-a)(b-c)][3c\sum a+(c-a)(c-b)]=$

$3abc\sum a[3\sum a+\frac{(b-a)(b-c)}{b}][3\sum a+\frac{(c-a)(c-b)}{c}]=$

$27abc\cdot(\sum a)^3+9\sum a\cdot\sum[a^2c(b-c)(b-a)+$

$a^2b(c-a)(c-b)]+$

$3(a-b)(b-c)(c-a)\sum a^2(b-c)=$

$27abc\cdot(\sum a)^3+9\sum a\cdot\sum a^3(b-c)^2-$

$3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$

式①右边 $=abc\prod[3\sum a+\frac{(a-b)(a-c)}{a}]=$

$abc\cdot[27(\sum a)^3+9(\sum a)^2\sum\frac{(a-b)(a-c)}{a}+3\sum a\cdot$

$\sum\frac{(a-b)(b-c)^2(c-a)}{bc}-\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{abc}]=$

$27abc\cdot(\sum a)^3+9(\sum a)^2\sum bc(a-b)(a-c)+$

$3(a-b)(b-c)(c-a)\cdot\sum a\cdot\sum a(b-c)-$

$(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2=$

$27abc\cdot(\sum a)^3-\frac{9}{2}(\sum a)^2\cdot[\sum a(b-c)]^2+$

$$\frac{9}{2}(\sum a)^2\sum a^2(b-c)^2-(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2=$$
$$27abc(\sum a)^3+\frac{9}{2}(\sum a)^2\sum a^2(b-c)^2-$$
$$(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$$

由上知,式①又等价于

$$27abc\cdot(\sum a)^3+9\sum a\cdot\sum a^3(b-c)^2-3(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2\leqslant$$
$$27abc\cdot(\sum a)^3+\frac{9}{2}(\sum a)^2\cdot\sum a^2(b-c)^2-$$
$$(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2$$

由此知,只要证

$$2\sum a^3(b-c)^2\leqslant\sum a\cdot\sum a^2(b-c)^2\Leftrightarrow$$
$$\sum a\cdot\sum a^2(a+b+c)(b-c)^2\geqslant 0 \qquad ②$$

$$式②左边=\sum[a^2(b+c)^2-a^4](b-c)^2=$$
$$\sum a^2(b^2-c^2)^2-\sum a^4(b-c)^2=$$
$$2abc\sum a^3-6a^2b^2c^2=$$
$$2abc(\sum a^3-3abc)\geqslant 0$$

故式①成立,原命题获证.

42. (2007.05.02)简证:见第四章“应用基本不等式证明不等式”附录中例4.

43. (2007.04.06)简证一

$$\frac{3}{4}-\sum\frac{bc}{a^2+1}=\frac{3}{4}+\sum\frac{(b-c)^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}-\sum\frac{b^2+c^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}=$$
$$\sum\frac{(b-c)^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}+\sum[\frac{1}{4}-\frac{b^2+c^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}]=$$
$$\sum\frac{(b-c)^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}-\sum\frac{-2a^2+b^2+c^2}{4(2a^2+b^2+c^2)}=$$
$$\sum\frac{(b-c)^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}-\sum[\frac{1}{4(a^2+b^2+2c^2)}-$$
$$\frac{1}{4(a^2+2b^2+c^2)}](b^2-c^2)=$$
$$\sum\frac{(b-c)^2}{2(2a^2+b^2+c^2)}-$$
$$\sum\frac{(b^2-c^2)^2}{4(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)}=$$

$$\frac{1}{4\prod(2a^2+b^2+c^2)}\sum[2(a^2+2b^2+c^2)(a^2+b^2+2c^2)-$$
$$(2a^2+b^2+c^2)(b+c)^2](b-c)^2=$$
$$\frac{1}{4\prod(2a^2+b^2+c^2)}\sum[2(a^2+b^2+c^2)^2-$$
$$a^2(b+c)^2+2b^2c^2+$$
$$(a^2+b^2+c^2)(b-c)^2](b-c)^2\geqslant 0$$

(2007.04.06) 简证二

$$\sum\frac{bc}{a^2+1}=\sum\frac{bc}{2a^2+b^2+c^2}=\sum\frac{bc}{(a^2+b^2)+(a^2+c^2)}\leqslant$$
$$\sum\frac{bc}{2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}}=\frac{1}{2}\sum\sqrt{\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}}\leqslant$$
$$\frac{1}{4}\sum\left(\frac{b^2}{a^2+b^2}+\frac{c^2}{a^2+c^2}\right)=\frac{3}{4}$$

44. (2007.05.02) 简证：原式经去分母整理后等价于

$$9[36(\sum a^2)^3-24(\sum a^2)^2\sum bc+3\sum a^2\sum b^2c^2+18abc\sum a\sum a^2-$$
$$2\sum b^3c^3+4abc\sum a^3-7a^2b^2c^2]\geqslant$$
$$8\sum a^2[33(\sum a^2)^2-14\sum a^2\sum bc+\sum b^2c^2+6abc\sum a]\Leftrightarrow$$
$$60(\sum a^2)^3-104(\sum a^2)^2\sum bc+19\sum a^2\sum b^2c^2+114abc\sum a\sum a^2-$$
$$18\sum b^3c^3+36abc\sum a^3-63a^2b^2c^2\geqslant 0$$

记 $s_1=\sum a=1, s_2=\sum bc, s_3=abc$，代入上式，并注意到 $\sum a^2=s_1^2-2s_2, \sum a^3=s_1^3-3s_1s_2+3s_3, \sum b^2c^2=s_2^2-2s_1s_3$，得到

$$60-464s_2+1\,155s_2^2-952s_2^3+112s_3-206s_2s_3-9s_3^2\geqslant 0 \quad ①$$

记 $\omega=\sqrt{1-3s_2}$，即 $s_2=\frac{1-\omega^2}{3}$，由第四章“应用基本不等式证明不等式”最后附录中定理 2 的推论 3，有 $s_3\geqslant\frac{1-3\omega^2-2\omega^3}{27}$. 由于易证

$$112s_3-206s_2s_3-9s_3^2\geqslant 112\cdot\frac{1-3\omega^2-2\omega^3}{27}-206s_2\cdot\frac{1-3\omega^2-2\omega^3}{27}-$$
$$9\cdot\left(\frac{1-3\omega^2-2\omega^3}{27}\right)^2$$

因此，要证式 ① 成立，只需证

$$60-\frac{464(1-\omega^2)}{3}+\frac{1\,155(1-\omega^2)^2}{9}-\frac{952(1-\omega^2)^3}{27}+$$

$$[112-\frac{206(1-\omega^2)}{3}]\cdot\frac{1-3\omega^2-2\omega^3}{27}-9(\frac{1-3\omega^2-2\omega^3}{27})^2\geqslant 0$$

经整理,即得

$$\omega^2(32-64\omega+300\omega^2-106\omega^3+713\omega^4)\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$\omega^2[32(1-\omega)^2+\omega^2(268-106\omega+713\omega^2)]\geqslant 0$$

此式显然成立,故式①成立,原命题获证.

45. (2007.03.31) 简证:由于

$$3-\sum\frac{4a^2-b^2-c^2}{a(b+c)}=3-\sum\frac{4a^2-\frac{1}{2}(b+c)^2-\frac{1}{2}(b-c)^2}{a(b+c)}=$$
$$(\sum\frac{b+c}{2a}-3)+(6-\sum\frac{4a}{b+c})+\sum\frac{(b-c)^2}{2a(b+c)}=$$
$$\frac{1}{2abc}\sum a(b-c)^2-\frac{2}{\prod(b+c)}\sum(b+c)(b-c)^2+\sum\frac{(b-c)^2}{2a(b+c)}=$$
$$\frac{1}{2abc\prod(b+c)}\sum[a(b+c)(c+a)(a+b)+bc(a+b)(a+c)-$$
$$4abc(b+c)](b-c)^2=$$
$$\frac{1}{2abc\prod(b+c)}\sum[a^3b+a^2b^2+ca^3+c^2a^2+b^2c^2+3a^2bc-$$
$$2abc(b+c)](b-c)^2$$

因此,只需证

$$\sum[a^3b+a^2b^2+ca^3+c^2a^2+b^2c^2+3a^2bc-2abc(b+c)](b-c)^2\geqslant 0 \quad ①$$

由对称性,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则式①中第一、二项均不小于零,又 $a-c\geqslant a-b$,于是

$$\begin{aligned}\text{式①左边}\geqslant&[b^3c+b^2c^2+ab^3+a^2b^2+c^2a^2+3ab^2c-2abc(c+a)](a-c)^2+\\&[(c^3a+c^2a^2+bc^3+b^2c^2+a^2b^2+3abc^2-2abc(a+b)](a-b)^2\geqslant\\&[a^2b^2+c^2a^2+3ab^2c-2abc(c+a)](a-c)^2+\\&[c^2a^2+a^2b^2+3abc^2-2abc(a+b)](a-b)^2\geqslant\\&[a^2b^2+c^2a^2+3ab^2c-2abc(c+a)+c^2a^2+a^2b^2+3abc^2-\\&2abc(a+b)](a-b)^2=\\&[2a^2(b^2+c^2)-4a^2bc+ab^2c+abc^2](a-b)^2=\\&[2a^2(b-c)^2+abc(b+c)](a-b)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

46. (2007.01.25) 简证:记 $s_1=a+b+c,s_2=bc+ca+ab,s_3=abc=1$,则原式等价于

$$2s_1^2-3s_1-7s_2+12\geqslant 0 \quad ①$$

因为 $$s_1^3-4s_1s_2+9s_3\geqslant 0$$
(见第一章"等价变换法证明不等式"中例14),有
$$s_3=1$$
所以 $$s_2\leqslant \frac{s_1^3+9}{4s_1}$$
所以
$$\text{式①左边}\geqslant 2s_1^2-3s_1-7\frac{s_1^3+9}{4s_1}+12=\frac{s_1^3-12s_1^2+48s_1-63}{4s_1}=$$
$$\frac{(s_1-3)(s_1^2-9s_1+21)}{4s_1}\geqslant 0$$
即式①成立,原命题获证.

47. (2007.08.29,摘译自原书)简证:我们使用归纳法.当 $n=2$ 时,原不等式成立,这是因为 $a_1a_2\leqslant 1$ 且 $a_1+a_2=2$.

假设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$,且用 $E_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 表示原不等式 n 元时的左边.于是有
$$a_n\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1\leqslant a_1$$
我们将证明
$$E_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant E_n(b_1,a_2,\cdots,a_{n-1},1) \qquad ①$$
$$E_n(b_1,a_2,\cdots,a_{n-1},1)\leqslant 3 \qquad ②$$
这里 $b_1=a_1+a_n-1,b_1>0$.

不等式②$E_n(b_1,a_2,\cdots a_{n-1},1)\leqslant 3$,根据归纳假设,因为
$$b_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=n-1$$
和
$$E_n(b_1,a_2,\cdots,a_{n-1},1)=E_{n-1}(b_1,a_2,\cdots,a_{n-1})\leqslant 3$$
可知不等式②成立.

不等式①$E_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)\leqslant E_n(b_1,a_2,\cdots,a_{n-1},1)$ 等价于
$$(1-a_1)(1-a_n)\left(\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}-n+3\right)\leqslant 0$$
由 $1-a_1\leqslant 0,1-a_n\geqslant 0$ 和
$$\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{(n-2)^2}{a_2+\cdots+a_{n-1}}=\frac{(n-2)^2}{n-a_1-a_n}>\frac{(n-2)^2}{n-a_1}\geqslant$$
$$\frac{(n-2)^2}{n-1}>n-3$$
可知式①成立.故原不等式成立.取等号条件为当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$.

48. (2007.04.04) 简证：由 $\sum a^2 = 3$ 知，原式即证

$$3\sum a^2 \cdot \sum bc - (\sum a^2)^2 \geqslant 6abc \cdot \sqrt{3\sum a^2} \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{3\sum a^2}(3\sum bc - \sum a^2) \geqslant 18abc$$

因为
$$\sqrt{3\sum a^2} \geqslant \sum a$$
所以又只要证
$$\sum a(3\sum bc - \sum a^2) \geqslant 18abc \qquad ①$$
设 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，半周长为 s，则
$$abc = 2Rr\sum a$$
$$3\sum bc - \sum a^2 = \frac{1}{4}(\sum a)^2 + \frac{5}{4}(2\sum bc - \sum a^2) =$$
$$s^2 + 5r(4R + r)$$
于是，要证式 ①，只要证
$$s^2 + 5r(4R + r) \geqslant 36Rr \Leftrightarrow s^2 \geqslant 16Rr - r^2$$
此式即 Gerretsen 不等式，故原式获证.

49. (2007.04.04) 简证：由 $\sum a^3 = 3$ 知，原式即证

$$3\sum a \cdot \sum a^2 \geqslant 2\sum a^2 \cdot \sqrt{3\sum a^2} + 9abc \Leftrightarrow$$
$$(3\sum a \cdot \sum a^2 - 9abc)^2 \geqslant 12(\sum a^2)^3 \Leftrightarrow$$
$$3(\sum a \cdot \sum a^2 - 3abc)^2 \geqslant 4(\sum a^2)^3$$

令 $a = \frac{y+z}{2}, b = \frac{z+x}{2}, c = \frac{x+y}{2}(x, y, z \in \overline{\mathbf{R}^-})$，并记 $s_1 = \sum x, s_2 = \sum yz$, $s_3 = xyz$，将以上代入式 ①，并整理得

$$3(4s_1^3 - 7s_1s_2 + 3s_3)^2 \geqslant 32(s_1^2 - s_2)^3 \Leftrightarrow$$
$$16s_1^6 - 72s_1^4s_2 + 51s_1^2s_2^2 + 72s_1^3s_3 - 126s_1s_2s_3 + 32s_2^3 + 27s_3^2 \geqslant 0 \qquad ②$$
为证式 ② 简便起见，令式 ② 中 $s_1 = 1$，则式 ② 变为
$$16 - 72s_2 + 51s_2^2 + 72s_3 - 126s_2s_3 + 32s_2^3 + 27s_3^2 \geqslant 0 \qquad ③$$
由此可知，要证原式成立，只需证式 ③ 成立. 但
$$\text{式 ③ 左边} = \frac{1}{3}(s_2 - 9s_3)^2 + 40s_3(1 - 3s_2) + \frac{32}{9}(1 - 4s_2 + 9s_3) +$$
$$\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - s_2)(112 - 184s_2 - 96s_2^2)$$

由于 $1 - 4s_2 + 9s_3 \geqslant 0$（见第一章“等价变换法证明不等式”中例 14），又易证 $1 - 3s_2 \geqslant 0, 112 - 184s_2 - 96s_2^2 \geqslant 0$，因此，式 ③ 左边 $\geqslant 0$，故原命题获证.

注:本题也可由本章 Chapter 8 中题 48 结论推证得到. 这是因为可证

$$2\sum a - 4 \geqslant \sum bc - 1 \Leftrightarrow$$

$$2\sum a - \frac{(\sum a)^2 - 3}{2} - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(\sum a - 3)(\sum a - 1) \leqslant 0$$

由 $\sum a^2 = 3$ 得到 $\sum a - 3 \leqslant 0$;又由 $(\sum a)^2 \geqslant \sum a^2 = 3$ 得到 $\sum a > 1$,故上式成立.

又由本章 Chapter 8 中题 48 有 $\sum bc - 1 \geqslant 2abc$,因此

$$2\sum a - 4 \geqslant 2abc$$

$$\sum a \geqslant 2 + abc$$

即得本题结论.

50. (2007.04.05) 简证:(a) 设 $a > b > c$,且 $a = c + \alpha + \beta, b = c + \alpha$. $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$,则由 $b + c > a$ 有 $c > \beta$,于是

$$\left|\sum \frac{a+b}{a-b}\right| - 5 = \frac{\sum a(b-c)^2}{(a-b)(b-c)(a-c)} - 5 =$$

$$\frac{(c+\alpha+\beta)\alpha^2 + (c+\alpha)(\alpha+\beta)^2 + c\beta^2}{\alpha\beta(\alpha+\beta)} - 5 \geqslant$$

$$\frac{(\alpha+2\beta)\alpha^2 + (\alpha+\beta)^3 + \beta^3}{\alpha\beta(\alpha+\beta)} - 5 =$$

$$\frac{2(\alpha^3 - \alpha\beta^2 + \beta^3)}{\alpha\beta(\alpha+\beta)} > 0$$

(b) 设 $a > b > c$,则原式只要证

$$\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} + \frac{b^2+c^2}{b^2-c^2} + \frac{c^2+a^2}{c^2-a^2} > 3$$

即

$$\frac{b^2}{a^2-b^2} + \frac{c^2}{b^2-c^2} > \frac{a^2}{a^2-c^2}$$

又由于 $\frac{a^2}{a^2-c^2} \leqslant \frac{(b+c)^2}{a^2-c^2}$,因此,要证上式成立,又只要证

$$\frac{b^2}{a^2-b^2} + \frac{c^2}{b^2-c^2} > \frac{(b+c)^2}{a^2-c^2}$$

注意到 $a^2 - c^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 - c^2)$,并应用柯西不等式即可证得上式.

注:(a)、(b) 两式都是对称式.

51. (2007.02.28) 简证:参见第二章"增量比较法证明不等式"例 12.

52. 简证一:参见杨学枝文:"一类三角不等式的统一证法"(《数学竞赛

(19)》,湖南教育出版社 1994 年 4 月出版,P35 ~ 37).

简证二:易知原命题等价于以下命题:设 $x,y,z\in[1,2]$,证明

$$\sum x\cdot\sum\frac{1}{x}\geqslant 6\sum\frac{x}{y+z}\qquad ①$$

以下证明式 ①. 由于

$$\sum x\cdot\sum\frac{1}{x}-9=\sum\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}-2\right)=\sum\frac{(x-y)^2}{xy}$$

$$\sum\frac{6x}{y+z}-9=3\sum\left(\frac{x-y}{y+z}+\frac{x-z}{y+z}\right)=3\left(\sum\frac{x-y}{y+z}+\sum\frac{y-x}{z+x}\right)=$$

$$3\sum(x-y)^2\frac{1}{(y+z)(z+x)}$$

$$\text{式 ① 左边 - 右边}=S=\sum\left[\frac{(x-y)^2}{xy}-\frac{3(x-y)^2}{(y+z)(z+x)}\right]=$$

$$\sum(x-y)^2\frac{xz+yz-2xy+z^2}{xy(y+z)(z+x)}$$

式 ① 成立等价于 $S\geqslant 0$.

不妨设 $2\geqslant x\geqslant y\geqslant z\geqslant 1$,则 $y+z\geqslant 2\geqslant x$,从而

$$(x-y)^2\frac{xz+yz-2xy+z^2}{xy(y+z)(z+x)}=(x-y)^2\frac{xz+(y+z)z-2xy}{xy(y+z)(z+x)}\geqslant$$

$$(x-y)^2\frac{xz+zx-2xy}{xy(y+z)(z+x)}=$$

$$2(x-y)^2\frac{z-y}{y(y+z)(z+x)}$$

同理

$$(z-x)^2\frac{yz+xy-2xz+y^2}{zx(x+y)(y+z)}\geqslant 2(z-x)^2\frac{y-z}{z(x+y)(y+z)}$$

而 $(y-z)^2\dfrac{xy+xz-2yz+x^2}{yz(x+y)(z+x)}\geqslant 0$,从而

$$\frac{S}{2}\geqslant(x-y)^2\frac{z-y}{y(y+z)(z+x)}+(z-x)^2\frac{y-z}{z(x+y)(y+z)}=$$

$$\frac{y-z}{y+z}\left[-\frac{(x-y)^2}{y(x+z)}+\frac{(z-x)^2}{z(x+y)}\right]\geqslant$$

$$\frac{y-z}{y+z}\left[-\frac{(x-y)^2}{y(x+z)}+\frac{(z-x)^2}{y(x+z)}\right]=$$

$$\frac{y-z}{y+z}\cdot\frac{(2x-y-z)\cdot(y-z)}{y(x+z)}\geqslant 0$$

故式 ① 成立,从而原不等式得证.

简证三:调整法

设式①左边 - 右边 $= f(x,y,z)$，$x = \max\{x,y,z\}$，$t = \frac{y+z}{2}$，只需证

$$f(x,y,z) \geqslant f(x,t,t) \geqslant 0$$

$$f(x,y,z) \geqslant f(x,t,t) \Leftrightarrow$$

$$(x+y+z)\frac{(y-z)^2}{2yzt} - 6(x+y+z)\frac{(y-z)^2}{2(z+x)(x+y)(x+t)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(z+x)(x+y)(x+t) \geqslant 6yzt$$

其中，$x+y \geqslant 2y$，$z+x \geqslant 2z$，$x+t \geqslant 2t$，上式显然成立

$$f(x,t,t) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(x+2t)(\frac{1}{x}+\frac{2}{t}) - 6(\frac{x}{2t}+\frac{2t}{t+x}) \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$2(x+2t)(t+2x)(x+t) - 6x[x(x+t)+4t^2] \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$4t^2 + 8x^2t - 2x^3 - 10xt^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(t-x)^2(2t-x) \geqslant 0$$

因为 $2t \geqslant 2 \geqslant x$，所以上式成立，从而式①成立.

注：简证二、三由上海复旦大学附中武炳杰同学于 2007 年 9 月 14 日提供.

53. (2007. 08. 28，摘录自原书) 简证：原式等价于

$$\sum(\frac{a_1-a_2}{a_2+a_3}+\frac{1}{2}) \geqslant 3 \Leftrightarrow \sum\frac{2a_1-a_2+a_3}{a_2+a_3} \geqslant 6$$

由于 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$，所以有

$$2a_1 - a_2 + a_3 \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$$

等，于是由柯西不等式，得到

$$\sum\frac{2a_1-a_2+a_3}{a_2+a_3} \geqslant \frac{[\sum(2a_1-a_2+a_3)]^2}{\sum(a_2+a_3)(2a_1-a_2+a_3)} =$$

$$\frac{2(\sum a_1)^2}{\sum a_1a_2 + \sum a_1a_3}$$

因此，要证原式只需证

$$(\sum a_1)^2 \geqslant 3(\sum a_1a_2 + \sum a_1a_3) \qquad ①$$

式①左边 - 右边 $= \sum a_1^2 + 2a_1a_4 + 2a_2a_5 + 2a_3a_6 - a_1a_2 - a_1a_3 - a_1a_5 -$
$a_1a_6 - a_2a_3 - a_2a_4 - a_2a_6 - a_3a_4 - a_3a_5 - a_4a_5 - a_4a_6 - a_5a_6 =$
$(a_1+a_4)^2 + (a_2+a_5)^2 + (a_3+a_6)^2 - (a_1+a_4)(a_2+a_5) -$
$(a_2+a_5)(a_3+a_6) - (a_1+a_4)(a_3+a_6) =$

$$\frac{1}{2}[(a_1-a_2+a_4-a_5)^2+(a_2-a_3+a_5-a_6)^2+(a_1-a_3+a_4-a_6)^2]\geqslant 0$$

故式①成立,原式获证.

54.（2007.01.25）简证：参见第四章“应用基本不等式证明不等式”中例1.

55.（2007.03.05）简证：先证明:若 $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$,则

$$(\sum a^3)^2\geqslant 3+2\sum a^4 \qquad ①$$

因为
$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3$$

所以
$$3+2\sum a^4\leqslant 3(\frac{\sum a^2}{3})^3+2\frac{\sum a^2}{3}\sum a^4$$

因此,只要证

$$9(\sum a^3)^2\geqslant(\sum a^3)^3+6\sum a^2\cdot\sum a^4\Leftrightarrow$$

$$2\sum a^6+18\sum b^3c^3-9\sum b^2c^2(b^2+c^2)-6a^2b^2c^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum(b^4-c^4)(b^2-c^2)-8\sum b^2c^2(b-c)^2+\sum a^2(bc+ca+ab)(b-c)^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum[(b^2+c^2)(b+c)^2-8b^2c^2+a^2(bc+ca+ab)](b-c)^2\geqslant 0$$

此式显然成立,故式①成立.于是

$$\sum\frac{1}{x^3+y+z}=\sum\frac{1+y^2+z^2}{(x^3+y+z)(1+y^2+z^2)}\leqslant\frac{3+2\sum x^2}{(\sum x^{\frac{3}{2}})^2}\leqslant 1$$

56.（2007.08.29,摘译自原书）简证：首先我们观察它表明了只要证以下这种情况

$$x_1x_2\cdots x_n=1$$

为了说明这种情况.设 $r=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 和 $y_i=\frac{x_i}{r}$ $(r=1,2,\cdots,n)$,记 $r\geqslant 1$ 和 $y_1y_2\cdots y_n=1$.因而,不等式变成

$$\sum\frac{y_1^\alpha}{y_1^\alpha+\frac{y_2+\cdots+y_n}{r^{\alpha-1}}}\geqslant 1$$

并且我们能看到只需证 $r=1$ 时不等式成立,这正表明原式只需证 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 的情况.

在 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 的假设下,我们将证明这里存在着一个合适的 p 使得

$$\frac{x_1^\alpha}{x_1^\alpha+x_2+\cdots+x_n}\geqslant\frac{x_1^p}{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p} \qquad ①$$

假如式①成立,由式①得到

$$x_2^p+\cdots+x_n^p\geqslant(x_2\cdots x_n)^{\alpha-p}(x_2+\cdots+x_n)$$

选择

$$p=\frac{(n-1)\alpha+1}{n}\quad p>1$$

代入整理得到

$$x_2^p+\cdots+x_n^p\geqslant(x_2\cdots x_n)^{\frac{p-1}{n-1}}(x_2+\cdots+x_n)$$

由

$$(x_2\cdots x_n)^{\frac{p-1}{n-1}}\leqslant(\frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1})^{p-1}$$

(根据算术 - 几何平均值不等式)可以证明

$$\frac{x_1^p+\cdots+x_n^p}{n-1}\geqslant(\frac{x_2+\cdots+x_n}{n-1})^p$$

由幂平均不等式知上式成立,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots x_n=1$ 时取等号.

57. (2007.08.30,摘译自原书)简证:证明的第一部分类似于上一题(题56)的不等式证明.最后,我们只要证明不等式

$$x_2+\cdots+x_n\geqslant(x_2\cdots x_n)^{\frac{1-p}{n-1}}(x_2^p+\cdots+x_n^p)$$

其中

$$p=\frac{(n-1)\alpha+1}{n}\quad\frac{-1}{n-2}\leqslant p<1$$

由 $p=\frac{-1}{n-2}$,不等式化简为

$$x_2+\cdots+x_n\geqslant\sqrt[n-2]{x_3,\cdots,x_n}+\cdots+\sqrt[n-2]{x_2,\cdots,x_{n-1}}$$

可以运用下面的不等式即可证明上式,即

$$\frac{x_3+\cdots+x_n}{n-2}\geqslant\sqrt[n-2]{x_3,\cdots,x_n},\cdots,\frac{x_2+\cdots+x_n}{n-2}\geqslant\sqrt[n-2]{x_2,\cdots,x_{n-1}}$$

对于 $\frac{-1}{n-2}\leqslant p<1$,根据加权算术 - 几何平均值不等式,我们有

$$\frac{1+(n-2)p}{1-p}x_2+x_3+\cdots+x_n\geqslant\frac{n-1}{1-p}x_2^p(x_2x_3\cdots x_n)^{\frac{1-p}{n-1}}$$

对于以 $x_3,\cdots,x_n$ 为开始,有类似不等式,将这些不等式相加便得到要求的不等式.当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时不等式取等号.

58. (2007.08.30,摘译自原书)简证:我们将考虑两种情况:$1<\alpha\leqslant n+1$ 和 $\alpha\geqslant n-\frac{1}{n-1}$.

(1) 若 $1<\alpha\leqslant n+1$.

由 $x_1x_2\cdots x_n\geqslant1$,可得到 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n$(根据算术 - 几何平均值不

等式)，它表明了只需证明要求的不等式在 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n$ 时成立.

我们可以证明 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 这种情况.

否则，假如我们设 $r=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 和 $y_i=\frac{x_i}{r}(i=1,2,\cdots,n)$，然后由 $r\geqslant 1$ 和 $y_1+y_2+\cdots+y_n=1$，不等式变为

$$\sum\frac{y_1}{r^{\alpha-1}y_1^{\alpha}+y_2+\cdots+y_n}\leqslant 1$$

且我们看到它表明了 $r=1$；那是代表 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$.

在这个假设下，把要求的不等式写成下面这个形式

$$\frac{x_1}{x_1^{\alpha}-x_1+n}+\frac{x_2}{x_2^{\alpha}-x_2+n}+\cdots+\frac{x_n}{x_n^{\alpha}-x_n+n}\leqslant 1$$

对任何 $x>0$，根据 Bernoulli(贝努力) 不等式，我们有

$$x^{\alpha}=[1+(x-1)]^{\alpha}\geqslant 1+\alpha(x-1)$$

因此

$$x^{\alpha}-x+n\geqslant n-\alpha+1+(\alpha-1)x>0$$

所以，只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{n-\alpha+1+(\alpha-1)x_i}\leqslant 1$$

上式明显在 $\alpha=n+1$ 时成立.

当 $\alpha<n+1$ 时，利用

$$\frac{(\alpha-1)x_i}{n-\alpha+1+(\alpha-1)x_i}=1-\frac{n-\alpha+1}{n-\alpha+1+(\alpha-1)x_i}$$

它可以被写成

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n-\alpha+1+(\alpha-1)x_i}\geqslant 1$$

设 $y_i=n-\alpha+1+(\alpha-1)x_i(i=1,2,\cdots,n)$，我们有

$$y_i>0 \text{ 和 } y_1+y_2+\cdots+y_n=n^2$$

不等式化简为

$$\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\geqslant 1$$

这里立即由柯西不等式

$$(y_1+y_2+\cdots+y_n)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}+\cdots+\frac{1}{y_n}\right)\geqslant n^2$$

得证.

(2) 若 $\alpha\geqslant n-\frac{1}{n-1}$.

由前几题证法，我们可以认为 $x_1x_2\cdots x_n=1$. 在这个假设下，只需证明

$$\frac{(n-1)x_1}{x_1^{\alpha}+x_2+\cdots+x_n}+\frac{x_1^p}{x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p}\leqslant 1 \qquad ②$$

对一个合适的实数 p,这个不等式对 $x_2,\cdots,x_n$ 有类似不等式再相加.

设 $t=\sqrt[n-1]{x_2\cdots x_n}$. 根据算术 - 几何平均值不等式,我们有 $x_2+\cdots+x_n\geqslant(n-1)t$ 和 $x_2^p+\cdots+x_n^p\geqslant(n-1)t^p$. 因而,只需证明

$$\frac{(n-1)x_1}{x_1^{\alpha}+(n-1)t}+\frac{x_1^p}{x_1^p+(n-1)t^p}\leqslant 1$$

因为 $x_1=\frac{1}{t^{n-1}}$,这个不等式等同于

$$(n-1)t^{n+q}-(n-1)t^q-t^{q-np}+1\geqslant 0$$

这里 $q=(n-1)(\alpha-1)$. 我们现在将证明这个不等式对

$$p=\frac{(n-1)(\alpha-n-1)}{n}$$

成立.

确实,对于这个 p 的值,不等式很成功通过以下变形得证

$$(n-1)t^{t+q}-(n-1)t^q-t^{n(n-1)}+1\geqslant 0$$

$$(n-1)t^q(t^n-1)-(t^n-1)(t^{n^2-2n}+t^{n^2-3n}+\cdots+1)\geqslant 0$$

$$(t^n-1)[(t^q-t^{n^2-2n})+(t^q-t^{n^2-3n})+\cdots+(t^q-1)]\geqslant 0$$

我们看到最后的不等式是成立的,当 $q\geqslant n^2-2n$ 时,正是由于 $\alpha\geqslant n-\frac{1}{n-1}$. 当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,不等式取等号.

59. (2007.08.30,摘译自原书) 简证:只需证明 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 时的情况(与题 58 类似). 根据Cauchy -Schwarz(柯西) 不等式,我们有

$$\sum\frac{x_1}{x_1^{\alpha}+x_2+\cdots+x_n}\geqslant\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{\sum x_1(x_1^{\alpha}+x_2+\cdots+x_n)}=$$

$$\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2+\sum_{i=1}^{n}x_i^{1+\alpha}-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

因此,我们只需证明

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^{1+\alpha}$$

以下分两种情况.

(1) $-1\leqslant\alpha<1$.

利用 Chebyshev(切比雪夫) 不等式和算术 - 几何平均值不等式不等式,有

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{1-\alpha}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{1+\alpha}\right)\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{1-\alpha}{n}}\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i^{1+\alpha}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{1+\alpha}$$

(2) $-1-\frac{2}{n-1}\leqslant\alpha<-1$.

通过用 $x_1^{\frac{n-1}{2}},x_2^{\frac{n-1}{2}},\cdots,x_n^{\frac{n-1}{2}}$ 各自取代 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，我们再利用 $q=\frac{(n-1)(1+\alpha)}{2}$ 代换,并且记 $-1\leqslant q<0$,因此,只需证当 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 时

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{n-1}\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i^{q}$$

利用著名的 Maclaurin(补充:麦克劳伦不等式,全名:Maclaurin's Symmetric Mean Inequality)不等式

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{n-1}\geqslant\sum_{ciclic}x_2\cdots x_n$$

结合 Chebyshev 不等式和算术 - 几何平均值不等式,我们得到要证的不等式

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^{n-1}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1-q}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{q}\right)\geqslant$$

$$\sqrt[n]{(x_1x_2\cdots x_n)^{-1-q}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{q}=\sum_{i=1}^{n}x_i^{q}$$

故原式获证,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,原不等式取等号.

60. (2007.08.30,摘译自原书)简证:我们将用归纳法证明

$$\frac{1}{1+qx_1}+\frac{1}{1+qx_2}+\cdots+\frac{1}{1+qx_n}\geqslant\frac{n}{1+q}\qquad①$$

对于任何 $q\geqslant p$ 成立.

由 $n=2$,不等式可化简为

$$\frac{(q-1)(x_1-1)^2}{(1+qx_1)(1+qx_2)}\geqslant 0$$

这显然是成立的.现在讨论不等式对于 $n-1,n\geqslant 3$ 时不等式成立.

不失一般性,假设

$$x_{n-1}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}\text{ 和 }x_n=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$

由条件 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 推出 $x_{n-1}\leqslant 1$ 和 $x_n\geqslant 1$.我们必须证明不等式①对于 $x_1x_2\cdots x_n=1$ 和 $x_1,x_2,\cdots,x_n\leqslant p_n$ 时成立,这里

$$p_n=\frac{pn-p-1}{p(n-p-1)}$$

由 $x_{n-1}\leqslant 1$ 和 $x_n\geqslant 1$,得到 $x_{n-1}x_n\leqslant x_n$,那么我们有

$$x_1,\cdots,x_{n-2},x_{n-1},x_n\leqslant p_n\leqslant p_{n-1}$$

并且,根据归纳假设,不等式对于任何 $q\geqslant p(1<p<n-2)$,有

$$\frac{1}{1+qx_1}+\frac{1}{1+qx_2}+\cdots+\frac{1}{1+qx_{n-1}x_n}\geqslant\frac{n-1}{1+q}$$

成立.

由于原要证的不等式是对于任何 $q \geq p(1 < p < n-1)$ 成立,可知剩下的只需证明

$$\frac{1}{1+qx_{n-1}}+\frac{1}{1+qx_n} \geq \frac{1}{1+qx_{n-1}x_n}+\frac{1}{1+q}$$

成立,这里等同于

$$(1-x_{n-1})(x_n-1)(q^2x_{n-1}x_n-1) \geq 0$$

由 $q^2x_{n-1}x_n \geq 1$ 得上式成立. 我们还必须去证明式①对于 $q^2x_{n-1}x_n < 1$ 成立. 根据这个假设,有

$$\frac{1}{1+qx_{n-1}}+\frac{1}{1+qx_n}=1-\frac{qx_{n-1}}{1+qx_{n-1}}+\frac{1}{1+qx_n}>1-\frac{1}{1+qx_n}+\frac{1}{1+qx_n}=1$$

从而,只需证明

$$\frac{1}{1+qx_1}+\frac{1}{1+qx_2}+\cdots+\frac{1}{1+qx_{n-2}} \geq \frac{n-q-1}{1+q}$$

考虑到 $x_i \leq p_n(i=1,2,\cdots,n-2)$,我们得到

$$\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{1+qx_i}-\frac{n-q-1}{1+q} \geq \frac{n-2}{1+qp_n}-\frac{n-q-1}{1+q}=$$

$$\frac{nq-q-1-q(n-q-1)p_n}{(1+qp_n)(1+q)}=$$

$$\frac{(q-p)[(pn-p-1)q+n-p-1]}{p(n-p-1)(1+qp_n)(1+q)} \geq 0$$

从而由归纳假设得证,当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,原不等式取等号.

注:对于 $p \to n-1$,我们发现著名不等式:

对于任何正实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,有

$$\frac{1}{1+(n-1)x_1}+\frac{1}{1+(n-1)x_2}+\cdots+\frac{1}{1+(n-1)x_n} \geq 1$$

61. (2007.02.28) 简证一:由 $abc=1$,可设 $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}$,则

$$\sum\left(\frac{1}{1+a}\right)^2+\frac{2}{\prod(1+a)}-1=\sum\left(\frac{x}{x+y}\right)^2-\sum\frac{yz}{(x+y)(x+z)}=$$

$$\frac{1}{\prod(y+z)^2}[x^4y^2+y^4z^2+z^4x^2-3x^2y^2z^2] \geq 0$$

简证二

$$\text{原式} \Leftrightarrow \sum\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{2}{\prod(1+x)}-1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{1}{(1+x)^2}-\sum\frac{1}{(1+y)(1+z)}+$$

$$\sum \frac{1}{(1+y)(1+z)}+\frac{2}{\prod(1+x)}-1\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sum\left(\frac{1}{1+y}-\frac{1}{1+z}\right)^2-\frac{\sum yz-3}{\prod(1+x)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum\frac{(y-z)^2}{2(1+y)^2(1+z)^2}-\frac{\sum yz-3}{\prod(1+x)}\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\sum(1+x)^2(y-z)^2-2\prod(1+x)\cdot\left(\sum yz-3\right)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\left[\sum(y-z)^2+\sum x^2(y-z)^2+2\sum x(y-z)^2\right]-$$

$$2\left(2+\sum x+\sum yz\right)\left(\sum yz-3\right)\geqslant 0\Leftrightarrow$$

$$\left[2\sum x^2-2\sum yz+2\left(\sum yz\right)^2-6xyz\sum x+2\sum x\cdot\sum yz-18xyz\right]-$$

$$2\left[\sum x\cdot\sum yz+\left(\sum yz\right)^2-3\sum x-\sum yz-6\right]\geqslant 0$$

(注意到 $xyz=1$)$\Leftrightarrow$

$$2\sum x^2-6\geqslant 0$$

此式显然成立.

注:原式等价式:在 $\triangle ABC$ 中,有 $\left[\prod(-a+b+c)\right]^{\frac{2}{3}}\cdot\sum\frac{1}{a^2}\geqslant 4-\frac{2r}{R}$. 其中,$a,b,c$ 为 $\triangle ABC$ 三边长,R,r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径.

62. (2007.03.10) 简证:由 Chapter 1 题 55 有 $\sum bc\geqslant\frac{9\sum a}{\sum a+6}$,因此,只要证

$$\sum a^2+9\sum bc-10\sum a=\left(\sum a\right)^2+7\sum bc-10\sum a\geqslant$$

$$\left(\sum a\right)^2+7\cdot\frac{9\sum a}{\sum a+6}-10\sum a\geqslant 0$$

即 $\left(\sum a\right)^2-4\sum a+3\geqslant 0$,由 $\sum a\geqslant 3$ 易知此式成立.

63. (2007.06.03) 简证:因为

$$\left[\sum\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}\right]^2\geqslant 3\sum\frac{ab(b^2+c^2)(a^2+c^2)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}$$

所以要证原式成立,只要证

$$\sum\frac{ab(b^2+c^2)(a^2+c^2)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\geqslant\sum ab \qquad ①$$

式①左边－右边 $=\sum\left[\frac{ab(b^2+ca+c^2-ca)(a^2+bc+c^2-bc)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}-ab\right]=$

$$\sum\left[\frac{abc(c-a)}{a^2+bc}-\frac{abc(b-c)}{a^2+bc}+\frac{abc^2(c-a)(c-b)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\right]=$$

$$\sum\frac{abc^2(c-a)(c-b)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}=$$

$$\frac{abc}{\prod(a^2+bc)}\sum c(c^2+ab)(c-a)(c-b)=$$

$$\frac{abc}{\prod(a^2+bc)}\left[\sum c^3(c-a)(c-b)+\right.$$

$$\left.abc\sum(c-a)(c-b)\right]\geqslant$$

$$0$$

(据舒尔(Shur)不等式).

故式①成立,原式获证.

注:以上证法关键在于恒等变形.

64.(2007.03.10)简证:因为

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}=\sum\left[-b+2a+\frac{(a-b)^2}{b}\right]=\sum a+\sum\frac{(a-b)^2}{b}$$

所以

$$\sum a\cdot\left(2\sum a+\sum\frac{a^2}{b}\right)=2\left(\sum a\right)^2+\sum a\cdot\sum\frac{(a-b)^2}{b}\geqslant$$

$$2\left(\sum a\right)^2+\left(\sum|a-b|\right)^2\geqslant 2\left(\sum a\right)^2+4\left(\sum a^2-\sum bc\right)=$$

$$6\sum a^2$$

即得原式.

65.(2007.02.24)简证

$$\sum\frac{a^2}{b+c}-\frac{3\sum a^3}{2\sum a^2}=\sum\left[a-\frac{1}{4}(b+c)+\frac{(2a-b-c)^2}{4(b+c)}\right]-\frac{3\sum a^3}{2\sum a^2}=$$

$$\frac{1}{2}\sum a+\frac{1}{4}\sum\frac{[(a-b)+(a-c)]^2}{(b+c)}-\frac{3\sum a^3}{2\sum a^2}=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{(a-b)^2+(a-c)^2+2(a-b)(a-c)}{(b+c)}-\left(\frac{3\sum a^3}{2\sum a^2}-\frac{1}{2}\sum a\right)=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{(a-b)^2+(a-c)^2}{(b+c)}+\frac{1}{2}\sum\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)}-$$

$$\frac{\sum(b+c)(b-c)^2}{2\sum a^2}=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{(a-b)^2+(a-c)^2}{(b+c)}+\frac{1}{4}\frac{\sum(b+c)^2(b-c)^2}{\prod(b+c)}-$$

$$\frac{\sum(b+c)(b-c)^2}{2\sum a^2}=$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}+\frac{b+c}{(c+a)(a+b)}\right](b-c)^2-\frac{\sum(b+c)(b-c)^2}{2\sum a^2}=$$

$$\frac{1}{4}\sum\frac{2\sum a}{(c+a)(a+b)}(b-c)^2-\frac{\sum(b+c)(b-c)^2}{2\sum a^2}=$$

$$\left[\frac{\sum a}{2\prod(b+c)}-\frac{1}{2\sum a^2}\right]\cdot\sum(b+c)(b-c)^2=$$

$$\frac{\sum a^3-2abc}{2\prod(b+c)\cdot\sum a^2}\cdot\sum(b+c)(b-c)^2\geqslant 0$$

注:(1) 由上证明知有更强式

$$\sum\frac{a^2}{b+c}\geqslant\frac{27\sum a^3}{16\sum a^2}-\frac{1}{16}\sum a$$

(2) 由$\frac{3\sum a^3}{\sum a^2}\geqslant\sqrt[4]{27\sum a^4}$(参见第七章“其他不等式证明例子”例40中的式(64)),得

$$\sum\frac{a^2}{b+c}>\frac{1}{2}\sqrt[4]{27\sum a^4}$$

66. (2007.08.30,摘译自原书)简证:认为$a=\max\{a,b,c\}$,由

$$E=\sum\frac{ax}{y+z}=\sum\frac{a(x+y+z)-a(y+z)}{y+z}=$$

$$(x+y+z)\sum\frac{a}{y+z}-\sum a=$$

$$\frac{1}{2}\left[\sum(y+z)\right]\left(\sum\frac{a}{y+z}\right)-\sum a$$

根据 Cauchy - Schwarz 不等式,我们得到

$$E\geqslant\frac{1}{2}\left(\sum a\right)^2-\sum a=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\frac{a+b+c}{2}$$

当且仅当$\frac{\sqrt{a}}{y+z}=\frac{\sqrt{b}}{z+x}=\frac{\sqrt{c}}{x+y}$时取等号. 因此,对于$\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}+\sqrt{c}$,表达式 E 的最小值为

$$E(a,b,c)=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\frac{a+b+c}{2}$$

这里 $x=\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}$, $y=\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}$, $z=\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$.

我们现在断定$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}+\sqrt{c}$,当$x=0$和$\frac{y}{z}=\sqrt{\frac{c}{b}}$时,$E$的表达式有最小值,并且它的最小值是

$$E(a,b,c)=2\sqrt{bc}$$

由$\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}+\sqrt{c}$,只需证明

$$\frac{Ax}{y+z}+\frac{by}{z+x}+\frac{cz}{x+y}\geqslant 2\sqrt{bc}$$

这里 $A=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$.

设 $y+z=2X$, $z+x=2Y$, $x+y=2Z$,不等式变为

$$\frac{A(Y+Z-X)}{X}+\frac{b(Z+X-Y)}{Y}+\frac{c(X+Y-Z)}{Z}\geqslant 4\sqrt{bc}$$

$$\left(A\frac{Y}{X}+b\frac{X}{Y}\right)+\left(b\frac{Z}{Y}+c\frac{Y}{Z}\right)+\left(c\frac{X}{Z}+A\frac{Z}{X}\right)\geqslant 2A+2\sqrt{bc}$$

最后一个不等式直接来自

$$A\frac{Y}{X}+b\frac{X}{Y}\geqslant 2\sqrt{Ab},\ b\frac{Z}{Y}+c\frac{Y}{Z}\geqslant 2\sqrt{bc},\ c\frac{X}{Z}+A\frac{Z}{X}\geqslant 2\sqrt{cA}$$

最后,对于 $a=\max\{a,b,c\}$ 我们得到

$$E(a,b,c)=\begin{cases}\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}-\frac{a+b+c}{2} & (\text{假如}\sqrt{a}\leqslant\sqrt{b}+\sqrt{c})\\ 2\sqrt{bc} & (\text{假如}\sqrt{a}\geqslant\sqrt{b}+\sqrt{c})\end{cases}$$

67. (2007.02.05) 简证一:原式等价于

$$\left(\sum a\right)^4\cdot\sum b^2c^2\geqslant 81a^2b^2c^2\sum a^2$$

此式可由 Chapter1 题 3 推得. 事实上我们已证

$$\left(\sum a\right)^5\cdot\sum b^2c^2\geqslant 81abc\sum a^2$$

故只需要证

$$\frac{\left(\sum a\right)^4\cdot\sum b^2c^2}{abc}\geqslant\left(\sum a\right)^5\Leftrightarrow\sum b^2c^2\geqslant abc\sum a$$

此式显然成立.

简证二:不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $c\leqslant 1$,只需证

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+2ab+2bc+2ca\geqslant(a+b+c)^2=9$$

因为
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+2ab=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+ab+ab\geqslant 4$$

又只需证

$$\frac{1}{c^2}+2bc+2ca\geqslant 5\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}+2c(a+b)\geqslant 5\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{c^2}+2c(3-c)\geqslant 5\Leftrightarrow$$

$$2c^4-6c^3+5c^2-1\leqslant 0\quad(0<c\leqslant 1)$$

通过函数在(0,1]上单调递增,易知上式成立,原命题得证.

简证三:调整法.

不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $a\geqslant 1$,只需证

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-(b^2+c^2)\geqslant\frac{2}{(\frac{a+b}{2})^2}-2(\frac{a+b}{2})^2$$

及
$$\frac{2}{(\frac{3-c}{2})^2}-2(\frac{3-c}{2})^2\geqslant c^2-\frac{1}{c^2}$$

以上两式易证成立.

注:简证二、三由上海复旦大学附中武炳杰同学于2007年9月14日提供.

68.(2007.04.17)简证:不妨设 $a\geqslant b\geqslant c\geqslant 0$,则 $c^2-bc\leqslant 0,c^2-ca\leqslant 0,a+b\leqslant 3$,则

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\leqslant$$

$$[(a+b)^2-3ab]a^2b^2\leqslant\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}ab\cdot\frac{3}{2}ab\cdot[(a+b)^2-3ab]\leqslant$$

$$\frac{4}{9}[\frac{\frac{3}{2}ab+\frac{3}{2}ab+(9-3ab)}{3}]^3=\frac{4}{9}\cdot 27=12$$

当且仅当 $c=0,\frac{3}{2}ab=9-3ab$,即 $a=2,b=1,c=0$ 时取等号.

69.(2007.03.27)简证:参见第七章"其他不等式证明例子"例45.

70.(2007.04.14)简证一:由柯西不等式有

$$[\sum bc\sqrt{2(b^2+c^2)}]^2\leqslant 2\sum bc\cdot\sum bc(b^2+c^2)$$

因此,只要证

$$(a^3+b^3+c^3+3abc)^2 \geqslant 2\sum bc \cdot \sum bc(b^2+c^2) \qquad ①$$

下面应用增量比较法证明式①.

由对称性,可设 $a \geqslant b \geqslant c$,且 $a=c+\alpha+\beta, b=c+\alpha, \alpha,\beta \in \overline{\mathbf{R}^-}$,则

式①左边 - 右边 $=[(c+\alpha+\beta)^3+(c+\alpha)^3+c^3+3c(c+\alpha)(c+\alpha+\beta)]^2-$
$2[c(c+\alpha)+c(c+\alpha+\beta)+(c+\alpha)(c+\alpha+\beta)]\cdot$
$\{c(c+\alpha)[c^2+(c+\alpha)^2]+c(c+\alpha+\beta)[c^2+(c+\alpha+\beta)^2]+$
$(c+\alpha)(c+\alpha+\beta)[(c+\alpha)^2+(c+\alpha+\beta)^2]\}=$
$[6c^3+6(2\alpha+\beta)c^2+3(3\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)c+(2\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3)]^2-$
$2[3c^2+2(2\alpha+\beta)c+(\alpha^2+\alpha\beta)][6c^4+8(2\alpha+\beta)c^3+6(3\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)c^2+$
$(10\alpha^3+15\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2+2\beta^3)c+(2\alpha^4+4\alpha^3\beta+3\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3)]=$
$4(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)c^4+2(2\alpha^3+4\alpha^2\beta+13\alpha\beta^2+12\beta^3)c^3+$
$(\alpha^4+2\alpha^3\beta+45\alpha^2\beta^2+44\alpha\beta^3+13\beta^4)c+$
$(7\alpha^4\beta^2+14\alpha^3\beta^2+13\alpha^2\beta^4+6\alpha\beta^5+\beta^6) \geqslant 0$

即式①成立,原式获证.

(2007.04.16) 简证二:由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则

原式左边 $=[\sum a^3+3abc-\sum bc(b+c)]-[\sum bc\sqrt{2b^2+2c^2}-\sum bc(b+c)]=$

$$\frac{1}{2}\sum(-a+b+c)(b-c)^2-\sum\frac{bc[(2b^2+2c^2)-(b+c)^2]}{\sqrt{2b^2+2c^2}+(b+c)}=$$

$$\frac{1}{2}\sum(-a+b+c)(b-c)^2-\sum\frac{bc(b-c)^2}{\sqrt{2b^2+2c^2}+(b+c)} \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum(-a+b+c)(b-c)^2-\sum\frac{bc(b-c)^2}{2(b+c)}=$$

$$\frac{1}{2}\sum[(-a+b+c)-\frac{bc}{b+c}](b-c)^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{2}[(-a+b+c)-\frac{bc}{b+c}](b-c)^2+\frac{1}{2}[(a-b+c)-\frac{ac}{a+c}](a-c)^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{2}[(-a+b+c)-\frac{bc}{b+c}+(a-b+c)-\frac{ac}{a+c}](b-c)^2 \geqslant$$

$$\frac{1}{2}[2c-\frac{bc}{b+c}-\frac{ac}{a+c}](b-c)^2=$$

$$\frac{c^2(a+b+2c)}{2(a+c)(b+c)}(b-c)^2 \geqslant$$

$$0$$

(注意到 $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 0$).

由上证明过程易知取等号条件.

(2007.05.02) 简证三:见第四章"应用基本不等式证明不等式"最后附录

中例 3.

71. (2007.06.20) 简证：在第七章"其他不等式证明例子"的例 33 中，取 $n=5$，且令

$$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$$

$$(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)=(a^2,b^2,c^2,\frac{1}{4},\frac{1}{4})$$

即得所要证的不等式，当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 时原不等式取等号.

72. (2007.02.05) 简证

$$\prod(1+a^2)-(\sum a)^2=1+\sum a^2+(a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2)+$$
$$\sum b^2c^2d^2+1-\sum a^2-2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)=$$
$$(ab-1)^2+(ac-1)^2+(ad-1)^2+(bc-1)^2+$$
$$(bd-1)^2+(cd-1)^2+\sum b^2c^2d^2-4\geqslant$$
$$\sum b^2c^2d^2-4\geqslant 4\sqrt[4]{(abcd)^6}-4=0$$

73. (2007.08.28，摘译自原书) 简证：记 $x=\frac{1}{n}\sum x_1$，$y=\sqrt{\frac{2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j}{n(n-1)}}$，$z=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$，则原式即证

$$nx-(n-1)z\geqslant\sqrt{\frac{(nx)^2-n(n-1)y^2}{n}}\Leftrightarrow$$
$$nx^2-2nxz+(n-1)z^2+y^2\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$n(x-z)^2+(y^2-z^2)\geqslant 0$$

由 $y\geqslant z$ 知上式成立，原式获证.

74. (2007.08.30，摘译自原书) 简证：运用归纳法，当 $n=2$ 时，原式显然成立.

当 $n=3$ 时，我们得到 Schur(舒尔) 不等式

$$\sum x_1^{k+1}(x_1-x_2)(x_1-x_2)\geqslant 0$$

假设原不等式对于 n 个数成立，下面证明对于 $n+1$ 也成立.

由齐次性，我们只需考虑 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ 的情形，另外，我们记 x_{n+1} 为 x

$$X=x_1^{n+k+1}+x_2^{n+k+1}+\cdots+x_n^{n+k+1}$$
$$Y=x_1^{n+k}+x_2^{n+k}+\cdots+x_n^{n+k}$$
$$Z=x_1^{n+k-1}+x_2^{n+k-1}+\cdots+x_n^{n+k-1}$$

$$W = x_1x_2\cdots x_n$$

于是只需证明

$$n(X + x^{n+k+1}) + Wx(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k + x^k) \geqslant (n + x)(Y + x^{n+k})$$

由归纳假设,知

$$(n-1)Y + W(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k) \geqslant nZ$$

用上面这个不等式,只需证明

$$n(X - Y) - nx(Y - Z) + x^{k+1}[W - nx^{n-1} + (n-1)x^n] \geqslant 0$$

我们对 k 考虑下面两种情况.

当 $k \geqslant 1 - n$ 时,由 Chebyshev 不等式,有

$$nY \geqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + x_n^{n+k-1})$$

因此有 $Y - Z \geqslant 0$.

由对称性,我们只需考虑 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} = x(0 < x \leqslant 1)$,那么

$$n(X - Y) - n(Y - Z)x \geqslant n(X - Y) - n(Y - Z) = x(X - 2Y + Z) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+k-1}(x_i - 1)^2 \geqslant 0$$

接下来只需证明

$$W - nx^{n-1} + (n-1)x^n \geqslant 0$$

确实,由于对于所有的 x_i,有 $x_i - x \geqslant 0$,由 Bernoulli 不等式,我们有

$$W = x^n\prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{x_i - x}{x}) \geqslant x^n(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x}{x}) = nx^{n-1} - (n-1)x^n$$

当 $k \leqslant 1 - n$ 时,由 Chebyshev 不等式,有

$$nY \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(x_1^{n+k-1} + x_2^{n+k-1} + \cdots + x_n^{n+k-1})$$

因此 $Y - Z \leqslant 0$.

由于不等式是对称的,我们只需考虑

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} = x \quad (x \geqslant 1)$$

则

$$n(X - Y) - n(Y - Z)x \geqslant n(X - Y) - n(Y - Z) \geqslant 0$$

及

$$W = x^n\prod_{i=1}^{n}(1 + \frac{x_i - x}{x}) \geqslant x^n(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i - x}{x}) = nx^{n-1} - (n-1)x^n$$

因为对于所有的 x_i,有 $-1 < \frac{x_i - x}{x} \leqslant 0$,所以完成了证明.

对于 $n \geqslant 3$,等号成立条件,当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

75. (2007.04.13) 简证:(1) 若 $a \geqslant b \geqslant c$,则

$$(a^6b^4 + b^6c^4 + c^6a^4) - (a^4b^6 + b^4c^6 + c^4a^6) =$$

$$(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)\sum b^2c^2 \geqslant 0$$

于是有

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geqslant\frac{b^4}{a^3+b^3}+\frac{c^4}{b^3+c^3}+\frac{a^4}{c^3+a^3}$$

因此得到

$$2\left(\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\right)\geqslant$$
$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4+c^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\sum(a+b)$$

即得

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}+\frac{b^4}{b^3+c^3}+\frac{c^4}{c^3+a^3}\geqslant\frac{a+b+c}{2}$$

原命题获证.

(2) 若 $a\geqslant c\geqslant b$,因为

$$\frac{a^4}{a^3+b^3}=a-\frac{b^2}{a+b}+\frac{b^2(a-b)^2}{a^3+b^3}$$

所以

$$\sum\frac{a^4}{a^3+b^3}-\frac{1}{2}\sum a=\sum\frac{b^2(a-b)^2}{a^3+b^3}-\left(\sum\frac{b^2}{a+b}-\frac{1}{2}\sum a\right)=$$
$$\sum\frac{b^2(a-b)^2}{a^3+b^3}-\frac{2\sum b^2(b+c)(c+a)-\sum a\cdot\prod(b+c)}{2\prod(b+c)}=$$
$$\sum\frac{b^2(a-b)^2}{a^3+b^3}-\frac{\sum bc[(\sum a)^2-3\sum bc]+(\sum bc)^2-3abc\sum a}{2\prod(b+c)}=$$
$$\sum\frac{b^2(a-b)^2}{a^3+b^3}-\frac{\sum bc\cdot\sum(b-c)^2+\sum a^2(b-c)^2}{4\prod(b+c)}=$$
$$\sum\frac{b^2(a-b)^2}{a^3+b^3}-\sum\frac{(b-c)^2}{4(b+c)}=$$
$$\sum\left[\frac{c^2}{b^3+c^3}-\frac{1}{4(b+c)}\right](a-b)^2=$$
$$\sum\frac{(3c^2+bc-b^2)(a-b)^2}{b^3+c^3}$$

由于 $a\geqslant c\geqslant b$,则 $3a^2+ca-c^2\geqslant 0$,因此,只需证

$$\frac{(3c^2+bc-b^2)(a-b)^2}{b^3+c^3}+\frac{(3b^2+ab-a^2)(a-c)^2}{a^3+b^3}\geqslant 0 \qquad ①$$

又由于

$(a^3+b^3)^2(3c^2+bc-b^2)+(a^3+c^3)(b^3+c^3)(3b^2+ab-a^2)\geqslant$
$3c^2(a^3+b^3)^2-a^2(a^3+c^3)(b^3+c^3)\geqslant$
$3c^2(a^3+b^3)^2-a^2(a^3+c^3)(b^3+c^3)=$
$a^5(2ac^2-b^3-c^3)+a^2c^2(a^4-c^4)+a^2b^3c^2(a-c)+5a^3b^3c^2+3b^6c^2\geqslant$
0

因此,有

$$\frac{(a^3+b^3)(3c^2+bc-b^2)}{b^3+c^3}+\frac{(a^3+c^3)(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3}\geqslant 0 \qquad ②$$

另外,易证

$$\frac{(a-b)^2}{a^3+b^3}\geqslant\frac{(a-c)^2}{a^3+c^3} \qquad ③$$

由式②、③,并注意到 $3c^2+bc-b^2\geqslant 0$,得到

$$\frac{(3c^2+bc-b^2)(a-b)^2}{b^3+c^3}+\frac{(3b^2+ab-a^2)(a-c)^2}{a^3+b^3}=$$

$$\frac{(a^3+b^3)(3c^2+bc-b^2)}{b^3+c^3}\cdot\frac{(a-b)^2}{a^3+b^3}+\frac{(a^3+c^3)(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3}\cdot\frac{(a-c)^2}{a^3+c^3}\geqslant$$

$$\left[\frac{(a^3+b^3)(3c^2+bc-b^2)}{b^3+c^3}+\frac{(a^3+c^3)(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3}\right]\cdot\frac{(a-c)^2}{a^3+c^3}\geqslant$$

$$0$$

因此式①成立.

综上,原命题获证.

第十章 猜想

以下集中整理了本书中的22道猜想,以便供大家研究.

1. 设 $\alpha_i\in[0,\frac{\pi}{2})(i=1,2,\cdots,n)$, $\alpha=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i}{n}$,则

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\right)\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}\cos^2\alpha_i\right)\leqslant n\tan\alpha\cdot\cos^{2n}\alpha$$

当且仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n$ 时,原式取等号.

2. 设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,记 $A=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,又记 $x_i=\frac{a_i}{A-a_i}$, $i=1,2,\cdots,n$. $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称式,则有

$$\frac{(n-1)s_1}{C_n^1}\geqslant\frac{(n-1)^2s_2}{C_n^2}\geqslant\frac{(n-1)^3s_3}{C_n^3}\geqslant\cdots\geqslant\frac{(n-1)^ns_n}{C_n^n}$$

3. 设 $a_i\in\overline{\mathbf{R}^-}(i=1,2,\cdots,n)$,且 $\sum a^2=1$,则

$$\sum\sqrt{1-a_1a_2}\geqslant\sqrt{n(n-1)}$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ 时取等号.

4. 设 $x_i \in \mathbf{R}^+, i = 1,2,\cdots,n$,则

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_1} \geqslant \sqrt{n\sum x_1^2}$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时,原式取等号.

5. 设 $x_i \in \mathbf{R}^+ (i = 1,2,\cdots,n)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + x_i} \leqslant 1$,则

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\prod x_1)^{\frac{2}{n}}$$

6. 当 $a,b \in \overline{\mathbf{R}^-}$,$n$ 为大于 1 的正整数时,有

$$2(a^n + b^n)^{n+1} \geqslant (a^{n+1} + b^{n+1})(a^{n-1} + b^{n-1})^{n+1}$$

当且仅当 $a = b$ 时取等号.

7. 设 $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-} (i = 1,2,3,\cdots,m)$,$m,n$ 为正整数,且 $n \geqslant m \geqslant 2$,则

$$m(\sum_{i=1}^{m} a_i^n)^{n+1} \geqslant \sum_{i=1}^{m} a_i^{n+1} \cdot (\sum_{i=1}^{m} a_i^{n-1})^{n+1}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m$ 时,原式取等号.

若上述猜想成立,则对于任意非负数 $a_{ij} (i = 1,2,\cdots,n+1, j = 1,2,\cdots,m, n \geqslant m \geqslant 2)$,有

$$m\prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^n \geqslant \prod_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n+1} a_{ij}$$

8. 设 $a \in \overline{\mathbf{R}^-}$,$n$ 为正整数,$n \geqslant 2$,则

$$2(1 + a^n)^{2n-1} \geqslant (1 + a^{2n-1})(1 + a^{n-1})^{2n-1}$$

当且仅当 $a = 1$ 时取等号.

9. 设 $a,b,c \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $abc \leqslant 1$,则

$$\frac{a}{1+b+c} + \frac{b}{1+c+a} + \frac{c}{1+a+b} + (1-a)(1-b)(1-c) \geqslant \frac{7}{8}$$

当且仅当 $a = b = c = \frac{1}{2}$ 时,原式取等号.

10. 设 $x_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^n = n$,则

$$(x_2x_3\cdots x_n)^{n+1} + (x_1x_3\cdots x_n)^{n+1} + \cdots + (x_1x_2\cdots x_{n-1})^{n+1} \leqslant n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ 时,原式取等号.

11. 设 $x_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,2n$,且 $\sum\limits_{i=1}^{2n} x_i^n = 2n$,则

$$(x_2x_3\cdots x_{2n})^{n+1} + (x_1x_3\cdots x_{2n})^{n+1} + \cdots + (x_1x_2\cdots x_{2n-1})^{n+1} \leqslant 2n$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2n} = 1$ 时,原式取等号.

12. $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n$,记 $\lambda = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leqslant 1, m \geqslant n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^m) \geqslant (1+\lambda^m)^n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时,原式取等号.

13. 当 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}^+, n = 5,6,7,\cdots,13$ 以及 15,17,19,21,23 时有

$$\sum \frac{x_1}{x_2+x_3} \geqslant \frac{1}{2}\sum \frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}$$

14. 设 $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n, m, n$ 为正整数,且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^m) \geqslant \prod_{i=1}^{n}(1+a_i^{m-1})$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时取等号.

15. 设 $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n, m, n$ 为正整数,且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+a_i^m}{1+a_i^{m-1}} \leqslant n\prod_{i=1}^{n}\frac{1+a_i^m}{1+a_i^{m-1}}$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时取等号.

16. 设 $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n$,且 $\sum_{i=1}^{n} a_i = n, m, n$ 为正整数,且 $m \geqslant n$,则

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i^m) \geqslant 2^n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ 时等号.

17. 设 $a_i \in \overline{\mathbf{R}^-}, i = 1,2,\cdots,n$,且 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a \leqslant 1$,则

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1+a_i}{1+a_i^2} \leqslant \left(\frac{1+a}{1+a^2}\right)^n$$

当且仅当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ 时取等号.

18. 设 $\beta_i, \varphi_i \in \mathbf{R}, i = 1,2,\cdots,n, n \geqslant 3$,且 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i = \pi$,则

$$\sum \sin\varphi_1(-\sin\beta_1 + \sin\beta_2 + \cdots + \sin\beta_n) \leqslant n(n-2)\sin^2\frac{\pi}{n}$$

当 $n = 4$ 时,当且仅当

$$(-\sin\beta_1+\sin\beta_2+\sin\beta_3+\sin\beta_4)\cos\varphi_1 =$$
$$(\sin\beta_1-\sin\beta_2+\sin\beta_3+\sin\beta_4)\cos\varphi_2 =$$
$$(\sin\beta_1+\sin\beta_2-\sin\beta_3+\sin\beta_4)\cos\varphi_3 =$$
$$(\sin\beta_1+\sin\beta_2+\sin\beta_3-\sin\beta_4)\cos\varphi_4$$

时取等号;其余情况,当且仅当 $\beta_i = \varphi_i = \frac{\pi}{n}(i = 1,2,\cdots,n)$ 时取等号.

19. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \overline{\mathbf{R}^-}$,且 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant n-1$,证明或否定:

(1) $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+(n-1)x_1x_2\cdots x_n \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

(2) $n-1+x_1x_2\cdots x_n \geqslant x_1+x_2+\cdots+x_n$;

(3) $1+(n-1)x_1x_2\cdots x_n \geqslant \sum x_2x_3\cdots x_n$.

当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中有一个为0,其余 $n-1$ 个都等于1时,以上三式均取等号.这里 $\sum x_2x_3\cdots x_n$ 表示 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中每 $n-1$ 个数乘积之和.

20. 设四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 外接球半径为 R,内切球半径为 r,四个顶点 A_1,A_2,A_3,A_4 所对的面的三角形面积分别为 S_1,S_2,S_3,S_4,记 $S=\sum_{i=1}^{4}S_i$,证明或否定:

(1) $\sum_{i=1}^{4}S_i(S-2S_i) \geqslant \frac{6r}{R}\cdot\sum_{i=1}^{4}S_i^2$;

(2) $\frac{\sum_{i=1}^{4}S_i}{3\sqrt{3}r^2} \geqslant \sum_{i=1}^{4}\frac{S-2S_i}{S_i}$.

注:以上(1)中的不等式笔者于1994年3月提出,至今仍未见有人证明或否定.上述猜想可参见《中学数学研究》(广东),2005年第9期,杨学枝文:"关于四面体的一个不等式".

21. 设 $x_i\in\overline{\mathbf{R}^-}$,$i=1,2,\cdots,n$,记

$$s_1=\sum_{i=1}^{n}x_i,s_{n-1}=x_2x_3\cdots x_n+x_1x_3\cdots x_n+\cdots+x_1x_2\cdots x_{n-1},s_n=x_1x_2\cdots x_n$$

则

$$s_1^n-(n-1)^{n-1}s_1s_{n-1}+n^2[(n-1)^{n-1}-n^{n-2}]s_n\geqslant 0$$

当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取等号.

22. 设 $a_i,b_i,\cdots,l_i\in\overline{\mathbf{R}^-}(i=1,2,\cdots,n-1)$,且

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i=\sum_{i=1}^{n-1}b_i=\cdots=\sum_{i=1}^{n-1}l_i=s$$

记

$$D=\begin{vmatrix}0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ b_1 & 0 & b_2 & \cdots & b_{n-1}\\ \vdots & \vdots & & & \vdots\\ l_1 & l_2 & \cdots & l_{n-1} & 0\end{vmatrix}$$

$A_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 D 中第 i 行第 i 列元素的代数余子式,则 $A_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 的绝对值中至少有一个不大于 $\frac{|D|}{s}$.

初等不等式研究文章(未公开发表)

第十一章

1 论匹多不等式

设 a,b,c 与 a',b',c' 分别表示 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 三边,Δ 与 Δ' 分别表示它们的面积,则有不等式

$$a'^2(b^2+c^2-a^2)+b'^2(c^2+a^2-b^2)+c'^2(a^2+b^2-c^2)\geqslant 16\Delta\Delta'$$

当且仅当 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ 时取等号.

这就是著名的匹多(Pedoe)不等式.关于匹多不等式的种种推广以及众多的证明方法,已有许多人进行了研究,本文试从另一个角度——等式来对匹多不等式作进一步剖析,并得到匹多不等式的一些推广.

为以后叙述上方便,我们把匹多不等式左边的式子记为 H,则有下述等式:

等式一

$$(16\Delta\Delta')^2=[H-2(ab'-ba')]^2-[2ab\cdot(a'^2+b'^2-c'^2)-2a'b'(a^2+b^2-c^2)]^2$$

等式二

$$(16\Delta\Delta')^2=[2(ab'+ba')^2-H]^2-[2ab\cdot(a'^2+b'^2-c'^2)+2a'b'(a^2+b^2-c^2)]^2$$

等式三

$$H^2-(16\Delta\Delta')^2=2\left(\left|\begin{pmatrix}a^2&b^2&c^2\\a'^2&b'^2&c'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2&a'^2\\b^2&b'^2\\c^2&c'^2\end{pmatrix}\right|-\begin{vmatrix}a^2&b^2&c^2\\a'^2&b'^2&c'^2\\1&1&1\end{vmatrix}^2\right)$$

证 由于$(4\Delta)^2=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2$，$(4\Delta')^2=(2a'b')^2-(a'^2+b'^2-c'^2)^2$，并据恒等式$(p^2-q^2)(x^2-y^2)=(px\pm qy)^2-(py\pm qx)^2$便有等式

$$(16\Delta\Delta')^2=[4aba'b'\pm(a^2+b^2-c^2)(a'^2+b'^2-c'^2)]^2-[2ab(a'^2+b'^2-c'^2)\pm2a'b'(a^2+b^2-c^2)]^2$$

另外，易证

$$4aba'b'-(a^2+b^2-c^2)(a'^2+b'^2-c'^2)=H-2(ab'-ba')^2$$
$$4aba'b'+(a^2+b^2-c^2)(a'^2+b'^2-c'^2)=2(ab'+ba')^2-H$$

于是等式一、等式二得证.

关于等式三

$$H^2-(16\Delta\Delta')^2=[(a^2+b^2-c^2)(a'^2+b'^2-c'^2)-2(a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2)]^2-[(a^2+b^2-c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)][(a'^2+b'^2-c'^2)^2-2(a'^4+b'^4-c'^4)]$$

设向量$\vec{x}=(a^2,b^2,c^2)$，$\vec{x'}=(a'^2,b'^2,c'^2)$，记

$$\alpha=a^2+b^2+c^2,\alpha'=a'^2+b'^2+c'^2$$

则

$$H^2-(16\Delta\Delta')^2=(\alpha\alpha'-2\vec{x}\cdot\vec{x'})^2-(\alpha^2-2\vec{x}^2)(\alpha'^2-2\vec{x}'^2)=$$
$$-4\alpha\alpha'(\vec{x}\cdot\vec{x'})+4(\vec{x}\cdot\vec{x'})^2+2\alpha'^2\vec{x}^2+2\alpha^2\vec{x}'^2-4\vec{x}^2\cdot\vec{x}'^2=$$
$$2(\alpha\vec{x'}-\alpha'\vec{x})^2-4(\vec{x}\times\vec{x'})^2$$
$$2\left(\left|\begin{pmatrix}a^2&b^2&c^2\\a'^2&b'^2&c'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2&a'^2\\b^2&b'^2\\c^2&c'^2\end{pmatrix}\right|-\begin{vmatrix}a^2&b^2&c^2\\a'^2&b'^2&c'^2\\1&1&1\end{vmatrix}^2\right)=$$
$$2(\vec{x}\times\vec{x'})^2-[3\vec{x}^2\vec{x}'^2+2\alpha\alpha'(\vec{x}\cdot\vec{x'})-3(\vec{x}\cdot\vec{x'})^2-\alpha^2\vec{x}'^2-\alpha'^2\vec{x}^2]=$$
$$2(\alpha\vec{x'}-\alpha'\vec{x})^2-4(\vec{x}\times\vec{x'})^2$$

故等式三成立.

由等式三可知，匹多不等式与下列不等式等价

$$\left[\left|\begin{pmatrix}a^2&b^2&c^2\\a'^2&b'^2&c'^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2&a'^2\\b^2&b'^2\\c^2&c'^2\end{pmatrix}\right|\right]^{\frac{1}{2}}\geqslant\begin{vmatrix}a^2&b^2&c^2\\a'^2&b'^2&c'^2\\1&1&1\end{vmatrix}$$

由等式一和等式二容易得到不等式：

(1) $H \geqslant 16\Delta\Delta' + (ab' - ba')^2$，当且仅当 $C = C'$ 时取等号；

(2) $H \leqslant 2(ab' + ba')^2 - 16\Delta\Delta'$，当且仅当 $C + C' = 180°$ 时取等号.

下面我们给出若干个类似于上述等式的推广以及匹多不等式的推广.

我们约定 $\triangle A_iB_iC_i$ 的边长 $B_iC_i = a_i, C_iA_i = b_i, A_iB_i = c_i$，面积为 $\Delta_i, i = 1, 2, \cdots, n$，则有

1.

$$\begin{aligned}(4^3\Delta_1\Delta_2\Delta_3)^2 = &[8a_1a_2a_3b_1b_2b_3 - 2a_1b_1(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 - c_3^2) + \\ &2a_2b_2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)(a_3^2 + b_3^2 - c_3^2) - \\ &2a_3b_3(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)]^2 - \\ &[4a_1a_2b_1b_2(a_3^2 + b_3^2 - c_3^2) - 4a_1a_3b_1b_3(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2) + \\ &4a_2a_3b_2b_3(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2) - \\ &(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 - c_3^2)]^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}32\Delta_1\Delta_2\Delta_3 \leqslant &4a_1a_2a_3b_1b_2b_3 - a_1b_1(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)(a_3^2 + b_3^2 - c_3^2) + \\ &a_2b_2(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)(a_3^2 + b_3^2 - c_3^2) - \\ &a_3b_3(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2)\end{aligned}$$

当且仅当 $\cos C_1 - \cos C_2 + \cos C_3 = \cos C_1 \cos C_2 \cos C_3$ 时取等号.

还可以推广到 n 个三角形的情况. 若在 $n = 3$ 时，取 $\triangle A_3B_3C_3$ 为直角三角形便得到以上不等式 1.

我们约定圆内接四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 和 $A_2B_2C_2D_2$ 的四条边分别为 a_1, b_1, c_1, d_1 和 a_2, b_2, c_2, d_2 面积分别为 s_1, s_2，则有

1.

$$\begin{aligned}(16s_1s_2)^2 = &[4(a_1b_1 + c_1d_1)(a_2b_2 + c_2d_2) - \\ &(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 - d_2^2)]^2 - \\ &[2(a_1b_1 + c_1d_1)(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 - d_2^2) - \\ &2(a_2b_2 + c_2d_2)(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2)]^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}16s_1s_2 \leqslant &4(a_1b_1 + c_1d_1)(a_2b_2 + c_2d_2) - \\ &(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2) \\ &(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 - d_2^2)\end{aligned}$$

当且仅当 a_1, b_1 边所夹的角与 a_2, b_2 边所夹的角相等时取等号.

同样可以推广到 n 个圆内接四边形的情况.

（写作时间：1985. 01. 01）

2　对一个三角不等式的再探讨

笔者在"一个三角不等式的再推广"① 一文中，曾经给出并证明了如下三角不等式

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x}\lambda+\frac{zx}{y}u+\frac{xy}{z}v\right)\cdot\sqrt{\frac{\lambda+u+v}{\lambda uv}}\qquad(1)$$

这里 x,y,z 是使 $xyz>0$ 的任意实数，λ,u,v 为任意正数，角 α,β,γ 满足

$$\alpha+\beta+\gamma=n\pi\quad(n\in\mathbf{Z})$$

当且仅当

$$\begin{cases}\dfrac{x}{\lambda}\sin\alpha=\dfrac{y}{u}\sin\beta=\dfrac{z}{v}\sin\gamma\\ x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma\end{cases}$$

时等号成立.

由不等式(1) 可以推导出许许多多三角不等式，由此可见不等式(1) 是一个十分有用的不等式. 本文将不等式(1) 由三个角推广到四个角的情况，然后再进一步对不等式(1) 进行探讨. 首先提出一个新颖的三角不等式，即以下定理.

定理 1　设 $x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$，角 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ 满足

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi\quad(n\in\mathbf{Z})$$

则

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+w\sin\theta\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}}\qquad(2)$$

当且仅当 $x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=w\cos\theta$ 时，式(2) 取等号.

证明　设 $u=x\sin\alpha+y\sin\beta,v=z\sin\gamma+w\sin\theta$，于是

$$u^2=(x\sin\alpha+y\sin\beta)^2\leqslant(x\sin\alpha+y\sin\beta)^2+(x\cos\alpha-y\cos\beta)^2=x^2+y^2-2xy\cos(\alpha+\beta)$$

由于 x,y 均为正数，由此便有

$$\cos(\alpha+\beta)\leqslant\frac{x^2+y^2-u^2}{2xy}\qquad①$$

同理，可以得到

$$\cos(\gamma+\theta)\leqslant\frac{z^2+w^2-v^2}{2zw}\qquad②$$

---

① 杨学枝，一个三角不等式的再推广，《中学数学》，1988，(1).

由于 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi(n\in\mathbf{Z})$,因此

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\gamma+\theta)=0$$

今将以上①、②两式左右两边分别相加,便得到

$$\frac{x^2+y^2-u^2}{2xy}+\frac{z^2+w^2-v^2}{2zw}\geqslant 0$$

也就是

$$\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\leqslant\frac{x^2+y^2}{xy}+\frac{z^2+w^2}{zw}=\frac{(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}$$

另外,再由柯西不等式,有

$$(u+v)^2\leqslant\left(\frac{u^2}{xy}+\frac{v^2}{zw}\right)(xy+zw) \qquad ③$$

因此得到

$$u+v\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}}$$

即

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma+w\sin\theta\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}}$$

由上述不等式①、②、③知道,当且仅当 $x\cos\alpha=y\cos\beta, z\cos\gamma=w\cos\theta$, $\frac{u}{xy}+\frac{v}{zw}$ 同时成立时,式(2)中的等号成立,此时我们可以证明 $x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=w\cos\theta$.

事实上,由 $x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$, $x\cos\alpha=y\cos\beta, z\cos\gamma=w\cos\theta$,可知 $\sin(\alpha+\beta)\neq 0$, $\sin(\gamma+\theta)\neq 0$,由此有

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\\&\sin\alpha\cdot\frac{y\cos\beta}{y}+\frac{x\cos\alpha}{x}\cdot\sin\beta=\\&x\cos\alpha\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{y}+\frac{\sin\beta}{x}\right)\end{aligned}$$

因 $x\cos\alpha=y\cos\beta$,所以上式等于

$$x\cos\alpha\cdot\frac{x\sin\alpha+y\sin\beta}{xy}$$

同理可得

$$\sin(\gamma+\theta)=z\cos\gamma\cdot\frac{z\sin\gamma+w\sin\theta}{zw}$$

注意到 $\sin(\alpha+\beta)=\sin(\gamma+\theta)$ 以及 $\frac{x\sin\alpha+y\sin\beta}{xy}=\frac{z\sin\gamma+w\sin\theta}{zw}\neq 0$,便得到 $x\cos\alpha=z\cos\gamma$,所以式(2)中取等号的条件为

$$x\cos\alpha = y\cos\beta = z\cos\gamma = w\cos\theta$$

定理 1 获证.

由定理 1 取 $x = y = z = w$,即得下面的推论.

推论 1 若 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,则

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta\leqslant 2\sqrt{2} \tag{3}$$

当且仅当 $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,式(3) 取等号.

若用 $\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{2}-\beta,\frac{\pi}{2}-\gamma,\frac{\pi}{2}-\theta$ 分别取代定理 1 中的 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$,仍满足定理 1 的条件,因此有下面推论.

推论 2 设 $x,y,z,w\in\mathbf{R}^+$,角 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ 满足

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

则

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+w\cos\theta\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}} \tag{4}$$

当且仅当 $x\sin\alpha=y\sin\beta=w\sin\gamma=z\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,式(4) 取等号.

由式(4) 立即得到下面推论.

推论 3 设 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,则

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta\leqslant 2\sqrt{2} \tag{5}$$

当且仅当 $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\sin\theta$ 时,式(5) 取等号.

由定理 1,我们可以得到如下重要三角不等式.

推论 4 设

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\theta'=(2k'+1)\pi\quad(k'\in\mathbf{Z})$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

那么

$$\begin{aligned}&(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta)\sin\alpha'+\\&(\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta)\sin\beta'+\\&(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin\theta)\sin\gamma'+\\&(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin\theta)\sin\theta'\leqslant\\&4\end{aligned} \tag{6}$$

当且仅当

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\cos\alpha'=\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}\cos\beta'=$$
$$\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\theta}{2}\cos\gamma'=$$

$$\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\theta+\gamma}{2}\cos\theta'$$

时,式(6) 取等号.

证明 令

$$x=-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta$$
$$y=\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta$$
$$z=\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin\theta$$
$$w=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin\theta$$

则有

$$x=-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta=$$
$$-2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+\theta}{2}\cos\frac{\gamma-\theta}{2}=$$
$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}[\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2})+\cos\frac{\gamma-\theta}{2})]$$

注意 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,上式得

$$4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}$$

同理还可以得到

$$y=4\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}$$
$$z=4\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\theta}{2}$$
$$w=4\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\theta+\gamma}{2}$$

另外,若反复注意到 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi(k\in\mathbf{Z})$,并经计算不难得到

$$xy+zw=4\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)$$
$$yz+xw=4\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)$$
$$zx+yw=4\sin(\gamma+\alpha)\sin(\alpha+\beta)$$
$$xyzw=4\sin^2(\beta+\gamma)\sin^2(\gamma+\alpha)\sin^2(\alpha+\beta)$$

由此得到

$$\sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}}=4$$

于是根据定理 1 便得到了式(6). 根据定理 1 中式(2) 的取等号条件便知,当且仅当

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\cos\alpha'=\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}\cos\beta'=$$

$$\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\theta}{2}\cos\gamma' =$$
$$\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\theta+\gamma}{2}\cos\theta'$$

时，式(6)取等号.

如果在推论4中，把$\alpha,\beta,\gamma,\theta$和$\alpha',\beta',\gamma',\theta'$分别用$\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{2}-\beta,\frac{\pi}{2}-\gamma,\frac{\pi}{2}-\theta$和$\frac{\pi}{2}-\alpha',\frac{\pi}{2}-\beta',\frac{\pi}{2}-\gamma',\frac{\pi}{2}-\theta'$取代之，这时推论4中的条件仍然满足，因此又有下面推论.

推论5 设

$$\alpha'+\beta'+\gamma'+\theta'=(2k'+1)\pi \quad (k'\in\mathbf{Z})$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=(2k+1)\pi \quad (k\in\mathbf{Z})$$

那么有以下诸不等式

$$\begin{aligned}&(-\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta)\cos\alpha'+\\&(\sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta)\cos\beta'+\\&(\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma+\sin\theta)\cos\gamma'+\\&(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin\theta)\cos\theta'\leqslant\\&4\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}&(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta)\sin\alpha'+\\&(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta)\sin\beta'+\\&(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma+\cos\theta)\sin\gamma'+\\&(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos\theta)\sin\theta'\leqslant\\&4\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}&(-\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta)\cos\alpha'+\\&(\cos\alpha-\cos\beta+\cos\gamma+\cos\theta)\cos\beta'+\\&(\cos\alpha+\cos\beta-\cos\gamma+\cos\theta)\cos\gamma'+\\&(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos\theta)\cos\theta'\leqslant\\&4\end{aligned}\tag{9}$$

由定理1中式(2)的取等号条件，不难分别得到(7)、(8)、(9)诸式中的取等号条件.

现在，我们再回过头来，对式(1)作进一步探讨，即有以下定理.

定理2 设$x,y,z\in\mathbf{R}^+$，角α,β,γ满足$\alpha+\beta+\gamma=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则

$$x\sin\alpha+y\sin\beta+z\sin\gamma\leqslant\sqrt{\frac{(xy+zw)(yz+xw)(zx+yw)}{xyzw}}\tag{10}$$

或者

$$x\sin\alpha + y\sin\beta + z\sin\gamma \leqslant \frac{1}{w^2}\sqrt{(x^2-w^2)(y^2-w^2)(z^2-w^2)} \qquad (10')$$

(或 $\leqslant \sqrt{(w+\frac{zx}{y})(w+\frac{xy}{z})+(w+\frac{xy}{z})(w+\frac{yz}{x})+(w+\frac{yz}{x})(w+\frac{zx}{y})}$) 当且仅当 $x\cos\alpha = y\cos\beta = z\cos\gamma = (-1)^{k-1}w$ 时,式(10) 或式(10′) 取等号. 这里 w 是方程

$$2xyzw^3 + (y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)w^2 - x^2y^2z^2 = 0 \qquad (※)$$

的正实数根. 为便于记忆,式(※) 也可记作

$$\begin{vmatrix} -\frac{xyz}{w} & y^2 & z^2 \\ x^2 & -\frac{xyz}{w} & z^2 \\ x^2 & y^2 & -\frac{xyz}{w} \end{vmatrix} = 0$$

注 由式(※) 中将 $xyz = 2w^3 + w(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z})$ 代入式(10),即得式(10′) 括号内式子.

证明 下面仅就 k 为奇数时加以证明,若 k 为偶数,则令 $\alpha = \pi - \alpha'$,$\beta = \pi - \beta'$,$\gamma = \pi - \gamma'$,这样就转化为 k 为奇数时的情况了.

在定理 1 中,取 $\theta = 0$ 代入式(2) 便立即得到式(10),当且仅当 $x\cos\alpha = y\cos\beta = z\cos\gamma = w$ 时,式(10) 取等号. 下面我们就来证明 w 是三次方程(※)的正实数根.

事实上,由已知条件 $\alpha + \beta + \gamma = (2n+1)\pi(n \in \mathbf{Z})$,易证得

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$$

(请读者自行证明).

又由于 $\cos\alpha = \frac{w}{x}$,$\cos\beta = \frac{w}{y}$,$\cos\gamma = \frac{w}{z}$,代入上式三角等式然后加以整理便得到式(※),再由三次方程根的判别式不难知道,方程(※) 必有三个实根,且其中仅有一个是正实根.

现在,我们来证明式(10′),由式(10) 取等号条件有 $\cos\alpha = \frac{w}{x}$,$\cos\beta = \frac{w}{y}$,$\cos\gamma = \frac{w}{z}$,即 $x = \frac{w}{\cos\alpha}$,$y = \frac{w}{\cos\beta}$,$z = \frac{w}{\cos\gamma}$,分别代入式(10) 和式(10′)右边式子,容易证得它们是相等的,由此可知式(10) 和式(10′) 是等价的,证毕.

推论 6 设 p,q 为正数,角 α,β,γ 满足 $\alpha + \beta + \gamma = k\pi(k \in \mathbf{Z})$,则

$$p\sin\alpha+q(\sin\beta+\sin\gamma)\leqslant\frac{q^2-w^2}{w^2}\sqrt{p^2-w^2} \tag{11}$$

这里 $w=\frac{q}{4p}[\sqrt{8p^2+q^2}-pq]$，当且仅当 $p\cos\alpha=q\cos\beta=q\cos\gamma=(-1)^{k-1}w$ 时，式(11) 取等号.

只要在定理2中取 $x=p,y=z=q$ 代入式(10′) 及方程式(※)，便可得到.

推论7 设 λ,u,v 均为正数，角 α,β,γ 满足 $\alpha+\beta+\gamma=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则有

$$\sqrt{\frac{\lambda}{u+v}}\sin\alpha+\sqrt{\frac{u}{v+\lambda}}\sin\beta+\sqrt{\frac{v}{\lambda+u}}\sin\gamma\leqslant\sqrt{\frac{(\lambda+u+v)^3}{(u+v)(v+\lambda)(\lambda+u)}} \tag{12}$$

记 $x=\sqrt{\frac{\lambda}{u+v}},y=\sqrt{\frac{u}{v+\lambda}},z=\sqrt{\frac{v}{\lambda+u}}$，则当且仅当 $x\cos\alpha=y\cos\beta=z\cos\gamma=(-1)^{k-1}xyz$ 时，式(12) 取等号.

只要在定理2中取 $x=\sqrt{\frac{\lambda}{u+v}},y=\sqrt{\frac{u}{v+\lambda}},z=\sqrt{\frac{v}{\lambda+u}}$，则有 $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}=2$，即 $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2+2x^2y^2z^2-1=0$，由此得到 $y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2=1-2x^2y^2z^2$ 代入方程式(※)，求得正根 $w=xyz$，再将 $w=xyz$ 代入式(10) 的右边并整理便可得到式(12)，它的取等号条件不难由式(10) 中取等号条件而得到.

利用本文中的两个定理及推论可以求得一些三角函数的极值，下面略举三例.

例1 求函数 $y=\sin\alpha+2\sin\beta+3\sin\gamma+4\sin\theta$ 的极大值，其中 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$.

解 在式(2) 中，取 $x=1,y=2,z=3,w=4$，即得

$$\sin\alpha+2\sin\beta+3\sin\gamma+4\sin\theta\leqslant\sqrt{\frac{385}{6}}$$

即 y 有极大值为 $\sqrt{\frac{385}{6}}$.

例2 求函数 $y=\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{5}\sin\beta+\sqrt{10}\sin\gamma$ 的极大值，其中 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，并求出取得极大值时的角 α,β,γ.

解 在定理2中，取 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{5},z=\sqrt{10}$，代入方程式(※)，并化简得到

$$w^3+4w^2-5=0$$

此方程有正根 $w=1$，将 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{5},z=\sqrt{10},w=1$ 同时代入不等式(10′)，

得到

$$\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{5}\sin\beta+\sqrt{10}\sin\gamma\leqslant 6$$

因此,函数有极大值为6,这时 $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{10}}$,即 $\alpha=\frac{\pi}{4},\beta=\arccos\frac{\sqrt{5}}{5},\gamma=\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$.

例3 求函数 $y=\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta+\sqrt{6}\sin\gamma$ 的极大值,其中 $\alpha+\beta+\gamma=180°$,并求出取得极大值时的角 α,β,γ.

解 在定理2中,取 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{3},z=\sqrt{6}$,代入方程(※),并化简得到

$$w^3+3w^2-3=0$$

根据三次方程求根公式,可求得其正根 $w=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec 10°$,将 $x=\sqrt{2},y=\sqrt{3}$,$z=\sqrt{6},w=\frac{\sqrt{3}}{2}\sec 10°$ 同时代入不等式(10′),并经化简,得到

$$\sqrt{2}\sin\alpha+\sqrt{3}\sin\beta+\sqrt{6}\sin\gamma\leqslant\frac{\sqrt{2}}{4}(\csc 10°)^{\frac{3}{2}}$$

因此,函数有极大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}(\csc 10°)^{\frac{3}{2}}$,这时

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{4}\sec 10°,\cos\beta=\frac{1}{2}\sec 10°,\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{4}\sec 10°$$

即

$$\alpha=\arccos(\frac{\sqrt{6}}{4}\sec 10°),\beta=\arccos(\frac{1}{2}\sec 10°),\gamma=\arccos(\frac{\sqrt{2}}{4}\sec 10°)$$

最后,我们给出一个关于平面上两个凸四边形的边长与面积关系的不等式.

定理3 设平面上两个凸四边形的边长分别为 a,b,c,d 和 a',b',c',d',面积分别为 Δ 和 Δ',那么

$$\begin{aligned}&\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\cdot\sqrt{(a'b'+c'd')(a'c'+b'd')(a'd'+b'c')}\geqslant\\&[(-a+b+c+d)a'+(a-b+c+d)b'+\\&(a+b-c+d)c'+(a+b+c-d)d']\Delta\Delta'\end{aligned}\tag{13}$$

若记边长为 a,b,c,d 和 a',b',c',d' 所对的圆周角分别为 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$ 和 $\alpha',\beta',\gamma',\theta'$,则当且仅当这两个凸四边形都是圆内接四边形(不一定内接于同一个圆),且

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\theta}{2}\cos\alpha'=$$

$$\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta+\theta}{2}\cos\beta' =$$

$$\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cos\frac{\gamma+\theta}{2}\cos\gamma' =$$

$$\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta+\beta}{2}\cos\frac{\theta+\gamma}{2}\cos\theta'$$

时,式(13)取等号.

证明时需用到圆内接四边形边长 a,b,c,d,面积 Δ 以及圆半径 R 之间的关系式

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\Delta}$$

(请读者自行证明)另外,还要应用正弦定理以及上述推论 4 便可以证得,详细证明从略.

特别地,取 $a'=b'=c'=d'$,且由这些边组成的四边形是正方形时,有下面推论.

推论 8 设平面凸四边形 $ABCD$ 四边长为 a,b,c,d,面积为 Δ,则

$$\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c+d)\Delta \qquad (14)$$

当且仅当四边形 $ABCD$ 为正四边形时,式(14)取等号.

注:本文于1988年4月21日寄天津《中等数学》,1989年4月,天津《中等数学》第2期"短论集锦"栏中摘登了文中极少内容.

(写作时间:1988.04.20)

3 一个向量不等式及其应用

本文给出一个十分有用的向量不等式，可以用它来推导一些关于四面体的不等式.

首先申明，文中所述向量均为三维空间中的实向量，我们将采用一般教科书上常用的向量写法与向量运算符号，如用英文小写黑体字母 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$，表示向量；用 $|\boldsymbol{a}|$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的模；用 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的内积，特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$，本文简写为 $\boldsymbol{a}^2$；用 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的外积，本文简写为 $\boldsymbol{ab}$；文中将混合积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 简写为 $\boldsymbol{abc}$；$|\boldsymbol{abc}|$ 表示向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 混合积的绝对值，这个绝对值的乘方就写在绝对值符号的右上角.

一、引理

由于这些引理的证明在一般向量教科书或参考书上均可找到，因此这里就不再重述.

引理 1 设 $\boldsymbol{a}_i=x_i\boldsymbol{b}_1+y_i\boldsymbol{b}_2+z_i\boldsymbol{b}_3\,(i=1,2,3)$，则

$$\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3$$

引理 2

$$|\boldsymbol{abc}|^2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}$$

引理 3

$$|\boldsymbol{abc}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$$

当且仅当向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直时，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$ 时取等号.

二、向量不等式

定理 在三维欧式空间中，对于任意向量 $\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 总成立不等式

$$\sum_{i=1}^{n}(|\boldsymbol{a}_i|^2\cdot|\boldsymbol{b}_i|^2)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j)(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j)\geqslant$$
$$3\left|\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}[(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k)\cdot(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_k)]\right|^{\frac{2}{3}}\tag{1}$$

证明 在三维空间笛氏直角坐标系中，设 $\boldsymbol{a}_i=(x_{i1},x_{i2},x_{i3})(i=1,2,\cdots,n)$，$\boldsymbol{c}_i=x_{1j}\boldsymbol{b}_1+x_{2j}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{nj}\boldsymbol{b}_n(i=1,2,3)$，则

$|\boldsymbol{c}_1|^2+|\boldsymbol{c}_2|^2+|\boldsymbol{c}_3|^2=$

$(x_{11}\boldsymbol{b}_1+x_{21}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{n1}\boldsymbol{b}_n)^2+(x_{12}\boldsymbol{b}_1+x_{22}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{n2}\boldsymbol{b}_n)^2+$

$(x_{13}\boldsymbol{b}_1+x_{23}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{n3}\boldsymbol{b}_n)^2=$

$(x_{11}^2+x_{12}^2+x_{13}^2)\boldsymbol{b}_1^2+(x_{21}^2+x_{22}^2+x_{23}^2)\boldsymbol{b}_2^2+\cdots+(x_{n1}^2+x_{n2}^2+x_{n3}^2)\boldsymbol{b}_n^2+$

$2(x_{11}x_{21}+x_{12}x_{22}+x_{13}x_{23})(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2)+2(x_{11}x_{31}+x_{12}x_{32}+x_{13}x_{33})(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_3)+\cdots+$

$2(x_{n-1\,1}x_{n1}+x_{n-1\,2}x_{n2}+x_{n-1\,3}x_{n3})(\boldsymbol{b}_{n-1}\cdot\boldsymbol{b}_n)=$

$|\boldsymbol{a}_1|^2\cdot|\boldsymbol{b}_1|^2+|\boldsymbol{a}_2|^2\cdot|\boldsymbol{b}_2|^2+\cdots+|\boldsymbol{a}_n|^2\cdot|\boldsymbol{b}_n|^2+2(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2)(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_2)+$

$2(\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_3)(\boldsymbol{b}_1\cdot\boldsymbol{b}_3)+\cdots+2(\boldsymbol{a}_{n-1}\cdot\boldsymbol{a}_n)(\boldsymbol{b}_{n-1}\cdot\boldsymbol{b}_n)=$

$$\sum_{i=1}^{n}(|\boldsymbol{a}_i|^2\cdot|\boldsymbol{b}_i|^2)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{a}_j)(\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j)\qquad①$$

同时有

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}_1|^2+|\boldsymbol{c}_2|^2+|\boldsymbol{c}_3|^2&\geqslant 3(|\boldsymbol{c}_1|^2\cdot|\boldsymbol{c}_2|^2\cdot|\boldsymbol{c}_3|^2)^{\frac{1}{3}}=\\&\text{(算术 - 几何平均值不等式)}\\&3(|\boldsymbol{c}_1||\boldsymbol{c}_2||\boldsymbol{c}_3|)^{\frac{2}{3}}\geqslant\\&3|\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3|^{\frac{2}{3}}\text{(引理 3)}\end{aligned}\qquad②$$

另外，又有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3&=(x_{11}\boldsymbol{b}_1+x_{21}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{n1}\boldsymbol{b}_n)\\&(x_{12}\boldsymbol{b}_1+x_{22}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{n2}\boldsymbol{b}_n)\\&(x_{13}\boldsymbol{b}_1+x_{23}\boldsymbol{b}_2+\cdots+x_{n3}\boldsymbol{b}_n)=\\&\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{vmatrix}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3+\\&\begin{vmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{41}&x_{42}&x_{43}\end{vmatrix}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_4+\cdots+\\&\begin{vmatrix}x_{n-2\,1}&x_{n-2\,2}&x_{n-2\,3}\\x_{n-1\,1}&x_{n-1\,2}&x_{n-1\,3}\\x_{n\,1}&x_{n\,2}&x_{n\,3}\end{vmatrix}\boldsymbol{b}_{n-2}\boldsymbol{b}_{n-1}\boldsymbol{b}_n\text{(引理 1)}=\\&\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}[(\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}_j\boldsymbol{a}_k)\cdot(\boldsymbol{b}_i\boldsymbol{b}_j\boldsymbol{b}_k)]\end{aligned}\qquad③$$

故由以上 ①、②、③ 即得到(1) 式，定理获证.

取 $n=4$ 时，有下面推论 1.

推论 1

$$\begin{aligned}&|a_1|^2|b_1|^2+|a_2|^2|b_2|^2+|a_3|^2|b_3|^2+\\&|a_4|^2|b_4|^2+2[(a_1\cdot a_2)(b_1\cdot b_2)+\\&(a_1\cdot a_3)(b_1\cdot b_3)+(a_1\cdot a_4)(b_1\cdot b_4)+\\&(a_2\cdot a_3)(b_2\cdot b_3)+(a_2\cdot a_4)(b_2\cdot b_4)+\\&(a_3\cdot a_4)(b_3\cdot b_4)]\geqslant\\&3\left|\begin{matrix}(a_2a_3a_4)\cdot(b_2b_3b_4)+(a_1a_3a_4)\cdot(b_1b_3b_4)+\\(a_1a_2a_4)\cdot(b_1b_2b_4)+(a_1a_2a_3)\cdot(b_1b_2b_3)\end{matrix}\right|^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\tag{2}$$

在推论 1 中,令 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$,有下面推论 2.

推论 2 设向量 $b_i(i=1,2,3,4)$ 满足 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$,$a_i(i=1,2,3,4)$ 为任意向量,则

$$\begin{aligned}&(b_1\cdot b_2)(a_1-a_2)^2+(b_1\cdot b_3)(a_1-a_3)^2+(b_1\cdot b_4)(a_1-a_4)^2+\\&(b_2\cdot b_3)(a_2-a_3)^2+(b_2\cdot b_4)(a_2-a_4)^2+(b_3\cdot b_4)(a_3-a_4)^2\geqslant\\&3|(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)|^{\frac{2}{3}}\cdot|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}\end{aligned}\tag{3}$$

将式(3)左边展开,注意到条件 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$,化简后即得式(2)左边;在式(2)右边用 $b_4=-b_1-b_2-b_3$ 代入,同时注意到等式:$-a_2a_3a_4+a_1a_3a_4-a_1a_2a_4+a_1a_2a_3=(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)$,便得到式(3)右边.

如果在推论 2 中再增加条件 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$,有下面推论 3.

推论 3 空间向量 a_i 与 $b_i(i=1,2,3,4)$ 满足 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$,$b_1+b_2+b_3+b_4=0$,则

$$\begin{aligned}&-(b_1\cdot b_2)(a_3a_4)^2-(b_1\cdot b_3)(a_2a_4)^2-\\&(b_1\cdot b_4)(a_2a_3)^2-(b_2\cdot b_3)(a_1a_4)^2-\\&(b_2\cdot b_4)(a_1a_3)^2-(b_3\cdot b_4)(a_1a_2)^2\geqslant\\&3|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}|a_1a_2a_3|^{\frac{4}{3}}\end{aligned}\tag{4}$$

证 用 $a_4=-a_1-a_2-a_3$ 代入式(4)左边,展开整理,并注意到 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$,便得到

$$\begin{aligned}\text{式(4)左边}=&b_1^2(a_2a_3)^2+b_2^2(a_3a_1)^2+b_3^2(a_1a_2)^2+\\&2(b_1\cdot b_2)[(a_2a_3)\cdot(a_3a_1)]+\\&2(b_1\cdot b_3)[(a_2a_3)\cdot(a_1a_2)]+2(b_2\cdot b_3)[(a_3a_1)\cdot(a_1a_2)]\geqslant\\&3|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}|(a_2a_3)(a_3a_1)(a_1a_2)|^{\frac{2}{3}}(\text{据定理})\end{aligned}$$

又据向量的二重向量积运算得到

$$\begin{aligned}&(a_2a_3)(a_3a_1)(a_1a_2)=[(a_2\times a_3)\times(a_3\times a_1)]\cdot(a_1\times a_2)=\\&\{[(a_2\times a_3)\cdot a_1]a_3-[(a_2\times a_3)\cdot a_3]a_1\}\cdot(a_1\times a_2)=\\&[(a_1a_2a_3)a_3]\cdot(a_1\times a_2)=\end{aligned}$$

$|a_1a_2a_3|^2$

因此,式(4) 左边 $\geqslant 3|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}|a_1a_2a_3|^{\frac{4}{3}}$,证毕.

推论4 空间向量 b_i 满足 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$,$\lambda_i(i=1,2,3,4)$ 为每两个之和均为正数的任意实数,则

$$\lambda_1b_1^2+\lambda_2b_2^2+\lambda_3b_3^2+\lambda_4b_4^2 \geqslant$$
$$3(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{3}}\cdot|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}} \tag{5}$$

证 在定理中取 $n=3$ 的情况,并令 $a_1\cdot a_2=a_1\cdot a_3=a_2\cdot a_3=\lambda_4$,且 $a_i^2=\lambda_i+\lambda_4(i=1,2,3)$,这时

$$\begin{aligned}
\text{式(1) 左边} = &|a_1|^2|b_1|^2+|a_2|^2|b_2|^2+|a_3|^2|b_3|^2+\\
&2[(a_1\cdot a_2)(b_1\cdot b_2)+(a_1\cdot a_3)(b_1\cdot b_3)+(a_2\cdot a_3)(b_2\cdot b_3)]=\\
&(\lambda_1+\lambda_4)|b_1|^2+(\lambda_2+\lambda_4)|b_2|^2+(\lambda_3+\lambda_4)|b_3|^2+\\
&2\lambda_4[(b_1\cdot b_2)+(b_1\cdot b_3)+(b_2\cdot b_3)]=\\
&\lambda_1b_1^2+\lambda_2b_2^2+\lambda_3b_3^2+\lambda_4(b_1+b_2+b_3)^2=\\
&\lambda_1b_1^2+\lambda_2b_2^2+\lambda_3b_3^2+\lambda_4b_4^2
\end{aligned}$$

而这时

$$\begin{aligned}
\text{式(1) 右边} = &3|a_1a_2a_3|^{\frac{2}{3}}|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}=\\
&\left(\begin{vmatrix} a_1\cdot a_1 & a_1\cdot a_2 & a_1\cdot a_3\\ a_2\cdot a_1 & a_2\cdot a_2 & a_2\cdot a_3\\ a_3\cdot a_1 & a_3\cdot a_2 & a_3\cdot a_3\end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}(\text{引理2})=\\
&\left(\begin{vmatrix} \lambda_1+\lambda_4 & \lambda_4 & \lambda_4\\ \lambda_4 & \lambda_2+\lambda_4 & a_2\cdot a_3\\ \lambda_4 & \lambda_4 & \lambda_3+\lambda_4\end{vmatrix}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}=\\
&(\lambda_2\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_3\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{\frac{1}{3}}\cdot|b_1b_2b_3|^{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

式(5) 获证.

在式(5) 中,再令 $\lambda_1=u_1b_2^2b_3^2b_4^2$,$\lambda_2=u_2b_1^2b_3^2b_4^2$,$\lambda_3=u_3b_1^2b_2^2b_4^2$,$\lambda_4=u_4b_1^2b_2^2b_3^2$,便可得到下面推论5.

推论5 设向量 $b_i(i=1,2,3,4)$ 满足 $b_1+b_2+b_3+b_4=0$,$u_i(i=1,2,3,4)$ 为任意正数,则

$$(u_1+u_2+u_3+u_4)^3b_1^2b_2^2b_3^2b_4^2 \geqslant$$
$$27(u_2u_3u_4b_1^2+u_1u_3u_4b_2^2+u_1u_2u_4b_3^2+u_1u_2u_3b_4^2)|b_1b_2b_3|^2 \tag{6}$$

应用上述向量不等式可以推导出许多关于平面或空间图形的几何不等式,下面我们仅给出关于四面体的几个不等式.

三、关于四面体的不等式

命题 1 （Pedoe 不等式在三维空间的推广）空间四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 和 $B_1B_2B_3B_4$ 的体积分别为 A 和 B，记棱长 $A_iA_j = a_{ij}(i,j = 1,2,3,4,i \neq j$，约定 $a_{ij} = a_{ji})$，顶点 $A_i(i = 1,2,3,4)$ 所对的面的面积为 $s_i(i = 1,2,3,4)$，以 A_iA_j 为棱的二面角为 $\theta_{ij}(i,j = 1,2,3,4,i \neq j$，约定 $\theta_{ij} = \theta_{ji})$，则

$$(s_1s_2\cos\theta_{12})a_{12}^2 + (s_1s_3\cos\theta_{13})a_{13}^2 + (s_1s_4\cos\theta_{14})a_{14}^2 +$$
$$(s_2s_3\cos\theta_{23})a_{23}^2 + (s_2s_4\cos\theta_{24})a_{24}^2 + (s_3s_4\cos\theta_{34})a_{34}^2 \geqslant$$
$$27A^{\frac{2}{3}}B^{\frac{4}{3}} \tag{7}$$

（说明：据说杨路教授和张景中教授已给出了匹多不等式在高维空间的推广式，本人并未见到有关文章）.

证 在三维空间中，设点 $A_i(i = 1,2,3,4)$ 所对应的向量 $\overrightarrow{OA_i} = \boldsymbol{a}_i(i = 1,2,3,4)$，则向量 $\overrightarrow{A_iA_j} = \boldsymbol{a}_j - \boldsymbol{a}_i(i,j = 1,2,3,4)$，且

$$6A = |(\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4}| = |(\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_3 - \boldsymbol{a}_1)(\boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{a}_1)|$$

另设

$$\boldsymbol{b}_1 = \overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_4}, \boldsymbol{b}_2 = \overrightarrow{B_1B_3} \times \overrightarrow{B_1B_4}, \boldsymbol{b}_3 = \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_4}, \boldsymbol{b}_4 = \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3}$$

则

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{b}_3 - \boldsymbol{b}_4 = \\
&\overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_4} - \overrightarrow{B_1B_3} \times \overrightarrow{B_1B_4} + \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_4} - \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3} = \\
&\overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_4} - (\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2B_3}) \times \overrightarrow{B_1B_4} + \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_4} - \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3} = \\
&\overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_4} - \overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_1B_4} - \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3} = \\
&\overrightarrow{B_2B_3} \times (\overrightarrow{B_2B_4} - \overrightarrow{B_1B_4}) - \overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_3} = \\
&\overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_3B_1} \times \overrightarrow{B_2B_1} = \\
&(\overrightarrow{B_2B_3} + \overrightarrow{B_3B_1}) \times \overrightarrow{B_2B_1} = \\
&\overrightarrow{B_2B_1} \times \overrightarrow{B_2B_1} = \\
&0
\end{aligned}$$

据右手定则，易知有

$$\boldsymbol{b}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2 = (\overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_4}) \cdot (\overrightarrow{B_1B_3} \times \overrightarrow{B_1B_4}) = 4s_1s_2\cos\theta_{12}$$

等. 另外，记 $\boldsymbol{c}_1 = \overrightarrow{B_4B_1}, \boldsymbol{c}_2 = \overrightarrow{B_4B_2}, \boldsymbol{c}_3 = \overrightarrow{B_4B_3}$，则

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3 = &[(\overrightarrow{B_2B_3} \times \overrightarrow{B_2B_4}) \times (\overrightarrow{B_1B_3} \times \overrightarrow{B_1B_4})] \cdot (\overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1B_4}) = \\
&\{[(\boldsymbol{c}_3 - \boldsymbol{c}_2) \times (-\boldsymbol{c}_2)] \times [(\boldsymbol{c}_3 - \boldsymbol{c}_1) \times (-\boldsymbol{c}_1)]\} \cdot \\
&[(\boldsymbol{c}_2 - \boldsymbol{c}_1) \times (-\boldsymbol{c}_1)] = \\
&[(\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{c}_3) \times (\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_3)] \cdot (\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2) = \\
&\{[(\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{c}_3) \cdot \boldsymbol{c}_3]\boldsymbol{c}_1 - [(\boldsymbol{c}_2 \times \boldsymbol{c}_3) \cdot \boldsymbol{c}_1]\boldsymbol{c}_3\} \cdot (\boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{c}_2) =
\end{aligned}$$

$$-(c_1c_2c_3)[c_3\cdot(c_1\times c_2)]=$$
$$-|c_1c_2c_3|^2=$$
$$-(6B)^2$$

将以上各量分别代入(3)式左、右两边，并经整理便得到式(7).

式(7)也可由式(4)推得，我们这里就不再推证了.

命题2　空间四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 体积为 B，顶点 $B_i(i=1,2,3,4)$ 所对的面的面积为 $s_i(i=1,2,3,4)$，实数 $x_i(i=1,2,3,4)$ 满足每两个之和为正数，则

$$x_1s_1^2+x_2s_2^2+x_3s_3^2+x_4s_4^2\geqslant$$
$$\frac{9\sqrt[3]{6}}{2}(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}\cdot B^{\frac{4}{3}} \tag{8}$$

在式(5)中，令 $\boldsymbol{b}_1=\overrightarrow{B_2B_3}\times\overrightarrow{B_2B_4}$，$\boldsymbol{b}_2=\overrightarrow{B_1B_3}\times\overrightarrow{B_1B_4}$，$\boldsymbol{b}_3=\overrightarrow{B_1B_2}\times\overrightarrow{B_1B_4}$，$\boldsymbol{b}_4=\overrightarrow{B_1B_2}\times\overrightarrow{B_1B_3}$ 代入，并注意到 $s_1=\frac{1}{2}|\overrightarrow{B_2B_3}\times\overrightarrow{B_2B_4}|$ 等，以及 $\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3=(6B)^2$(命题1中所证)便可证得式(8).

这里顺便指出，不难证明式(8)弱于笔者在文“关于四面体的一个三角不等式及其应用”① 中所给出的如下不等式

$$x_1s_1^2+x_2s_2^2+x_3s_3^2+x_4s_4^2\geqslant$$
$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(x_1x_2A_3A_4^2+x_1x_3A_2A_4^2+x_1x_4A_2A_3^2+x_2x_3A_1A_4^2+x_2x_4A_1A_3^2+x_3x_4A_1A_2^2)^{\frac{1}{2}}B$$

在式(8)中令 $x_1=y_1s_2s_3s_4$ 等代入，即得下面命题.

命题3　空间四面体 $B_1B_2B_3B_4$ 体积为 B，顶点 $B_i(i=1,2,3,4)$ 所对的面的面积为 $s_i(i=1,2,3,4)$，$y_i(i=1,2,3,4)$ 为任意正数，则

$$(y_1+y_2+y_3+y_4)^3s_1^2s_2^2s_3^2s_4^2\geqslant$$
$$\frac{2\ 187}{4}(y_2y_3y_4s_1^2+y_1y_3y_4s_2^2+y_1y_2y_4s_3^2+y_1y_2y_3s_4^2)B^4 \tag{9}$$

特例：(1) $s_1^2s_2^2s_3^2s_4^2\geqslant\frac{2\ 187}{256}(s_1^2+s_2^2+s_3^2+s_4^2)B^4$；

若应用算术 - 几何平均值不等式，又得

(2) $s_1s_2s_3s_4\geqslant\frac{81\sqrt[3]{9}}{16}B^{\frac{8}{3}}$.

大家熟知，若四面体体积为 V，六条棱之积为 P，则 $P\geqslant 72V^2$，以上特例(2)显然是这个不等式的加强.

---

① 杨学枝，林章衍主编. 福建省初等数学研究文集. 福建教育出版社，1993年7月，P34 ~ 43.

命题4 空间四面体$B_1B_2B_3B_4$体积为B，P为此四面体内任意一点，点P在顶点$B_i(i=1,2,3,4)$所对的面上的正投影分别为$C_i(i=1,2,3,4)$，由C_1,C_2,C_3,C_4所组成的四面体体积为C，则

$$C \leqslant \frac{1}{27}B \tag{10}$$

证 若记顶点$B_i(i=1,2,3,4)$所对的面的面积为$s_i(i=1,2,3,4)$，在式(8)中取$x_i=\frac{|PC_i|}{s_i}(i=1,2,3,4)$，于是式(8)左边

$$x_1s_1^2+x_2s_2^2+x_3s_3^2+x_4s_4^2=$$
$$|PC_1|\cdot s_1+|PC_2|\cdot s_2+|PC_3|\cdot s_3+|PC_4|\cdot s_4=$$
$$3B$$

另外，若三棱锥$P-C_1C_2C_3$的三个面角分别为$\angle C_2PC_3=\alpha_1,\angle C_3PC_1=\alpha_2,\angle C_1PC_2=\alpha_3$，则以$B_4B_1,B_4B_2,B_4B_3$为棱的二面角分别与$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$互补. 根据四面体的体积公式(证明从略)得到

$$V_{P-C_1C_2C_3}=\frac{1}{6}|PC_1||PC_2||PC_3|\cdot$$
$$\sqrt{1-\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_3+2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}$$

$$B^2=(V_{B_4-B_1B_2B_3})^2=\frac{2}{9}s_1s_2s_3\cdot$$
$$\sqrt{1-\cos^2(\pi-\alpha_1)-\cos^2(\pi-\alpha_2)-\cos^2(\pi-\alpha_3)-2\cos(\pi-\alpha_1)\cos(\pi-\alpha_2)\cos(\pi-\alpha_3)}=$$
$$\frac{2}{9}s_1s_2s_3\sqrt{1-\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_3+2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\alpha_3}$$

因此
$$\frac{V_{P-C_1C_2C_3}}{B^2}=\frac{3|PC_1||PC_2||PC_3|}{4s_1s_2s_3}$$

即
$$x_1x_2x_3=\frac{|PC_1|}{s_1}\cdot\frac{|PC_2|}{s_2}\cdot\frac{|PC_3|}{s_3}=\frac{4V_{P-C_1C_2C_3}}{3B^2}$$

同理有，$x_2x_3x_4=\frac{4V_{P-C_2C_3C_4}}{3B^2}$，$x_1x_3x_4=\frac{4V_{P-C_1C_3C_4}}{3B^2}$，$x_1x_2x_4=\frac{4V_{P-C_1C_2C_4}}{3B^2}$，由此可以得到

$$x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3=$$
$$\frac{4}{3}\left(\frac{V_{P-C_2C_3C_4}}{B^2}+\frac{V_{P-C_1C_3C_4}}{B^2}+\frac{V_{P-C_1C_2C_4}}{B^2}+\frac{V_{P-C_1C_2C_3}}{B^2}\right)=$$
$$\frac{4C}{3B^2}$$

于是，式(8)右边为

$$\frac{9\sqrt[3]{6}}{2}(x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3)^{\frac{1}{3}}\cdot B^{\frac{4}{3}}=$$

$$\frac{9\sqrt[3]{6}}{2}(\frac{4C}{3B^2})^{\frac{1}{3}}\cdot B^{\frac{4}{3}}=$$

$$9B^{\frac{2}{3}}\cdot C^{\frac{1}{3}}$$

根据不等式(8),便得到

$$3B\geqslant 9B^{\frac{2}{3}}\cdot C^{\frac{1}{3}}$$

即

$$C\leqslant\frac{1}{27}B$$

证毕.

最后顺便指出,本文中不等式(1)~(10)及其证法均可以推广到n维欧式空间上去,得到相应的向量不等式和n维空间中的单纯形的一些不等式.

注:本文部分内容刊于《湖南教育学院学报》,1992年第2期(4月).

(写作时间:1990.08.04)

4 外森比克不等式的加权推广

三角形的三边长为 a,b,c,面积为 Δ,则有不等式

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}\Delta$$

当且仅当此三角形为正三角形时取等号.

这就是著名的外森比克(Weitawnböck)不等式,在单墫的《几何不等式》(上海教育出版社1980年版)一书64页已给出了推广式

$$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2 \geqslant 4A\tan\frac{\pi}{n} \qquad (※)$$

这里 $a_i(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$ 为平面凸 n 边长,A 为其面积,等号当且仅当这个 n 边形为正 n 边形时成立.

本文将对上述推广式再给予加权推广,得到以下定理.

定理 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是平面凸 n 边形,面积为 Δ,各边长为 $A_iA_{i+1}=a_i$ $(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3$,并约定 $A_{n+1}=A_1$,下同),又 $\theta_i\in(0,\pi)(i=1,2,\cdots,n,$ $n\geqslant 3)$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i=\pi,n\geqslant 3$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i a_i^2 \geqslant 4\Delta \qquad (1)$$

当且仅当此凸 n 边形内接于圆,且

$$\frac{a_1}{\sin\theta_1}=\frac{a_2}{\sin\theta_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin\theta_n}=2R$$

(R 为圆半径)时,式(1)取等号.

为以下证明定理时方便,首先,给出并证明以下两个重要引理.

引理1 设 $\alpha_i,\theta_i(i=1,2,\cdots,n-1,n\geqslant 3)$ 以及 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\alpha_i,\sum\limits_{i=1}^{n-1}\theta_i\in(0,\pi)$,则

$$\sum_{i=1}^{n-1}\cot\theta_i\sin^2\alpha_i-\cot(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-1})\cdot\sin^2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}) \geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\sin 2\alpha_i-\sin(2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{n-1})\right] \qquad (2)$$

当且仅当 $\alpha_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,n-1,n\geqslant 3)$ 时,式(2)取等号.

证 应用数学归纳法.

当 $n=3$ 时,即要证明

$$\cot\theta_1\sin^2\alpha_1+\cot\theta_2\sin^2\alpha_2-\cot(\theta_1+\theta_2)\cdot\sin^2(\alpha_1+\alpha_2) \geqslant$$

$$\frac{1}{2}[\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 - \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2)] \tag{3}$$

由于

$$\sin 2\alpha_1 + \sin 2\alpha_2 - \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) =$$
$$2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 + \alpha_2) =$$
$$2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)[\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] =$$
$$4\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$$

因此式(3)又可变换为

$$\frac{\cot\theta_1\sin^2\alpha_1 + \cot\theta_2\sin^2\alpha_2 - \cot(\theta_1 + \theta_2)\cdot\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \geqslant 2$$

将上式左边拆项，并应用三角形有关公式，可以得到

$$\cot\theta_1[\cot\alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2)] + \cot\theta_2[-\cot(\alpha_1 + \alpha_2) + \cot\alpha_1] -$$
$$\cot(\theta_1 + \theta_2)(\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2) \geqslant 2 \tag{4}$$

于是，要证明式(3)成立，变为去证明式(4)成立.

由公式 $\cot(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\cot\theta_1\cot\theta_2 - 1}{\cot\theta_1 + \cot\theta_2}$ 去分母，移项，得到

$$-\cot\theta_2\cot(\theta_1 + \theta_2) - \cot(\theta_1 + \theta_2)\cot\theta_1 + \cot\theta_1\cot\theta_2 = 1$$

同理有

$$-\cot\alpha_2\cot(\alpha_1 + \alpha_2) - \cot(\alpha_1 + \alpha_2)\cot\alpha_1 + \cot\alpha_1\cot\alpha_2 = 1$$

又由于

$$\cot\theta_1 + \cot\theta_2 - \cot(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin(\theta_1 + \theta_2)}{2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin(\theta_1 + \theta_2)} > 0$$

同理有

$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$$

因此

$$\cot\theta_1 + \cot\theta_2 - \cot(\theta_1 + \theta_2) = \sqrt{\cot^2\theta_1 + \cot^2\theta_2 - \cot^2(\theta_1 + \theta_2) + 2}$$
$$\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2) = \sqrt{\cot^2\alpha_1 + \cot^2\alpha_2 - \cot^2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2}$$

再根据柯西(Cauchy)不等式，有

$$[\cot\theta_1 + \cot\theta_2 - \cot(\theta_1 + \theta_2)][\cot\alpha_1 + \cot\alpha_2 - \cot(\alpha_1 + \alpha_2)] =$$
$$\sqrt{\cot^2\theta_1 + \cot^2\theta_2 + \cot^2(\theta_1 + \theta_2) + 2}\cdot$$
$$\sqrt{\cot^2\alpha_1 + \cot^2\alpha_2 + \cot^2(\alpha_1 + \alpha_2) + 2} \geqslant$$
$$\cot\theta_1\cot\alpha_1 + \cot\theta_2\cot\alpha_2 + \cot(\theta_1 + \theta_2)\cdot\cot(\alpha_1 + \alpha_2) + 2$$

将上式加以整理，便得到式(4)，故式(3)成立. 由上面应用柯西不等式时取等号条件便知，当且仅当 $\cot\theta_1 = \cot\alpha_1$，$\cot\theta_2 = \cot\alpha_2$，即 $\theta_1 = \alpha_1$，$\theta_2 = \alpha_2$（因 $\theta_1, \theta_2, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, \pi)$）时，式(4)中的等号成立，即式(3)中的等号成

立. 这就证明了当 $n = 3$ 时,式(2) 成立.

假设 $n = k$ 时,式(2) 成立,即对于 $\alpha_i,\theta_i(i = 1,2,\cdots,k-1,k \geqslant 3)$ 以及 $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i,\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i \in (0,\pi)$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{k-1}\cot\theta_i\sin^2\alpha_i - \cot(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k-1})\cdot\sin^2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}) \geqslant \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{k-1}\sin 2\alpha_i - \sin(2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{k-1})\right] \qquad ①$$

当 $n = k+1$ 时,由于 $\alpha_i,\theta_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 以及 $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i,\sum_{i=1}^{k}\theta_i \in (0,\pi)$,当然有 $\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i,\sum_{i=1}^{k-1}\theta_i \in (0,\pi)$,因此,据 $n = 3$ 的情况,即有

$$\cot(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{k-1})\sin^2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1}) + \cot\theta_k\sin^2\alpha_k - \cot(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)\cdot\sin^2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k) \geqslant \frac{1}{2}[\sin(2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_{k-1}) + \sin 2\alpha_k - \sin(2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_k)] \qquad ②$$

将不等式 ①、② 两边分别相加,便得到

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i\sin^2\alpha_i - \cot(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k)\cdot\sin^2(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_k) \geqslant \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i - \sin(2\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2\alpha_k)\right]$$

这表明当 $n = k+1$ 时,式(2) 也成立,这时,由不等式 ①、② 取等号条件知,当且仅当 $\theta_i = \alpha_i(i = 1,2,\cdots,k)$ 时上式等号成立. 综上可知,当 $n \in \mathbf{N}, n \geqslant 3$ 时,式(2) 总成立,并且当且仅当 $\theta_i = \alpha_i(i = 1,2,\cdots,n-1,n \geqslant 3)$ 时,式(2) 中等号成立,引理 1 得证.

由引理 1,立即得到下面引理.

引理 2 设 $\alpha_i,\theta_i(i = 1,2,\cdots,n,n \geqslant 3) \in (0,\pi)$,且 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = \pi$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\cot\theta_i\sin^2\alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i \qquad (5)$$

当且仅当 $\theta_i = \alpha_i = \frac{\pi}{n}(i = 1,2,\cdots,n,n \geqslant 3)$ 时,不等式(5) 取等号.

下面我们就来证明本文开头提出的定理.

由于在边长给定的平面凸 n 边形中,以其内接于圆时的面积为最大,因此,

我们只要证明凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于圆时，式(1) 成立即可.

设边 $A_iA_{i+1}(i=1,2,\cdots,n)$ 所对应的圆周角为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，圆半径为 R，则

$$a_i=2R\sin\alpha_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

且
$$2\Delta=R^2\sum_{i=1}^{n}\sin 2\alpha_i$$

代入不等式(1)，便得到不等式(5)，由此可知不等式(1) 成立. 由不等式(5) 取等号条件知道，当且仅当 $\theta_i=\alpha_i=\frac{\pi}{n}(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$ 时，即当此凸 n 边形内接于圆，且

$$\frac{a_1}{\sin\theta_1}=\frac{a_2}{\sin\theta_2}=\cdots=\frac{a_n}{\sin\theta_n}=2R$$

时，不等式(1) 中的等号成立.

在定理中，分别取 $n=3,n=4$，便得到以下两个推论.

推论 1 设 $\triangle A_1A_2A_3$ 边长为 $A_2A_3=a_1,A_3A_1=a_2,A_1A_2=a_3$，面积为 Δ,x_1,x_2,x_3 为任意实数且 $x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2>0$，则

$$x_1a_1^2+x_2a_2^2+x_3a_3^2\geqslant 4\sqrt{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}\cdot\Delta\tag{6}$$

当且仅当 $\frac{x_2+x_3}{a_1^2}=\frac{x_3+x_1}{a_2^2}=\frac{x_1+x_2}{a_3^2}$ 时，不等式(6) 取等号.

这只要在不等式(1) 中，$n=3$ 时，令

$$\cot\theta_i=\frac{x_i}{\sqrt{x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2}}\quad(i=1,2,3)$$

代入便得到.

推论 2 设凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 边长为 $A_1A_2=a_1,A_2A_3=a_2,A_3A_4=a_3,A_4A_1=a_4$，其面积为 Δ,x_1,x_2,x_3,x_4 为任意实数，而且满足

$$\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4}>0$$

则

$$x_1a_1^2+x_2a_2^2+x_3a_3^2+x_4a_4^2\geqslant 4\sqrt{\frac{x_2x_3x_4+x_1x_3x_4+x_1x_2x_4+x_1x_2x_3}{x_1+x_2+x_3+x_4}}\cdot\Delta\tag{7}$$

当且仅当此凸四边形内接于圆，而且

$$\frac{(x_2+x_3)(x_2+x_4)(x_3+x_4)}{a_1^2}=\frac{(x_1+x_3)(x_1+x_4)(x_3+x_4)}{a_2^2}=$$
$$\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_4)(x_2+x_4)}{a_3^2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)}{a_4^2}$$

时，不等式(7) 取等号.

这只要在不等式(1) 中,$n = 4$ 时,令

$$\cot \theta_i = x_i \cdot \sqrt{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{x_2x_3x_4 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_2x_3}} \quad (i = 1,2,3,4)$$

代人便得到.

特别地,若在不等式(7) 中,取 $x_i = \frac{1}{a_i}(i = 1,2,3,4)$,便得到

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)(a_2a_3a_4 + a_1a_3a_4 + a_1a_2a_4 + a_1a_2a_3) \geqslant 16\Delta^2 \quad (8)$$

当且仅当四边形为正四边形时,式(8) 取等号.

这说明"关于平面四边形的一个不等式"(杨学校,《数学教师》,1987 年第 6 期) 一文中提出的不等式,只不过是不等式(7) 的特例.

若在不等式(7) 中,取 $x_i = \frac{1}{a_i^2}(i = 1,2,3,4)$,便得到

$$a_2^2a_3^2a_4^2 + a_1^2a_3^2a_4^2 + a_1^2a_2^2a_4^2 + a_1^2a_2^2a_3^2 \geqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)\Delta^2 \quad (9)$$

当且仅当四边形为正方形时,不等式(9) 取等号.

注:部分结论刊于《数学通讯》1991 年第 6 期"问题解答" 栏目的评注中.

(写作时间:1986. 03. 20)

5　平面凸四边形的一个不等式

《湖南数学通讯》1986年第4期上苏化明老师给出了关于四边形的一个不等式,这就是:

设凸四边形 $ABCD$ 的四条边长分别为 a,b,c,d,它的面积为 Δ,则有

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant 6\Delta \tag{1}$$

其中等号当且仅当四边形 $ABCD$ 为正四边形时成立.

本文将式(1)进一步加强,得到一个新的关于平面凸四边形的不等式.

定理　设平面凸四边形的四边长分别为 a,b,c,d,它的面积为 Δ,那么

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\geqslant \frac{1}{2}(a+b+c+d)^2\Delta^2 \tag{2}$$

当且仅当 $ABCD$ 是正方形时取等号.

为证明时方便,我们先来证明下述两个引理.

引理1　设 $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in[0,\pi]$,且 $\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$,则

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta\leqslant 2\sqrt{2} \tag{3}$$

当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取等号.

证明　由于

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta=\\&2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+\theta}{2}\cos\frac{\gamma-\theta}{2}\leqslant\\&2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma+\theta}{2}=\\&2\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\leqslant\\&2\sqrt{2}\end{aligned}$$

即

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta\leqslant 2\sqrt{2}$$

由以上证明不难知道,当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\theta=\frac{\pi}{4}$ 时取等号,引理1获证.

引理2　圆内接凸四边形 $ABCD$ 的四条边长分别为 a,b,c,d,它的面积为 Δ,圆半径为 R,则

$$\Delta=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4R} \tag{4}$$

证明　设 $AB=a,BC=b,CD=c,DA=d$,则

$$\cos B = \frac{a^2 + b^2 - AC^2}{2ab}, \cos D = \frac{c^2 + d^2 - AC^2}{2cd}$$

但,$B + D = \pi$,于是有

$$\cos B + \cos D = 0$$

因此

$$\frac{a^2 + b^2 - AC^2}{2ab} + \frac{c^2 + d^2 - AC^2}{2cd} = 0$$

$$(ab + cd)AC^2 = (a^2 + b^2)cd + (c^2 + d^2)ab = (ac + bd)(ad + bc)$$

所以

$$AC = \sqrt{\frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}}$$

由于四边形 $ABCD$ 面积可视为两个三角形 ABC 和 ACD 面积之和,所以

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D = \frac{1}{2}(ab + cd)\sin B =$$

$$\frac{1}{2}(ab + cd) \cdot \frac{AC}{2R} =$$

$$\frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4R}$$

由此便得到不等式(3),引理 2 获证.

引理 2 还可用托勒密定理作如下证明

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D =$$

$$\frac{1}{2}(ab + cd)\sin B =$$

$$\frac{1}{2}(ab + cd) \cdot \frac{AC}{2R}$$

同样有

$$\Delta = \frac{1}{2}(ad + bc) \cdot \frac{BD}{2R}$$

将以上两式左右两边分别相乘,另外,由托勒密定理有

$$AC \cdot BD = ac + bd$$

这样就有

$$\Delta^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}{16R^2}$$

两边再开平方(取正值) 便得到不等式(4).

不等式(4) 给出了圆内接四边形四条边长、四边形面积及其外接圆半径之间的关系,很显然,它是三角形中这种关系的推广.

现在我们就可以来证明本文提出的定理.

由于在边长给定的所有四边形中以内接于圆的四边形具有最大面积，因此，我们只要去证明四边形 $ABCD$ 内接于圆时不等式(2) 成立即可.

设四边形 $ABCD$ 内接于圆半径为 R 的圆，由四边 AB,BC,CD,DA 所对的弧向着四边形一旁的圆周角分别为 $\alpha,\beta,\gamma,\theta$，则

$$\alpha+\beta+\gamma+\theta=\pi$$

这里 $\alpha,\beta,\gamma,\theta\in[0,\pi]$.

根据引理 1 有

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\theta\leqslant 2\sqrt{2} \qquad (※)$$

另外，由正弦定理有

$$\sin\alpha=\frac{a}{2R},\sin\beta=\frac{b}{2R},\sin\gamma=\frac{c}{2R},\sin\theta=\frac{d}{2R}$$

根据引理 2，这里

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{4\Delta}$$

将这些量代入不等式(※)，同时两边平方并加以整理便得到不等式(2). 根据引理 1 取等号条件便知，不等式(2) 当且仅当四边形 $ABCD$ 是正方形时取等号.

如果应用算术 - 几何平均值不等式，便有

$$(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\leqslant\frac{1}{27}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)^3$$

那么，由不等式(2) 又可以得到不等式

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{2}}(a+b+c+d)^{\frac{2}{3}}\Delta^{\frac{2}{3}} \qquad (5)$$

显然，不等式(5) 仍比不等式(1) 强，如果在不等式(5) 中再应用

$$(a+b+c+d)^2\geqslant\frac{8}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

便可以得到不等式(1). 由此可知，不等式(1) 仍是一个较弱的不等式.

（写作时间：1986. 11. 09）

6 对“每期一题”的别证和推广

《中学数学教学》(安徽)1986 年第 6 期的“每期一题”是:

若 $x^3+y^3-3xy=0$,则 $-1<x+y\leqslant 3$(下称原命题).

解答者给出了三种不同证法. 本文将再给出一种简捷证法,最后给出原命题的一个推广,同时用类似的方法给予证明.

对原命题,我们的证明如下.

首先对于 $x=0$ 或 $y=0$,都有 $x+y=0$,原命题显然成立.

下面来证明对于 x 和 y 都不为零时,原命题成立.

由 $x^3+y^3-3xy=0$,不难知道 $x+y$ 和 xy 必为同号. 事实上,若 $x+y>0$, $x>-y$,那么 $x^3>-y^3$,即 $x^3+y^3>0$,又 $xy<0$,因此 $x^3+y^3-3xy>0$,同理可知,若 $x+y<0$,$xy>0$,有 $x^3+y^3-3xy<0$,这都与已知条件矛盾,故 $x+y$ 和 xy 必为同号. 在这种情况下,我们有

$$x+y+1=x+y+\frac{x^3+y^3}{3xy}=\frac{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{3xy}=\frac{(x+y)^3}{3xy}>0$$

(由于 $x+y$ 与 $(x+y)^3$ 同号) 即

$$-1<x+y$$

另一方面

$$3-(x+y)=\frac{x^3+y^3}{xy}-(x+y)=\frac{x^3+y^3-x^2y-xy^2}{xy}=\frac{(x-y)(x^2-y^2)}{xy}=\frac{x+y}{xy}\cdot(x-y)^2\geqslant 0$$

即

$$x+y\leqslant 3$$

原命题获证.

下面我们给出并证明原命题的推广.

命题 设 $x,y\in\mathbf{R}$,k 为正整数,且 $x^{4k-1}+y^{4k-1}-(4k-1)(xy)^{2k-1}=0$,则

$$-1<x+y\leqslant 4k-1$$

证 对于 $x=0$ 或 $y=0$,总有 $x+y=0$,命题显然成立.

下面我们就 x 和 y 都不为零的情况来证明命题成立. 同原命题的证法一样,由已知条件

$$x^{4k-1}+y^{4k-1}-(4k-1)(xy)^{2k-1}=0$$

不难推知 $x+y$ 和 xy 必为同号.此时我们分两种情况证明.

(1) 若 $x+y>0,xy>0$,即 $x>0,y>0$.

这时,显然 $x+y>-1$.另一方面,由于

$$\frac{x^{4k-1}+y^{4k-1}}{(xy)^{2k-1}}-(x+y)=\frac{(x^{2k}-y^{2k})(x^{2k-1}-y^{2k-1})}{(xy)^{2k-1}}\geqslant 0$$

即

$$(4k-1)-(x+y)\geqslant 0$$

$$(x+y)\leqslant 4k-1$$

故

$$-1<x+y\leqslant 4k-1$$

(2) 若 $x+y<0,xy<0$.

这时,显然 $(x+y)\leqslant 4k-1$,另一方面,由于

$$(x+y)+\frac{x^{4k-1}+y^{4k-1}}{(4k-1)(xy)^{2k-1}}=$$

$$\frac{x+y}{(4k-1)(xy)^{2k-1}}[(4k-1)(xy)^{2k-1}+(x^{4k-2}+y^{4k-2})-xy(x^{4k-4}+y^{4k-4})+(xy)^2(x^{4k-6}+y^{4k-6})+\cdots-(xy)^{2k-1}] \qquad (※)$$

因为 $xy<0$,则

$$x^{4k-2}+y^{4k-2}>-2(xy)^{2k-1}$$

$$-xy(x^{4k-4}+y^{4k-4})>-2(xy)^{2k-1}$$

$$(xy)^2(x^{4k-6}+y^{4k-6})>-2(xy)^{2k-1}$$

$$\vdots$$

$$-(xy)^{2k-1}=-2(xy)^{2k-1}$$

将上述不等式两边分别相加,得到

$$(x^{4k-2}+y^{4k-2})-xy(x^{4k-4}+y^{4k-4})+(xy)^2(x^{4k-6}+y^{4k-6})+\cdots-(xy)^{2k-1}\geqslant-(4k-1)(xy)^{2k-1}$$

又由于

$$\frac{x+y}{(4k-1)(xy)^{2k-1}}>0$$

所以,式(※)右边总大于零,即

$$x+y+\frac{x^{4k-1}+y^{4k-1}}{(4k-1)(xy)^{2k-1}}=x+y+1>0$$

因此

$$-1<x+y$$

故

$$-1<x+y\leqslant 4k-1$$

综上可知命题成立,当且仅当 $x=y=2k-\frac{1}{2}$ 时右边不等式才取等号.

最后,顺便指出,本文的推广命题还可叙述为:

若 $x,y\in\mathbf{R}$,k 为正整数,且 $x^{4k-1}+y^{4k-1}-\lambda(xy)^{2k-1}=0,\lambda>0$,则

$$-\frac{\lambda}{4k-1}<x+y\leqslant\lambda$$

当且仅当 $x=y=\frac{\lambda}{2}$ 时右边不等式取等号.

(写作时间:1986.12.18)

7　关于椭圆内接三角形的最大面积与椭球内接四面体的最大体积的问题

众所周知,在一个定圆内,作内接三角形,以正三角形时的面积为最大.但是,如果把圆换成椭圆,情况又是如何呢?这个问题已有人作过研究①,解法较繁,这里我们就椭圆内接其三角形的最大面积问题给出一种简捷的解法,同时,还用这种类似方法解答了椭球内接四面体(即四面体的四个顶点都在椭球面上)的最大体积的问题.

定理1　若椭圆的两个半轴长为 a,b,那么,椭圆内接三角形的最大面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$.

定理2　若椭球的三个半轴长为 a,b,c,那么,椭球内四面体的最大体积为 $\frac{8\sqrt{3}}{27}abc$.

为证明定理时方便,下面我们先提出并证明三个引理.

引理1　设 $(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 满足方程 $x^2+y^2=1$,则

$$\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

证　设 $A_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$,由于 $(x_i,y_i)(i=1,2,3)$ 满足方程 $x^2+y^2=1$,因此 $A_i(i=1,2,3)$ 点都在单位圆 $x^2+y^2=1$ 上.另外,我们根据平面几何中,圆内接三角形中,以内接正三角形的面积为最大,同时利用解析几何中已知三点求三角形面积的公式,便有

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(半径为1的圆内接正三角形的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$)故式(1)获证.

---

① 胡立编,关于椭圆内接四边形和三角形的最大面积,《数学通报》,1987.03.

引理 2 四面体 $ABCD$ 的体积为 V,其外接球半径为 R,则

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3 \tag{2}$$

当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时等号成立.

《数学通讯》1984 年第 12 期,"也论四面体的不等式关系"一文中,给出了式(2) 的一种证法,这里我们将给出一种十分简捷的证明.

证明 设棱长 $AB = a, CD = a'$,AB 与 CD 成角为 α,O 为四面体外接球球心,从 O 分别向 AB,CD 引垂线,垂足分别为 Q,Q',则 Q,Q' 分别为线段 AB,CD 的中点,且

$$OQ^2 = R^2 - \frac{1}{4}a^2, OQ'^2 = R^2 - \frac{1}{4}a'^2$$

又设 d 为 AB 与 CD 两异面直线的距离,由四面体的体积公式

$$V = \frac{1}{6}aa'd\sin\alpha$$

得到

$$d = \frac{6V}{aa'\sin\alpha}$$

在 $\triangle OQQ'$ 中,显然有 $OQ + OQ' \geqslant QQ' = d$,于是

$$2(OQ^2 + OQ'^2) \geqslant (OQ + OQ')^2 \geqslant d^2$$

由此得到

$$2(R^2 - \frac{1}{4}a^2) + 2(R^2 - \frac{1}{4}a'^2) \geqslant \frac{6V}{aa'\sin\alpha}$$

即

$$4R^2 \geqslant \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a'^2 + (\frac{6V}{aa'\sin\alpha})^2 \geqslant$$

$$3(\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{2}a'^2 \cdot \frac{36V}{a^2a'^2\sin^2\alpha})^{\frac{1}{3}} =$$

$$3(\frac{3V}{\sin\alpha})^{\frac{2}{3}}$$

也就是

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3\sin\alpha \tag{3}$$

由于 $\sin\alpha \leqslant 1$,因此便得到式(2). 顺便指出,我们这里的证法得到了比式(2) 更强的不等式(3). 由以上证明过程中,不难得到当且仅当四面体 $ABCD$ 为正四面体时式(2) 中等号成立.

引理3　设$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$满足方程$x^2+y^2+z^2=1$，则

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{matrix}\right\| \leqslant \frac{16\sqrt{3}}{9} \tag{4}$$

证　设$A_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$，由于$(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$满足方程$x^2+y^2+z^2=1$，由此可知，点$A_i(i=1,2,3,4)$点都在球面$x^2+y^2+z^2=1$上，即四面体$A_1A_2A_3A_4$为球内接四面体. 记四面体$A_1A_2A_3A_4$的体积为$V$，根据引理2便有

$$V \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}$$

另一方面，由空间解析几何知识知道，四面体$A_1A_2A_3A_4$的体积为①

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{matrix}\right\|$$

由此便得到

$$\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{matrix}\right\| \leqslant \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

引理3获证.

现在我们就来分别证明定理1和定理2.

定理1的证明：在直角坐标系中，设$A_i(x_i,y_i)(i=1,2,3)$是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上的三个点，则$(x_i,y_i)(i=1,2,3)$满足方程

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

根据引理1及三角形面积公式有

---

① 拾叶，解析几何中四面体的体积公式，《数学教学研究》，甘肃，1987.01.

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}a\cdot\frac{x_1}{a} & b\cdot\frac{y_1}{b} & 1\\ a\cdot\frac{x_2}{a} & b\cdot\frac{y_2}{b} & 1\\ a\cdot\frac{x_3}{a} & b\cdot\frac{y_3}{b} & 1\end{matrix}\right\|=$$

$$\frac{1}{2}ab\left\|\begin{matrix}\frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & 1\\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & 1\\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & 1\end{matrix}\right\|\leqslant\frac{1}{2}ab\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

即

$$S_{\triangle A_1A_2A_3}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$$

这说明椭圆内接三角形的最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$,定理1获证.

定理2的证明:在空间直角坐标系中,设$A_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$上的四个点,即四面体$A_1A_2A_3A_4$内接于椭球,则$(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,3,4)$满足方程

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

根据引理3及四面体的体积公式有

$$V_{A_1A_2A_3A_4}=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}a\cdot\frac{x_1}{a} & b\cdot\frac{y_1}{b} & c\cdot\frac{z_1}{c} & 1\\ a\cdot\frac{x_2}{a} & b\cdot\frac{y_2}{b} & c\cdot\frac{z_2}{c} & 1\\ a\cdot\frac{x_3}{a} & b\cdot\frac{y_3}{b} & c\cdot\frac{z_3}{c} & 1\\ a\cdot\frac{x_4}{a} & b\cdot\frac{y_4}{b} & c\cdot\frac{z_4}{c} & 1\end{matrix}\right\|=$$

$$\frac{abc}{6}\left\|\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{b} & \frac{z_1}{c} & 1 \\ \frac{x_2}{a} & \frac{y_2}{b} & \frac{z_2}{c} & 1 \\ \frac{x_3}{a} & \frac{y_3}{b} & \frac{z_3}{c} & 1 \\ \frac{x_4}{a} & \frac{y_4}{b} & \frac{z_4}{c} & 1 \end{vmatrix}\right\| \leqslant \frac{abc}{6}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{9} = \frac{8\sqrt{3}}{27}abc$$

即

$$V_{A_1A_2A_3A_4} \leqslant \frac{8\sqrt{3}}{27}abc$$

这就说明椭球内接四面体的最大体积为$\frac{8\sqrt{3}}{27}abc$,定理 2 获证.

以上方法可以向 n 维空间推广.

(写作时间:1987. 05. 12)

8 椭圆内接 n 边形的最大面积问题

本文完全用初等方法较为简捷地解决了椭圆内接 n 边形的最大面积问题，同时，还给出了最大面积取得时，这个 n 边形的位置.

定理 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接凸 n 边形的最大面积为$\frac{1}{2}nab\sin\frac{2\pi}{n}(n\in\mathbf{N},n\geqslant 3)$. 若这个 n 边形按逆时针转向的各个顶点为 $A_k(x_k,y_k)(k=1,2,\cdots,n)$，其面积取得最大值时，各顶点坐标应满足以下关系式

$$\begin{cases}x_k=x_1\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi-\frac{a}{b}y_1\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi\\ y_k=\frac{a}{b}x_1\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi+y_1\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$$

为证明定理需要，下面先证明一个引理.

引理 设 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n\leqslant 2\pi$，则

$$\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_2)+\cdots+\sin(\theta_n-\theta_{n-1})+\sin(\theta_1-\theta_n)\leqslant n\sin\frac{2\pi}{n}\tag{1}$$

当且仅当 $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2=\cdots=\theta_n-\theta_{n-1}=\frac{2\pi}{n}$ 时式(1) 中的等号成立.

证 设 $A_k(\cos\theta_k,\sin\theta_k)(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3$，且 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n\leqslant 2\pi)$ 是单位圆 $x^2+y^2=1$ 上的 n 个点，构成逆时针转向的圆内接 n 边形 $B_1B_2\cdots B_n$，其面积为

$$\begin{aligned}S_{n边形}&=S_{\triangle OA_1A_2}+S_{\triangle OA_2A_3}+\cdots+S_{\triangle OA_nA_1}=\\&\frac{1}{2}[\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_2)+\cdots+\sin(2\pi+\theta_1-\theta_n)]=\\&\frac{1}{2}[\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_2)+\cdots+\sin(\theta_1-\theta_n)]\end{aligned}$$

(这里 O 为单位圆圆心).

另外，据内接于同一圆的所有 n 边形中，以正 n 边形的面积为最大(读者可参考蔡宗熹的《等圆问题》一书，人民教育出版社)，可以得到

$$S_{n边形}\leqslant S_{正n边形}=\frac{1}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}$$

(这时圆半径为 1) 因此，有

$$\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_2)+\cdots+\sin(\theta_1-\theta_n)\leqslant n\sin\frac{2\pi}{n}$$

当且仅当这个圆内接 n 边形为正 n 边形，也就是 $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2=\cdots=\theta_n-\theta_{n-1}=\frac{2\pi}{n}$ 时，式(1) 中的等号成立，引理获证.

下面我们就来证明本文所提出的定理.

设 $A_k(a\cos\theta_k,b\sin\theta_k)(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$，是按逆时针转向(即离心角 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ 满足 $0\leqslant\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_n\leqslant 2\pi$) 的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的内接 n 边形顶点，其面积为

$$S_{A_1A_2\cdots A_n}=S_{\triangle OA_1A_2}+S_{\triangle OA_2A_3}+\cdots+S_{\triangle OA_nA_1}$$

(这里 O 为椭圆中心) 根据解析几何中，求三角形的面积公式，有

$$S_{\triangle A_kA_{k+1}}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ a\cos\theta_k & b\sin\theta_k & 1\\ a\cos\theta_{k+1} & b\sin\theta_{k+1} & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}ab\sin(\theta_{k+1}-\theta_k)$$

$(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3$，并约定 $\beta_{n+1}=\beta_1,\theta_{n+1}=\theta_1)$ 因此

$$S_{A_1A_2\cdots A_n}=\frac{1}{2}ab[\sin(\theta_2-\theta_1)+\sin(\theta_3-\theta_2)+\cdots+\sin(\theta_1-\theta_n)]\leqslant$$
$$\frac{1}{2}nab\sin\frac{2\pi}{n}$$

(据引理) 即

$$S_{A_1A_2\cdots A_n}\leqslant\frac{1}{2}nab\sin\frac{2\pi}{n}$$

由式(1) 取等号条件可知，这里的等号当且仅当 $\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2=\cdots=\theta_n-\theta_{n-1}=\frac{2\pi}{n}$ 时成立，也就是说这时椭圆内接 n 边形的面积为最大. 下面我们来求取得最大面积时 n 边形各顶点 $A_k(x_k,y_k)(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$ 的坐标之间的关系.

首先，由

$$\theta_2-\theta_1=\theta_3-\theta_2=\cdots=\theta_n-\theta_{n-1}=\frac{2\pi}{n}$$

可以得到

$$\theta_k=\theta_1+\frac{2(k-1)}{n}\pi\quad(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$$

因此

$$\begin{cases}\cos\theta_k=\cos\theta_1\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi-\sin\theta_1\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi\\ \sin\theta_k=\cos\theta_1\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi+\sin\theta_1\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi\end{cases}\quad(k=1,2,\cdots,n,n\geqslant 3)$$

但 $x_k = a\cos\theta_k, y_k = b\sin\theta_k$，即 $\cos\theta_k = \frac{x_k}{a}, \sin\theta_k = \frac{y_k}{b}(k = 1,2,\cdots,n)$ 代入上式，并整理，故有

$$\begin{cases} x_k = x_1\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi - \frac{a}{b}y_1\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi \\ y_k = \frac{a}{b}x_1\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi + y_1\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots,n,n \geqslant 3)$$

定理获证.

在定理中，取 $n = 3,4$，分别得到以下两个推论.

推论 1 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的内接三角形的最大面积是 $\frac{3\sqrt{3}}{4}ab$. 取得最大面积时，当且仅当三角形的三个顶点 $A_k(x_k, y_k)(k = 1,2,3)$ 的坐标满足关系式

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}a}{2b}y_1 \\ y_2 = \frac{\sqrt{3}b}{2a}x_1 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}a}{2b}y_1 \\ y_3 = -\frac{\sqrt{3}b}{2a}x_1 - \frac{1}{2}y_1 \end{cases}$$

据此，我们还不难得到具有最大面积的椭圆内接三角形的有趣性质（证明从略）：

ⅰ）此三角形的重心与椭圆中心重合；

ⅱ）过此三角形一个顶点和椭圆中心的连线的斜率与三角形另外两个顶点连线的斜率之积为定值 $-\frac{b^2}{a^2}$；

ⅲ）椭圆上，过此三角形一个顶点的切线平行于三角形另外两个顶点的连线.

推论 2 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的内接凸四边形的最大面积是 $2ab$，取得最大面积时，当且仅当此四边形的四个顶点 $A_k(x_k, y_k)(k = 1,2,3,4)$ 的坐标满足关系式

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{a}{b}y_1 \\ y_2 = \frac{b}{a}x_1 \end{cases}, \begin{cases} x_3 = -x_1 \\ y_3 = -y_1 \end{cases}, \begin{cases} x_4 = \frac{a}{b}y_1 \\ y_4 = -\frac{b}{a}x_1 \end{cases}$$

据此，我们不难知道，具有最大面积的椭圆内接四边形的对角线正好是这个椭圆的一对共轭直径.

最后，顺便指出，具有最大面积的椭圆内接凸 n 边形具有如下一条重要性质，即下面的命题.

命题　具有最大面积的椭圆内接凸 n 边形的重心与椭圆的中心重合.

此命题的证明并不难，只要应用定理中具有最大面积的椭圆内接凸 n 边形各顶点坐标的关系式以及以下两个三角等式

$$\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{2(k-1)}{n}\pi = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{2(k-1)}{n}\pi = 0 \quad (n \geqslant 3)$$

详细证明从略.

（写作时间：1988. 10. 20）

9 关于四面体的一个不等式

众所周知,对于三角形的外接圆半径与三边长分别为R与a,b,c时,成立不等式

$$R^2 \geqslant \frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2) \tag{1}$$

当且仅当三角形为正三角形时等号成立.

在四面体中,对于外接球半径R与六条棱长$a_i(i=1,2,3,4,5,6)$的不等式关系已有人研究过,这就是

$$R^2 \geqslant \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{6} a_i^2 \tag{2}$$

当且仅当四面体为正四面体时等号成立.

本文将给出一个与式(1)相类似的关于四面体的一个不等式,即如下定理.

定理 四面体$ABCD$的外接球半径为R,顶点A,B,C,D所对的面的三角形面积分别为S_A,S_B,S_C,S_D,则

$$R^4 \geqslant \frac{3}{16}(S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2) \tag{3}$$

当且仅当四面体为正四面体时等号成立.

证 我们知道,如果一个三角形三边长为a,b,c,面积为Δ,则有

$$\Delta^2 = \frac{1}{16}[2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^3)-(a^4+b^4+c^4)]$$

由此,我们可以得到

$$S_A^2 = \frac{1}{16}[2(BC^2\cdot BD^2+BD^2\cdot CD^2+CD^2\cdot BC^2)-(CD^4+BD^4+BC^4)]$$

类似还有S_B^2,S_C^2,S_D^2三个等式.

将这四个等式两边分别相加,并整理,可以得到

$$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2 = \frac{1}{8}[(AB^2+CD^2)(AC^2+BD^2)+ (AC^2+BD^2)(AD^2+BC^2)+(AD^2+BC^2)(AB^2+CD^2)]- \frac{1}{8}(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)$$

于是,要证明式(3)成立,只要去证明

$$R^4 \geqslant \frac{3}{128}[(AB^2+CD^2)(AC^2+BD^2)+(AC^2+BD^2)(AD^2+BC^2)+$$

$(AD^2+BC^2)(AB^2+CD^2)]-$

$\frac{3}{128}(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)$

引用式(2),这样我们只要去证明以下不等式成立即可

$$\frac{1}{16^2}(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)\geqslant$$
$$\frac{3}{128}[(AB^2+CD^2)(AC^2+BD^2)+(AC^2+BD^2)(AD^2+BC^2)+$$
$$(AD^2+BC^2)(AB^2+CD^2)]-$$
$$\frac{3}{128}(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)$$

也就是

$$(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2)^2+$$
$$6(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)\geqslant$$
$$6[(AB^2+CD^2)(AC^2+BD^2)+(AC^2+BD^2)(AD^2+BC^2)+$$
$$(AD^2+BC^2)(AB^2+CD^2)] \qquad (※)$$

现在我们就来证明不等式(※).

由柯西不等式有

$$6(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)\geqslant$$
$$(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2)^2$$

于是不等式(※)的左边

$$(AB^2+AC^2+AD^2+BC^2+BD^2+CD^2)^2+$$
$$6(AB^4+AC^4+AD^4+BC^4+BD^4+CD^4)\geqslant$$
$$2[(AB^2+CD^2)+(AC^2+BD^2)+(AD^2+BC^2)]^2\geqslant$$
$$6[(AB^2+CD^2)(AC^2+BD^2)+(AC^2+BD^2)(AD^2+BC^2)+$$
$$(AD^2+BC^2)(AB^2+CD^2)]$$

这就是不等式(※)的右边的式子,由此可知不等式(※)成立.

由于以上证明各步均可逆推,因此,不等式(3)成立.由上述证明过程不难推知,当且仅当四面体为正四面体时不等式(3)中等号成立,证毕.

(写作时间:1987.06.21)

10 由一个代数不等式所引出的几个关于三角形的不等式

本文将首先证明一个简单的代数不等式，然后由它可以推出一系列三角形中的不等式，其中包括著名的匹多(Pedoe) 不等式、费恩斯列尔(Finslew) - 哈德维格尔(Hadwiger) 不等式等，以及其他一些有趣的不等式.

一、一个代数不等式及其证明

引理 假设实数 x',y',z' 及 x,y,z 同时满足 $x'+y'+z'>0$，$x+y+z>0$，$y'z'+z'x'+x'y'>0$，$yz+zx+xy>0$，那么

$$(y'+z')x+(z'+x')y+(x'+y')z\geqslant 2\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')(yz+zx+xy)} \tag{1}$$

当且仅当 $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{x}=\frac{z'}{x}$ 时式(1) 中的等号成立.

证 由于

$$(x'+y'+z')^2=x'^2+y'^2+z'^2+[\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}]^2$$

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+[\sqrt{(yz+zx+xy)}]^2$$

(注意这里 $y'z'+z'x'+x'y'>0$，$yz+zx+xy>0$).

根据柯西不等式，有

$$\{x'^2+y'^2+z'^2+[\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}]^2\}\cdot$$

$$\{x^2+y^2+z^2+[\sqrt{(yz+zx+xy)}]^2\}\geqslant$$

$$[x'x+y'y+z'z+2\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')(yz+zx+xy)}]^2$$

又由于 $x'+y'+z'>0$，$x+y+z>0$，因此，得到

$$(x'+y'+z')(x+y+z)\geqslant$$

$$x'x+y'y+z'z+2\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')(yz+zx+xy)}$$

经移项整理，即得

$$(y'+z')x+(z'+x')y+(x'+y')z\geqslant$$

$$2\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')(yz+zx+xy)}$$

由柯西不等式取等号条件，便知当且仅当 $\frac{x'}{x}=\frac{y'}{x}=\frac{z'}{x}$ 时式(1) 中的等号成立，定理获证.

二、几个三角形中的不等式

命题1 $\triangle ABC$ 的边长为 a,b,c,Δ 为其面积,实数 x,y,z 同时满足,$x+y+z>0,yz+zx+xy>0$,那么

$$xa^2+yb^2+zc^2\geqslant 4\sqrt{uv+v\lambda+\lambda u}\Delta \tag{2}$$

当且仅当$\frac{u+v}{a^2}=\frac{v+\lambda}{b^2}=\frac{\lambda+u}{c^2}$时,式(2) 取等号.

简证 在式(1) 中,令$\frac{y'+z'}{2}=a^2,\frac{z'+x'}{2}=b^2,\frac{x'+y'}{2}=c^2$,则

$$\begin{cases}x'=-a^2+b^2+c^2\\y'=a^2-b^2+c^2\\z'=a^2+b^2-c^2\end{cases}$$

$$\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}=4\Delta$$

代入式(1) 即可得到.

命题2 匹多(Pedoe) 不等式.

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别为 a,b,c 和 a',b',c',面积分别为 Δ 和 Δ',那么

$$(-a'^2+b'^2+c'^2)a^2+(a'^2-b'^2+c'^2)b^2+(a'^2+b'^2-c'^2)c^2\geqslant 16\Delta'\Delta \tag{3}$$

当且仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 时,式(3) 取等号.

简证 在式(1) 中,令

$$\frac{y'+z'}{2}=a^2,\frac{z'+x'}{2}=b^2,\frac{x'+y'}{2}=c^2$$

及 $x=-a^2+b^2+c^2,y=a^2-b^2+c^2,z=a^2+b^2-c^2$

则 $\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}=4\Delta',\sqrt{(yz+zx+xy)}=4\Delta$

将以上各式代入式(1),便得到式(3).

命题3 设 a,b,c 为三角形 ABC 的三边长,Δ 为其面积,λ,u,v 为任意实数,则

$$(uv+v\lambda+\lambda u)abc\geqslant 4\sqrt{\lambda uv(\lambda a^2+ub^2+vc^2)}\Delta \tag{4}$$

当且仅当 $\lambda a^2(-a^2+b^2+c^2)=ub^2(a^2-b^2+c^2)=vc^2(a^2+b^2-c^2)$ 时,式(4) 取等号.

简证 在定理中,令 $x'=\frac{uv}{a^2},y'=\frac{v\lambda}{b^2},z'=\frac{\lambda u}{c^2},x=-a^2+b^2+c^2,y=a^2-b^2+c^2,z=a^2+b^2-c^2$,则

$$\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}=4\Delta$$

代入式(4),便可得到式(4).

命题4 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别为 a,b,c 和 a',b',c',面积分别为 Δ 和 Δ',则

$$a'(-a+b+c)+b'(a-b+c)+c'(a+b-c)\geqslant 4\sqrt{3}\sqrt{\Delta'\Delta} \tag{5}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 为正三角形时,式(5)取等号.

简证 在定理中,令 $\frac{y'+z'}{2}=a'$,$\frac{z'+x'}{2}=b'$,$\frac{x'+y'}{2}=c'$,及 $x=-a+b+c$,$y=a-b+c$,$z=a+b-c$,则

$$\begin{aligned}\sqrt{y'z'+z'x'+x'y'}=&[(a'-b'+c')(a'+b'-c')+\\&(a'+b'-c')(-a'+b'+c')+\\&(-a'+b'+c')(a'-b'+c')]^{\frac{1}{2}}\geqslant\\&[3(-a'+b'+c')(a'-b'+c')\\&(a'+b'-c')(a'+b'+c')]^{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

(据不等式 $x+y+z\geqslant\sqrt{3(yz+zx+xy)}$,这里 x,y,z 为正数)得

$$上式=(48\Delta'^2)^{\frac{1}{4}}$$

(据三角形面积的海伦公式)即

$$\sqrt{y'z'+z'x'+x'y'}\geqslant(48\Delta'^2)^{\frac{1}{4}}$$

同理,可以得到

$$\sqrt{yz+zx+xy}\geqslant(48\Delta^2)^{\frac{1}{4}}$$

将以上各式分别代入式(1),并注意到,这时式(1)右边式子

$$\sqrt{y'z'+z'x'+x'y'}\cdot\sqrt{yz+zx+xy}\geqslant(48\Delta'^2)^{\frac{1}{4}}\cdot(48\Delta^2)^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{3}\sqrt{\Delta'\Delta}$$

由此便得到式(5).

不等式(5),由重庆市第二十三中学高买老师于1981年提出的,这里给出了另一种证明.

命题5 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边长和半周长分别为 a,b,c,p 和 a',b',c',p',面积分别为 Δ 和 Δ',则

$$\begin{aligned}&a'(p'-a')(p-b)(p-c)+b'(p'-a')(p-b)(p-c)+\\&c'(p'-a')(p-b)(p-c)\geqslant 2\Delta\Delta'\end{aligned} \tag{6}$$

当且仅当 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$ 时,式(6)取等号.

简证 在定理中,令

$$x'=4(p'-b')(p'-c')$$
$$y'=4(p'-c')(p'-a')$$
$$z'=4(p'-a')\cdot(p'-b')$$
$$x=4(p-b)(p-c)$$

$$y=4(p-c)(p-a)$$
$$z=4(p-a)(p-b)$$

则

$$\frac{y'+z'}{2}=2(p'-c')(p'-a')+2(p'-a')(p'-b')=2a'(p'-a')$$

即
$$\frac{y'+z'}{2}=2a'(p'-a')$$

同理,可得

$$\frac{z'+x'}{2}=2b'(p'-b')$$
$$\frac{x'+y'}{2}=2c'(p'-c')$$

另外,不难求得

$$\sqrt{y'z'+z'x'+x'y'}=\sqrt{16p'(p'-a')(p'-b')(p'-c')}=4\Delta'$$
$$\sqrt{yz+zx+xy}=\sqrt{16p(p-a)(p-b)(p-c)}=4\Delta$$

将以上各式分别代入式(1),整理,便得到式(6).

不等式(6),由陕西省永寿县常宁中学安振平老师,在《数学通讯》1987 年第 6 期上提出的不等式,这里不过给出了又一种证法.

命题 6 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别为 a,b,c 和 a',b',c',面积分别为 Δ 和 Δ',则

$$(a-b+c)(a+b-c)a'^2+(a+b-c)(-a+b+c)b'^2+$$
$$(-a+b+c)(a-b+c)c'^2\geqslant 16\Delta\Delta' \tag{7}$$

当且仅当 $(-a+b+c)(-a'^2+b'^2+c'^2)=(a-b+c)(a'^2-b'^2+c'^2)=(a+b-c)(a'^2+b'^2-c'^2)$ 时,式(7) 取等号.

简证 在定理中,令

$$x'=-a'^2+b'^2+c'^2$$
$$y'=a'^2-b'^2+c'^2$$
$$z'=a'^2+b'^2-c'^2$$
$$x=(a-b+c)(a+b-c)$$
$$y=(a+b-c)(-a+b+c)$$
$$z=(-a+b+c)(a-b+c)$$

则
$$\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}=4\Delta',\sqrt{(yz+zx+xy)}=4\Delta$$

将以上各式分别代入式(1),便可得到.

特别地,当命题 6 中,再令 $a'=b'=c'=1$ 时,便有

$$(a-b+c)(a+b-c)+(a+b-c)(-a+b+c)+$$

$$(-a+b+c)(a-b+c) \geqslant 4\sqrt{3}\Delta$$

经恒等变换可以得到

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4\sqrt{3}+(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$

这就是费恩斯列尔(Finslew) - 哈德维格尔(Hadwiger) 不等式,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立.

命题7 设a,b,c为三角形ABC的三边长,Δ为其面积,λ,u,v为任意正数,则

$$\lambda bc(-a+b+c)+uca(a-b+c)+vab(a+b-c) \geqslant$$

$$4\sqrt{uva^2+v\lambda b^2+\lambda uc^2}\Delta \tag{8}$$

当且仅当$\frac{\lambda}{a^2}(-a+b+c)=\frac{u}{b^2}(a-b+c)=\frac{v}{c^2}(a+b-c)$时,式(8)取等号.

简证 由于不等式(1)也可写成

$$\frac{(y'+z')}{2}x+\frac{(z'+x')}{2}y+\frac{(x'+y')}{2}z \geqslant$$

$$\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')(yz+zx+xy)} \tag{1'}$$

在式(1')中,令

$$x=(a-b+c)(a+b-c)$$

$$y=(a+b-c)(-a+b+c)$$

$$z=(-a+b+c)(a-b+c)$$

$$x'=\frac{\lambda bc}{a},y'=\frac{uca}{b},z'=\frac{vab}{c}$$

则

$$\sqrt{(yz+zx+xy)}=4\Delta$$

$$\sqrt{(y'z'+z'x'+x'y')}=\sqrt{uva^2+v\lambda b^2+\lambda uc^2}\Delta$$

将以上各式分别代入式(1'),并整理,便可得到式(8).

命题8 设P为$\triangle ABC$内部(包括边界)任意一点,从P分别向三边BC,CA,AB引垂线,垂足分别为A',B',C',连接A',B',C'得到$\triangle A'B'C'$,若记$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的面积分别为Δ和Δ',则

$$\Delta' \leqslant \frac{1}{4}\Delta \tag{9}$$

当且仅当点P为$\triangle ABC$的外接圆圆心时,式(9)取等号.

简证 设$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$PA'=\lambda$,$PB'=u$,$PC'=v$.并在定理中,令

$$x'=-a^2+b^2+c^2$$

$$y'=a^2-b^2+c^2$$

$$z' = a^2 + b^2 - c^2$$

$$x = \frac{\lambda}{a}, y = \frac{u}{b}, z = \frac{v}{c}$$

则式(1′)左边为

$$\frac{(y' + z')}{2}x + \frac{(z' + x')}{2}y + \frac{(x' + y')}{2}z = \lambda a + ub + vc = 2\Delta$$

这时式(1)的右边为

$$\sqrt{y'z' + z'x' + x'y'} \cdot \sqrt{yz + zx + xy} = 4\Delta \cdot \sqrt{\frac{uv}{bc} + \frac{v\lambda}{ca} + \frac{\lambda u}{ab}} =$$

$$4\Delta \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{2}uv\sin A}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}v\lambda\sin B}{\Delta} + \frac{\frac{1}{2}\lambda u\sin C}{\Delta}}$$

注意有$\frac{1}{2}uv\sin A = \frac{1}{2}uv\sin \angle C'PB' = S_{\triangle B'C'P}$等

$$\text{上式} = 4\Delta \cdot \sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}} = 4\sqrt{\Delta\Delta'}$$

因此有

$$2\Delta \geqslant 4\sqrt{\Delta\Delta'}$$

即

$$\Delta' \leqslant \frac{1}{4}\Delta$$

由式(1),我们还可以得出许许多多关于三角形中的不等式,限于篇幅,这里就不再赘述了.

(写作时间:1987.08.15)

11 关于三角形中线的几个不等式

本文提出并证明关于三角形中线的几个恒等式及很强的不等式.

设 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a, CA=b, AB=c$,其对应中线分别为 m_a, m_b, m_c,面积为 Δ,则

(1) $\sum am_a \geqslant 2\Delta+\sqrt{\sum b^2c^2}$;

(2) $\sum bcm_bm_c \geqslant \frac{1}{4}\sum b^2c^2+2\Delta\sqrt{\sum b^2c^2}$;

(3) $\prod am_a \geqslant \frac{1}{2}\Delta\sum b^2c^2$;

(4) $\sum (am_a)^2=(2\Delta)^2+2(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2})^2$;

(5) $\sum (am_a)^3 \leqslant (2\Delta)^3+2(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2})^3$;

(6) $\sum (am_a)^4=(2\Delta)^4+2(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2})^4$;

(7) $\sum (am_a)^n \geqslant (2\Delta)^n+2(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2})^n (n\in \mathbf{N}$,且 $n\geqslant 5)$;

(8) $\sum \frac{1}{bcm_bm_c} \leqslant \frac{4}{\sum b^2c^2}+\frac{2}{\Delta\sqrt{\sum b^2c^2}}$;

(9) $\sum (\frac{1}{am_a})^n \leqslant (\frac{1}{2\Delta})^n+2(\frac{2}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^n (n\in \mathbf{N})$.

以上所有不等式都当且仅当 ΔABC 为等腰三角形时取等号.

上述(1)、(2)、(8) 三式的证明可参见“关于三角形中线的一组不等式”①,式(3) 的证明可参见“一个三角形中线不等式”②;式(4)、(6) 易证从略. 下面证明余下的几个不等式.

式(5) 的证明:由对称性,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,由三角形中线公式易证 $am_a \leqslant bm_b, cm_c \leqslant bm_b$(从略),于是我们首先证明

$$\sum am_a(am_a-2\Delta)(2am_a-\sqrt{b^2c^2}) \leqslant 0 \qquad ①$$

可得

① 杨学枝. 关于三角形中线的一组不等式. 中学数学,1993. 3.

② 杨学枝. 一个三角形中线不等式. 数学通报,1995. 12.

$$上式\Leftrightarrow\sum\frac{am_a[(2am_a)^2-(4\Delta)^2][(2am_a)^2-b^2c^2]}{4(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{b^2c^2})}\leqslant 0$$

又得

$$上式\Leftrightarrow\sum\frac{-am_a(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)(a^2-b^2)}{4(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{b^2c^2})}\leqslant 0 \qquad ②$$

但由于

$$am_a(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{b^2c^2})-bm_b(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{b^2c^2})=$$

$$2(bm_b-am_a)(abm_am_b-\Delta\sqrt{b^2c^2})=$$

$$\frac{(bm_b-am_a)[(4abm_am_b)^2-(4\Delta\sqrt{b^2c^2})^2]}{8(bm_b+am_a)(abm_am_b+\Delta\sqrt{b^2c^2})}=$$

$$\frac{(bm_b-am_a)[(a^2-c^2)^2(b^2-c^2)^2+16\Delta^2(a^2-c^2)(b^2-c^2)]}{8(bm_b+am_a)(abm_am_b+\Delta\sqrt{b^2c^2})}\geqslant 0$$

(注意到当 $a\geqslant b\geqslant c$ 时,有 $am_a\leqslant bm_b$) 即有

$$\frac{am_a}{(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{b^2c^2})}\geqslant\frac{bm_b}{(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{b^2c^2})}$$

同理有

$$\frac{cm_c}{(cm_c+2\Delta)(2cm_c+\sqrt{b^2c^2})}\geqslant\frac{bm_b}{(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{b^2c^2})}$$

因此

$$式②左边=\sum\frac{-am_a(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)(a^2-b^2)}{4(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{b^2c^2})}\leqslant$$

$$-\frac{bm_b(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)(a^2-b^2)}{4(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{\sum b^2c^2})}+$$

$$\frac{bm_b(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2(a^2-b^2)}{4(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{\sum b^2c^2})}-$$

$$\frac{bm_b(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)^2}{4(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{\sum b^2c^2})}=$$

$$\frac{bm_b(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)}{4(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{\sum b^2c^2})}\cdot$$

$$[-(b^2-c^2)+(a^2-c^2)-(a^2-b^2)]=0$$

即式 ② 成立，因此式 ① 成立.

现在来证明式(5). 将式 ① 左边展开，得到

$$2\sum (am_a)^3 - (4\Delta + \sqrt{\sum b^2c^2})\sum (am_a)^2 + 2\Delta\sqrt{\sum b^2c^2}\sum am_a \leqslant 0$$

又由于

$$\sum (am_a)^2 = \frac{1}{4}(4\sum b^2c^2 - \sum a^4)$$

$$\sum am_a \geqslant 2\Delta + \sqrt{\sum b^2c^2} \quad (\text{式}(1))$$

因此有

$$2\sum (am_a)^3 - \frac{1}{4}(4\Delta + \sqrt{\sum b^2c^2})(4\sum b^2c^2 - \sum a^4) +$$

$$2\Delta\sqrt{\sum b^2c^2}(2\Delta + \sqrt{\sum b^2c^2}) \leqslant$$

$$2\sum (am_a)^3 - (4\Delta + \sqrt{\sum b^2c^2})\sum (am_a)^2 +$$

$$2\Delta\sqrt{\sum b^2c^2}\sum am_a \leqslant 0$$

即得

$$2\sum (am_a)^3 - 16\Delta^3 - \frac{1}{2}(\sqrt{\sum b^2c^2})^3 \leqslant 0$$

也就是

$$\sum (am_a)^3 \leqslant (2\Delta)^3 + 2(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2})^3$$

式(5) 获证，由证明中可知，当且仅当 ΔABC 为等腰三角形时，式(5) 取等号.

式(7) 的证明：先证明当 $n \in \mathbf{N}$，且 $n \geqslant 4$ 时，有

$$\sum (am_a - \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2})[(am_a)^{n-1} - (2\Delta)^{n-1}] \geqslant 0 \qquad ③$$

由对称性，不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$，由三角形中线公式易证 $am_a \leqslant bm_b, cm_c \leqslant bm_b$，于是

$$\text{式 ③} \Leftrightarrow (am_a - \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2})(am_a - 2\Delta)\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-2-i}(2\Delta)^i \Leftrightarrow$$

$$(bm_b - \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2})(bm_b - 2\Delta)\sum_{i=0}^{n-2}(bm_b)^{n-2-i}(2\Delta)^i +$$

$$(cm_c - \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2})(cm_c - 2\Delta)\sum_{i=0}^{n-2}(cm_c)^{n-2-i}(2\Delta)^i \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$-\frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-2-i}(2\Delta)^i(b^2-c^2)}{(am_a + \sqrt{b^2c^2})(am_a + 2\Delta)} +$$

$$\frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)\sum_{i=0}^{n-2}(bm_a)^{n-2-i}(2\Delta)^i(a^2-c^2)}{(bm_b+\sqrt{b^2c^2})(bm_b+2\Delta)}-$$

$$\frac{(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)\sum_{i=0}^{n-2}(cm_c)^{n-2-i}(2\Delta)^i(a^2-b^2)}{(cm_c+\sqrt{b^2c^2})(cm_c+2\Delta)}\geqslant$$

$$0 \quad ④$$

但由于当 $n \geqslant 4$ 时,有

$$(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{b^2c^2})\sum_{i=0}^{n-2}(bm_b)^{n-2-i}(2\Delta)^i-$$

$$(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{b^2c^2})\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-2-i}(2\Delta)^i=$$

$$[2(am_a)^2+(4\Delta+\sqrt{b^2c^2})am_a+2\Delta\sqrt{b^2c^2}]\sum_{i=0}^{n-2}(bm_b)^{n-2-i}(2\Delta)^i-$$

$$[2(bm_b)^2+(4\Delta+\sqrt{b^2c^2})bm_b+2\Delta\sqrt{b^2c^2}]\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-2-i}(2\Delta)^i=$$

$$2(am_a)^2(bm_b)^2\sum_{i=0}^{n-2}(bm_b)^{n-4-i}(2\Delta)^i+$$

$$(4\Delta+\sqrt{b^2c^2})(am_a)(bm_b)\sum_{i=0}^{n-2}(bm_b)^{n-3-i}(2\Delta)^i+$$

$$2\Delta\sqrt{b^2c^2}\sum_{i=0}^{n-2}(bm_b)^{n-2-i}(2\Delta)^i-$$

$$2(am_a)^2(bm_b)^2\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-4-i}(2\Delta)^i-$$

$$(4\Delta+\sqrt{b^2c^2})(am_a)(bm_b)\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-3-i}(2\Delta)^i-$$

$$2\Delta\sqrt{b^2c^2}\sum_{i=0}^{n-2}(am_a)^{n-2-i}(2\Delta)^i=$$

$$2(am_a)^2(bm_b)^2\sum_{i=0}^{n-2}[(bm_b)^{n-4-i}-(am_a)^{n-4-i}](2\Delta)^i+$$

$$(4\Delta+\sqrt{b^2c^2})(am_a)(bm_b)\sum_{i=0}^{n-2}[(bm_b)^{n-3-i}-(am_a)^{n-3-i}](2\Delta)^i+$$

$$2\Delta\sqrt{b^2c^2}\sum_{i=0}^{n-2}[(bm_b)^{n-2-i}-(am_a)^{n-2-i}](2\Delta)^i=$$

$$2(am_a)^2(bm_b)^2\sum_{i=0}^{n-6}[(bm_b)^{n-4-i}-(am_a)^{n-4-i}](2\Delta)^i+$$

$$2(2\Delta)^{n-6}[(am_a)^2(bm_b)^2-(2\Delta)^4][(am_a)^2-(bm_b)^2]+$$

假设 $n = k$ 时,式(7) 成立,即有

$$\sum (am_a)^k \geqslant (2\Delta)^k + 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2}\right)^k \quad (k \geqslant 5) \qquad ⑤$$

当 $n = k+1$ 时,有

$$\sum (am_a)^{k+1} - (2\Delta)^{k+1} - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2}\right)^{k+1} =$$

$$\sum \left(am_a - \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2}\right)\left[(am_a)^k - (2\Delta)^k\right] +$$

$$(2\Delta)^k\left(\sum am_a - 2\Delta - \sqrt{\sum b^2c^2}\right) +$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2}\left[\sum (am_a)^k - (2\Delta)^k - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\sum b^2c^2}\right)^k\right]$$

(据式 ③,式(1),式 ⑤) 得

$$上式 \geqslant 0$$

即当 $n = k+1$ 时,式(7) 也成立. 由数学归纳法原理可知式(7) 成立,由证明中可知,当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,式(7) 取等号.

式(9) 的证明:由对称性,不妨设 $a \geqslant b \geqslant c$,则有 $\frac{1}{am_a}, \frac{1}{cm_c} \geqslant \frac{1}{bm_b}$. 于是,我们有

$$\sum \left(\frac{1}{am_a}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{2\Delta}\right)^n + 2\left(\frac{2}{\sqrt{\sum b^2c^2}}\right)^n \Leftrightarrow$$

$$\sum \left[\left(\frac{2\Delta}{am_a}\right)^n - 1\right] \leqslant 2\left[\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}}\right)^n - 1\right] \Leftrightarrow$$

$$\sum \left[\left(\frac{2\Delta}{am_a} - 1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2\Delta}{am_a}\right)^{n-i}\right] \leqslant$$

$$2\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}} - 1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}}\right)^{n-i} \qquad ⑥$$

由"关于三角形中线的一组不等式"一文,有

$$\sum \frac{1}{am_a} \leqslant \frac{1}{2\Delta} + \frac{4}{\sqrt{\sum b^2c^2}}$$

即

$$\sum \left(\frac{2\Delta}{am_a} - 1\right) \leqslant 2\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}} - 1\right)$$

因此,要证式 ⑥,只要证

$$\sum \left[\left(\frac{2\Delta}{am_a} - 1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2\Delta}{am_a}\right)^{n-i}\right] \leqslant \sum \left[\left(\frac{2\Delta}{am_a} - 1\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}}\right)^{n-i}\right] \Leftrightarrow$$

$$(\frac{2\Delta}{am_a}-1)[\sum_{i=1}^{n}(\frac{2\Delta}{am_a})^{n-i}-\sum_{i=1}^{n}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-i}]+$$

$$(\frac{2\Delta}{bm_b}-1)[\sum_{i=1}^{n}(\frac{2\Delta}{bm_b})^{n-i}-\sum_{i=1}^{n}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-i}]+$$

$$(\frac{2\Delta}{cm_c}-1)[\sum_{i=1}^{n}(\frac{2\Delta}{cm_c})^{n-i}-\sum_{i=1}^{n}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-i}]\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(\frac{2\Delta}{am_a}-1)\sum_{i=1}^{n}[(\frac{2\Delta}{am_a})^{n-i}-(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-i}]+$$

$$(\frac{2\Delta}{bm_b}-1)\sum_{i=1}^{n}[(\frac{2\Delta}{bm_b})^{n-i}-(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-i}]+$$

$$(\frac{2\Delta}{cm_c}-1)\sum_{i=1}^{n}[(\frac{2\Delta}{cm_c})^{n-i}-(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-i}]\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$(\frac{2\Delta}{am_a}-1)(\frac{2\Delta}{am_a}-\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})\sum_{i=1}^{n-1}[(\frac{2\Delta}{am_a})^{n-1-i}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-1-i}]+$$

$$(\frac{2\Delta}{bm_b}-1)(\frac{2\Delta}{bm_b}-\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})\sum_{i=1}^{n-1}[(\frac{2\Delta}{bm_b})^{n-1-i}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-1-i}]+$$

$$(\frac{2\Delta}{cm_c}-1)(\frac{2\Delta}{cm_c}-\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})\sum_{i=1}^{n-1}[(\frac{2\Delta}{cm_c})^{n-1-i}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-1-i}]\leqslant 0\Leftrightarrow$$

$$-\frac{\Delta(b^2-c^2)^2(a^2-c^2)(a^2-b^2)}{2\sqrt{\sum b^2c^2}(am_a)^2(am_a+2\Delta)(2am_a+\sqrt{\sum b^2c^2})}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[(\frac{2\Delta}{am_a})^{n-1-i}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-1-i}]+$$

$$\frac{\Delta(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2(a^2-b^2)}{2\sqrt{\sum b^2c^2}(bm_b)^2(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{\sum b^2c^2})}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[(\frac{2\Delta}{bm_b})^{n-1-i}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-1-i}]-$$

$$\frac{\Delta(b^2-c^2)(a^2-c^2)(a^2-b^2)^2}{2\sqrt{\sum b^2c^2}(cm_c)^2(cm_c+2\Delta)(2cm_c+\sqrt{\sum b^2c^2})}\cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}[(\frac{2\Delta}{cm_c})^{n-1-i}(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}})^{n-1-i}]\leqslant$$

$$0 \qquad ⑦$$

注意到当 $a \geqslant b \geqslant c$ 时,有 $\frac{1}{am_a}, \frac{1}{cm_c} \geqslant \frac{1}{bm_b}$,因此

$$式⑦左边 \leqslant \frac{\Delta(b^2-c^2)(a^2-c^2)^2(a^2-b^2)}{2\sqrt{\sum b^2c^2}(bm_b)^2(bm_b+2\Delta)(2bm_b+\sqrt{\sum b^2c^2})} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\left(\frac{2\Delta}{bm_b}\right)^{n-1-i}\left(\frac{4\Delta}{\sqrt{\sum b^2c^2}}\right)^{n-1-i}\right] \cdot$$

$$[-(b^2-c^2)+(a^2-c^2)-(a^2-b^2)] =$$

$$0$$

故式⑦成立,于是式⑥成立,式(9)获证,由证明中可知,当且仅当 $\triangle ABC$ 为等腰三角形时,式(9)取等号.

(写作时间:2000.02.12)

12 关于三角形三线的一个不等式

江苏褚小光先生于2009年3月7日在全国不等式研究网站上提出如下猜想.

猜想 在非钝角 $\triangle ABC$ 中,外接圆半径为 R,BC 为最小边,m_a,w_a,h_a 分别为 BC 边上的中线,角平分线,高线,则

$$m_a+w_a+h_a\geqslant\frac{9}{2}R \tag{1}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时式(1)取等号.

笔者已证明式(1)是成立的,我们还得到了较式(1)更好的结果,即有以下定理.

定理 在非钝角 $\triangle ABC$ 中,外接圆半径为 R,BC 为最小边,m_a,w_a,h_a 分别为 BC 边上的中线,角平分线,高线,则

$$m_aw_a+w_ah_a+m_ah_a\geqslant\frac{27}{4}R^2 \tag{2}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时式(2)取等号.

证明 由第六章"三角几何不等式"例12中的式(20)知,若设 $\triangle ABC$ 三边长为 $BC=a,CA=b,AB=c$,面积为 Δ,则有

$$m_aw_a\geqslant\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c) \tag{3}$$

因此

$$\begin{aligned}
&m_aw_a+w_ah_a+m_ah_a\geqslant\\
&m_aw_a+2\sqrt{m_aw_a}\cdot h_a\geqslant\\
&\frac{1}{4}(a+b+c)(-a+b+c)+\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)}\cdot\frac{2\Delta}{a}=\\
&R^2[(\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A)+\\
&4\sqrt{\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A}\cdot\sin B\sin C]
\end{aligned}$$

由此可知,要证式(2),只要证

$$\begin{aligned}
&4(\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A)+\\
&16\sqrt{\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A}\cdot\sin B\sin C\geqslant 27
\end{aligned} \tag{4}$$

由于 BC 为最小边,即 $\angle A$ 最小,不妨设 $\angle C\geqslant\angle B\geqslant\angle A$,下面分两种情况来证明式(4).

i)当 $\frac{\pi}{2}\geqslant\angle C\geqslant\angle B\geqslant\frac{\pi}{3}\geqslant\angle A$ 时,则有 $\sin C\geqslant\sin B\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$,$\sin A\leqslant$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$,于是

$$4(\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A)+$$
$$16\sqrt{\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A}\cdot\sin B\sin C\geqslant$$
$$4[(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2]+$$
$$16\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\cdot(\frac{\sqrt{3}}{2})^2=27$$

故式(4)成立.

ⅱ)当$\frac{\pi}{2}\geqslant\angle C\geqslant\frac{\pi}{3}\geqslant\angle B\geqslant\angle A$时,由$\frac{\pi}{2}\geqslant\angle C=\pi-\angle A-\angle B\geqslant\pi-2\angle B>0$,有$\sin C\geqslant\sin 2B,\sin A\leqslant\sin B$,于是

$$4(\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A)+$$
$$16\sqrt{\sin^2B+\sin^2C+2\sin B\sin C-\sin^2A}\cdot\sin B\sin C\geqslant$$
$$4(\sin^22B+2\sin B\sin 2B)+16\sqrt{\sin^22B+2\sin B\sin 2B}\cdot\sin B\sin 2B$$

由此可知,要证式(2),只要证

$$4(\sin^22B+2\sin B\sin 2B)+16\sqrt{\sin^22B+2\sin B\sin 2B}\cdot\sin B\sin 2B\geqslant 27 \tag{5}$$

设$\cos B=x$,则$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$,这时,式(5)经移项、平方(去根号),得到

$$-4\ 096x^{10}-4\ 096x^9+12\ 032x^8+11\ 776x^7-12\ 032x^6-11\ 264x^5+$$
$$3\ 488x^4+2\ 720x^3+608x^2+864x-729\geqslant 0\Leftrightarrow$$
$$(2x-1)(-2\ 048x^9-3\ 072x^8+4\ 480x^7+8\ 128x^6-1\ 952x^5-$$
$$6\ 608x^4-1\ 560x^3+580x^2+594x+729)\geqslant 0$$

由于$2x-1\geqslant 0$,因此,要证式(5)成立,只要证当$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$时

$$-2\ 048x^9-3\ 072x^8+4\ 480x^7+8\ 128x^6-1\ 952x^5-$$
$$6\ 608x^4-1\ 560x^3+580x^2+594x+729\geqslant 0$$

式(6)左边 $=512x^5(-2x^2+1)(2x-1)^2(x+2)+$
$$16x(-2x^2+1)^2(2x-1)(22x^2+103x+7)+$$
$$4(-2x^2+1)^2(2x-1)^2+2(-2x^2+1)(2x-1)(358x+271)+$$
$$121\sqrt{2}(-\sqrt{2}x+1)(2x-1)+(191-121\sqrt{2})(2x-1)\geqslant$$
$$0$$

(注意到$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$)因此,式(6)成立,故式(5)成立.

由 i)、ii) 可知,式(4) 成立,于是式(2) 获证,由证明过程易知,当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时,式(2) 取等号.

(写作时间:2009. 04. 08)

参考文献

[1]杨学枝.不等式研究[M].拉萨:西藏人民出版社,2000.
[2]TRAN PHUONG. Diamonds In Mathematical Inequalities[M]. Hanoi :Hanoi Publishing House, 2007.
[3]VASILE CIRTOAJE. Algebraic Inequalities Old and New Methods[M]. Ceh Silvaniel:GIL Publishing House, 2006.
[4]杨学枝.不等式研究[M].拉萨:西藏人民出版社,2000.
[5]杨学枝,林章衍.福建省初等数学研究文集[M].福州:福建教育出版社,1993.
[6]杨学枝.中国初等数学研究[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2009.
[7]单墫.几何不等式在中国[M].南京:江苏教育出版社,1996.
[8]陈计,叶中豪.初等数学前沿[M].南京:江苏教育出版社,1996.
[9]杨世明.中国初等数学研究文集[M].郑州:河南教育出版社,1992.
[10]杨世明.初等数学研究的问题与课题[M].2版.长沙:湖南教育出版社,1996.